„Differenziert Differenzieren“ – Mit Heterogenität in verschiedenen Phasen des Mathematikunterrichts umgehen

Chapter · January 2012

2 authors:

Timo Leuders
Freiburg University of Education

Susanne Prediger
Technische Universität Dortmund

Vorversion eines Artikels, erschienen in: Ittel, Angela & Lazarides, Rebecca (Hrsg.): Differenzierung im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht – Implikationen für Theorie und Praxis. Klinkhardt Verlag, Bad Heilbrunn, 35–66.,

Timo Leuders & Susanne Prediger

“Differenziert Differenzieren“ – Mit Heterogenität in verschiedenen Phasen des Mathematikunterrichts umgehen

1 Vielfalt der Differenzierungsansätze für den Mathematikunterricht

Das Differenzieren in seinen lernpsychologischen, fachdidaktischen und unterrichtspraktischen Herausforderungen wird in den letzten Jahren zunehmend als wesentliches Merkmal von Unterrichtsqualität betrachtet (Meyer, 2004; Helmke, 2010) und durch viele *fachübergreifende* Publikationen bearbeitet (wie z.B. viele Beiträge in diesem Band). Insbesondere in schulpraktischen Publikationen und in Fortbildungsmaßnahmen gehört das Differenzieren zu den zentralen Themen.

Obwohl Adaptivität, d.h. die Passung des Unterrichts zu den Lernvoraussetzungen der Schülerinnen und Schüler, in den letzten Jahren als wichtiges *fachübergreifendes* Qualitätskriterium erkannt wurde (z.B. Helmke, 2010), taucht diese in Studien zum Zusammenhang von Unterrichtsqualität und Leistungszuwächsen nur indirekt auf, nämlich als Teilaspekt der drei meist identifizierten Basisdimensionen „Klassenführung“, „kognitive Aktivierung“ und „Schülerunterstützung“ (Klieme, Lipowsky, Rakoczyn & Ratzka, 2006; Rakoczy, Klieme, Lipowsky & Drollinger-Vetter, 2010). Dabei wurde Differenzierung im Fachunterricht bislang vor allem bezüglich der Wirkungen auf Leistungsausgleich untersucht (vgl. zusammenfassend Lipowsky, 2009).

Die fachübergreifenden Ansätze und Befunde sind wichtig, doch müssen sie fachspezifisch ergänzt werden, denn sowohl in der Unterrichtsforschung als auch in der Lehrerbildungsforschung wird betont, dass die Qualität der Lernprozesse und Lernergebnisse auch wesentlich von *fachspezifischen* Merkmalen des Unterrichts (Seidel & Shavelson, 2007; Lipowsky, 1999, 2009; Meyer, 2004) und *fachspezifischen* Kompetenzen der Lehrpersonen (Ma, 1999) bestimmt werden. Daher bearbeitet dieser Beitrag die Frage, inwiefern es auch aus fachspezifischer Perspektive bedeutsame Hinweise für eine geeignete Gestaltung differenzierenden Mathematikunterrichts gibt. Angesichts dieser Forschungslage sind wir in unserer Frage mehr auf die Analyse von Konzepten, Vorschlägen und reflektierten Erprobungen angewiesen, als dass wir uns auf systematische empirische Befunde stützen könnten. Von theoretischer und empirischer Relevanz ist dabei, wie sich Ansätze differenzierenden

Mathematikunterrichts auf *allgemein*didaktische und lernpsychologische Befunde stützen können und welchen Mehrwert eine *fach*didaktische Akzentuierung für die Entwicklung und Erforschung solcher differenzierender Lernumgebungen liefern kann, die die allgemeine Anforderung der Adaptivität (im Sinne Helmkes, 2010) konkretisieren.

Dabei wird im Artikel aufgezeigt, dass dies auf die verschiedenen Ebenen der Differenzierung in unterschiedlichem Maße zutrifft: Differenzierungsansätze, die *Unterrichtsstrukturen* (z.B. Wochenpläne oder Checklisten, vgl. Bönsch, 2004) und *Unterrichtsmethoden* (Barzel, Büchter & Leuders, 2007) betreffen, sollten zwar auch fachspezifisch reflektiert sein, beruhen aber wesentlich auf allgemeindidaktischen Analysen. Hingegen ist die Differenzierung durch *Aufgaben* eine genuin fachdidaktisch zu bearbeitende Herausforderung, ebenso wie das je themenspezifisch geeignete *Zusammenspiel aller drei Ebenen: Strukturen, Methoden, Aufgaben* (Hußmann & Prediger, 2007) und der dahinter liegenden grundlegenden Analyse und Aufbereitung mathematischer Themenbereiche.

Als Beispiel für ein aus fachdidaktischer Sicht gestörtes Zusammenspiel unterschiedlicher Ebenen sei etwa die von einigen Schulen präferierte einseitige Fokussierung auf strukturell-methodische Differenzierung durch vollständige Individualisierung in Wochenplänen oder Lernbüros genannt. Reflektierte Modellversuche lassen vermuten, dass ein solcher Unterricht durch die mit diesen Ansätzen oft verbundene Vernachlässigung sozial-kommunikativer Elemente zentralen Kriterien fachdidaktischer Unterrichtsqualität nicht gerecht werden kann. Zugunsten der einfachen Durchführbarkeit werden erhebliche Abstriche beim kognitiven Niveau und dem inhaltlichen Anspruch des Unterrichts gemacht (Nigglie & Kersten, 1999; Prediger, Bialek, Fernholz, Heckmann, Kraatz-Röper & Vernay, 2006; Bohl & Kucharz, 2010). Pointiert ausgedrückt: Unverstandenes Verfahrenspauken lässt sich wesentlich einfacher vollkommen individualisieren als eine kognitiv anspruchsvolle und inhaltlich tragfähige Auseinandersetzung mit mathematischen Konzepten (Wittmann, 1996).

Über reine Individualisierung hinaus gibt es eine Vielzahl unterrichtspraktisch erprobter Vorschläge für unterschiedliche Differenzierungsansätze im Mathematikunterricht (z.B. Krippner, 1992; Heymann, 1991; Hengartner, Hirt, Wälti & Primarschulteam, 2006; Prediger et al., 2006; Hußmann & Prediger, 2007; Krauthausen & Scherer, 2010; Bruder & Reibold, i. d. Bd.), die das Lernen im Gleichschritt auflösen zugunsten einer stärkeren Berücksichtigung vielfältiger Unterschiede in den Lernvoraussetzungen. Unterschieden werden kann insbesondere die Differenzierung nach *Lerntempo, Zugangsweisen, Anspruchsniveaus sowie Lerninhalten und -zielen* (zur Übersicht z.B. Hußmann & Prediger, 2007). Vor allem die Aspekte der Zugangsweisen, des Anspruchsniveaus und der Lernziele verweisen auf die Bedeutung *fach*didaktischer Analysen und zwar sowohl bildungstheoretischer als auch empirischer Art, wenn man substantielle Aussagen zu geeigneten Formen der Differenzierung treffen will.

Zudem lassen sich zwei Strategien zur Herstellung von Adaptivität unterscheiden (Heymann, 1991): Bei *geschlossener Differenzierung* übernimmt die Lehrkraft die Alleinverantwortung für die Adaptivität des Lernangebots und weist den Lernenden ihre individuellen Herausforderungen zu (zum Beispiel durch Arbeitsblätter auf drei Niveaus, durch Wochenpläne mit unterschiedlichen Aufgaben oder durch Stationenbetrieb mit individuell zugewiesenen Pflichtstationen). Dagegen wird bei *Selbstdifferenzierung* (auch bezeichnet als „offene Differenzierung“ bei Heymann, 1991, oder „natürliche Differenzierung“ bei Müller & Wittmann, 2004) diese Verantwortung mit den Lernenden geteilt, indem ein gemeinsames Lernangebot für alle so gestaltet wird, dass die Lernenden es auf unterschiedlichen Wegen und Niveaus bearbeiten können. Da die Strategie der Selbstdifferenzierung spezifisch war für in der Mathematikdidaktik entwickelte Differenzierungsansätze („Differenzierung vom Fach aus“, Wittmann, 1996) und einer fachspezifischen Analyse der Lerngegenstände und Lernbedingungen bedarf, wird sie im weiteren Text besondere Berücksichtigung finden.

2 Differenzierung der Differenzierungsansätze nach Kernprozessen

Schon Klafki (1976) betonte, dass kein einzelner Differenzierungsansatz den vielfältigen Lernvoraussetzungen und Anforderungen allein gerecht werden kann. Genutzt werden sollten daher unterschiedliche Differenzierungsansätze mit wechselnden Schwerpunktsetzungen.

Aus fachdidaktischer Sicht hat sich die Unterscheidung der Differenzierungsansätze nach der epistemologischen Struktur der Prozesse mathematischen Erkenntnisgewinns in den jeweiligen Unterrichtssituationen als besonders relevant herausgestellt (Leuders, 2003; Büchter & Leuders, 2005; Hußmann & Prediger, 2007): Differenzieren beim Erkunden neuer mathematischer Situationen stellt andere Anforderungen an die Unterrichtsgestaltung als das in Übephasen oder beim Aktivieren von Vorerfahrungen. So selbstverständlich diese Aussage aus allgemeindidaktischer Sicht erscheint, so folgenreich ist sie in ihren fachspezifischen Konsequenzen. Um dies im Detail zu zeigen, unterscheiden wir – recht pragmatisch, und sicherlich mit einiger Kontingenz – verschiedene ‚Kernprozesse’ (vgl. Barzel, Hußmann, Leuders & Prediger, 2011b). Das sind fachspezifisch charakterisierbare Situationen mit unterschiedlicher epistemologischer Qualität, wie z.B.

- der Kernprozess des *Anknüpfens* an Vorerfahrungen und Interessen,

- der Kernprozess des *Erkundens* neuer Zusammenhänge,
- der Kernprozess des *Austauschens* unterschiedlicher Wege,
- der Kernprozess des *Ordnens* als Systematisieren und Sichern,
- der Kernprozess des *Vertiefens* durch Üben und Wiederholen.

In Anlehnung an klassische Phasenmodelle der allgemeinen Didaktik und der Instruktionspsychologie (Roth, 1976; Aebli, 1983; Weinert, 1997), aber auch an fachlich-epistemologisch motivierte Phasenmodelle (Leuders, 2003) werden mithilfe der Kernprozesse allgemeine Überlegungen zur Psychologie des *individuellen* Lernens verbunden mit der institutionellen Notwendigkeit, schulischen Unterricht als Prozess des *gemeinsamen* Lernens in einer Klasse zu gestalten. Dabei sind diese Kernprozesse fachspezifisch zu konturieren, und in ihrer Abfolge flexibler zu verstehen als in klassischen Phasenmodellen, daher nutzen wir statt der Bezeichnung ‚Phasen' hier ‚Kernprozesse'.

In den folgenden Abschnitten wird herausgearbeitet, welche unterschiedlichen Differenzierungsanforderungen und -ansätze für diese Kernprozesse von Bedeutung sind, und wie diese konkret umgesetzt werden können. Dabei greifen allgemeindidaktische Überlegungen mit fachspezifischen ineinander. Die fachspezifischen Aspekte werden im Folgenden möglichst anschaulich erläutert am Beispiel eines Unterrichtskonzeptes, das die Autoren zusammen mit B. Barzel und S. Hußmann im Rahmen des langfristigen Forschungs- und Entwicklungsprojekts KOSIMA für die Jahrgangsstufen 5–10 erarbeiten, mit Lehrkräften erproben und in ihren Wirkungen auf die initiierten Lernprozesse untersuchen (Barzel, Prediger, Leuders & Hußmann, 2011c; Hußmann, Leuders, Barzel & Prediger, 2011).

2.1 Differenzieren beim Anknüpfen

Konstruktivistische Lerntheorien betonen, dass Menschen stets auf der Basis bisher gesammelter Erfahrungen wahrnehmen und neues Wissen konstruieren, indem sie neue Erfahrungen in existierende kognitive Strukturen integrieren und zu bisherigen Erfahrungen situationsbezogen in Beziehung setzen (nach Glasersfeld, 1991; Gerstenmaier & Mandl, 1995). Damit diese Verknüpfungen in fachlich tragfähiger Weise erfolgen und nicht unintendierte Zufallsprodukte erzeugen, werden im Unterricht gezielt diejenigen Vorerfahrungen aktiviert, an welche sich eine fachlich tragfähige Anknüpfung lohnt (Reinmann-Rothmeier & Mandl, 2001). Dies ist die psychologische Begründung des alten pädagogischen Gebots, die Lernenden „dort abzuholen, wo sie stehen" (Lengnink, Prediger & Weber, 2011, S. 2). Aus motivationaler Sicht lohnt zudem der Einbezug subjektiver Interessen (Prenzel, 1988).

Nach dem mathematikdidaktisch einflussreichen Konzept der ‚realistic mathematics education' (Freudenthal, 1983; van den Heuvel-Panhuizen, 2001) erfolgt eine solche Aktivierung tragfähiger Vorerfahrungen vorzugsweise in lebensweltlichen Kontexten mit beziehungshaltigen Phänomenen. Denn werden mathematische Begriffe verstanden als „Werkzeuge, um die Phänomene der natürlichen, sozialen und geistigen Welt zu ordnen“ (Freudenthal, 1983, S. IX), dann erfordert der Kernprozess des Anknüpfens eben solche Phänomene, zu denen Lernende ihre lebensweltlichen Erfahrungen und Vorstellungen aktivieren können (Lengnink et al., 2011).

Den Prototyp eines in all diesen Punkten scheiternden Unterrichtseinstiegs haben Grell & Grell (1994) plastisch beschrieben: Die Lehrperson regt die Lernenden durch ein Bild vom Pyramidenbau an, vielfältige Fragen über die bautechnischen und menschlichen Fragen der ägyptischen Sklavenarbeit zu stellen, um dann schroff auf die Frage einzuengen, „Wie berechnet man das Volumen einer Pyramide?“ Der hier gewählte Kontext knüpft weder an die Vorerfahrungen der Lernenden an, noch führt er zur mathematischen Kernidee (Ausschöpfen von Volumina durch kleine annähernde Teilvolumina). Auch Interessen werden nicht adäquat einbezogen, wenn die für die Lernenden als relevant erscheinenden Fragen nicht weiter verfolgt werden. Fruchtbarer wäre stattdessen eine frühere Fokussierung auf den Aufwand des Steintransports und dafür auf die Zahl der zu stapelnden Steinquader. Die Diskrepanz zwischen den eckigen Quadern und der Pyramidenform könnte so auf die Annäherungsidee führen.

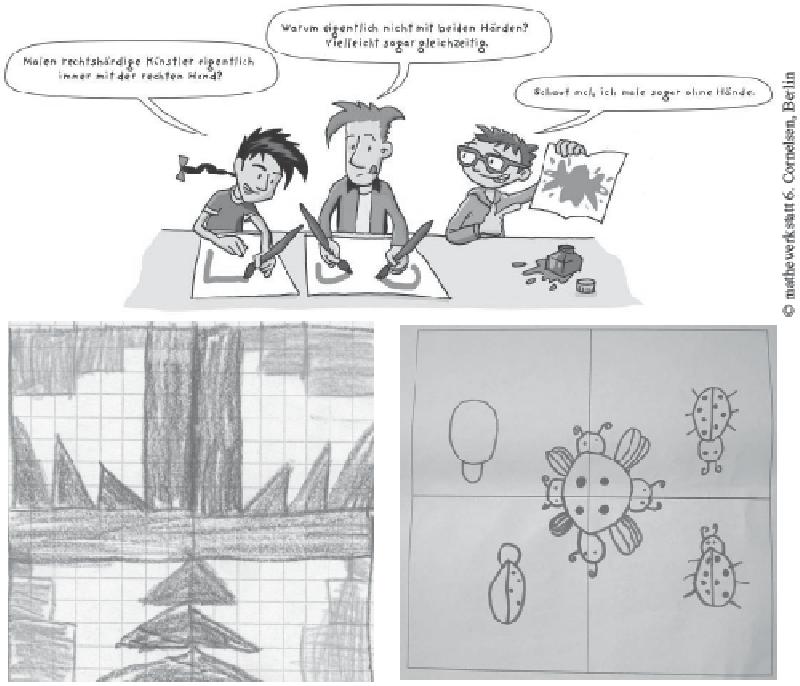
Zu einem geeigneten Anknüpfungspunkt werden also Phänomene in Kontexten, (1) wenn sie zentrale Fragen aufwerfen, auf welche die zu erarbeitenden mathematischen Begriffe eine Antwort liefern. Diese „Kernfragen“ ermöglichen die nötige *Zielorientierung*, wenn sie effektiv auf die zu erarbeitenden Kernideen des nachfolgenden Unterrichtes hinführen. Und (2) wenn die Phänomene solche Vorstellungen der Lernenden aktivieren, die für die Weiterarbeit aus fachlicher Sicht fruchtbar gemacht werden können.

Welche Differenzierungsanforderungen ergeben sich nun aus fachspezifischer Perspektive im Rahmen des Kernprozesses „Anknüpfen“?

- Das differenzierende Anknüpfen muss die unterschiedlichen lebensweltlichen Vorerfahrungen der Lernenden ernst nehmen und dazu die notwendige Offenheit bieten.
- Das Anknüpfen an heterogene Lernvoraussetzungen braucht Gelegenheit für den diagnostischen Blick auf Lernausgangslagen.
- Das Anknüpfen bietet (in begrenztem Maße) Lernenden Gelegenheit, Vorerfahrungsdefizite durch unterrichtliche Tätigkeiten auszugleichen.

Notwendige Voraussetzung für ein differenzierendes Lernangebot ist eine hinreichende Kenntnis der heterogenen Lernvoraussetzungen. Hier können sich Lehrkräfte nur zum Teil auf fachdidaktische Literatur und eigene Erfahrungen stützen, stattdessen wird die Anknüpfungssituation selbst zur diagnostischen Situation, in der die Lernenden ihre heterogenen individuellen Sichtweisen und Kenntnisse entfalten. Dazu muss die Lehrkraft genügend Gelegenheit haben, die Produkte der Lernenden in Ruhe und ohne Entscheidungsdruck anzusehen, zum Beispiel wenn die Situation in den letzten 20 Minuteneiner Stunde stattfindet.

Am Beispiel eines Einstiegs in das Thema Symmetrie soll dargestellt werden, wie geeignete Situationen aussehen können, die einen solchen diagnostischen Einstieg zu einem differenzierenden Unterricht bilden können. Ausgangspunkt und sinnstiftender roter Faden für das Kapitel ist das Prinzip „Das Gleiche Woanders“, das in vielen (später symmetrisch genannten) geometrischen Situationen eine Rolle spielt (Hußmann & Leuders, 2011).



© mathewerkstatt 6, Cornelsen, Berlin

Abb. 1: Beispiele für symmetrische Bilder auf unterschiedlichem Niveau (aus Hußmann & Leuders, 2011)

Der Kernprozess des Anknüpfens wird durch den Auftrag initiiert, das Gleiche woanders zu zeichnen, in sogenannten „Zweihändebildern“ (d.h. Bilder mit zwei Feldern und einer Symmetrieachse) oder „Vierhändebildern“ (also Bilder mit vier Feldern und mehr Symmetrien) (vgl. Abbildung 1 für zwei

Arbeitsprodukte von Fünftklässlern). Das Zeichnen der Bildern nach dem Prinzip „Das Gleiche Woanders“ holt die Lernenden bei individuellen Symmetrieerfahrungen ab und führt auf den Begriff der Spiegelsymmetrie, beim Vierhändebild sogar möglicherweise auf die Drehsymmetrie.

Diese Lernsituation führt zielorientiert auf die Symmetriebegriffe, besitzt dabei jedoch eine hinreichende Offenheit, damit die Lernenden im Sinne einer Selbstdifferenzierung auf unterschiedlichen Wegen und Kompliziertheitsniveaus Bilder erzeugen und damit ihrer Erfahrungen zur Symmetrie aktivieren können, dies zeigen die Beispiele in Abbildung 1. Gleichzeitig kann ein solcher Einstieg auch kompensatorisch wirken, indem Lernende mit limitierten Alltags-Erfahrungen im kontrollierten Zeichnen von Figuren hier Erfahrungsdefizite ausgleichen können.

Parallel beobachtet die Lehrkraft Lernstände bezüglich Fertigkeiten, Vorerfahrungen und Verbalisierungsfähigkeiten: Wie gut können Lernende Prinzipien der Symmetrie als Erzeugungstechniken bereits umsetzen? Aktivieren sie dabei Dreh- oder Spiegelsymmetrien oder vermischen sie beides? Wie exakt zeichnen sie? Welche Sprachmittel nutzen sie zur Beschreibung ihrer Bilder?

Ein solcher offener, kontextbezogener Einstieg erfüllt demnach drei Funktionen: Erstens bildet er einen sinnstiftenden Rahmen für die Aktivierung von Vorerfahrungen zu fachlichen Inhalten (durch die Lernenden) und zweitens ermöglicht er eine erste Kompensation. Drittens dient er der Diagnose vorunterrichtlicher Lernvoraussetzungen (durch die Lehrkraft).

Darüber hinaus kann ein kontextbezogener Einstieg außerdem an potentielle *Interessen* der Lernenden anknüpfen, indem er relevante Fragen aus der Lebenswelt der Lernenden aufnimmt. Gleichwohl stößt der Klassenunterricht bezüglich einer differenzierenden Interessenorientierung an Grenzen: Eine konsequente Ausrichtung an aktualen, subjektiven Interessen, wie etwa in radikalen Formen des Projektunterrichts, haben ihre Grenze in der Zielorientierung und der unterrichtspraktischen Möglichkeit der Berücksichtigung von Heterogenität, wenn nicht der gemeinsame Unterrichtsgegenstand verloren gehen soll. Würde zum Beispiel das Thema „Maßstab“ im Kontext aktueller Spielzeugen aufgegriffen, müssten dies für die einen Puppenhäuser, für die anderen Flugzeugmodelle oder Dinosaurier sein. Was in Übungsphasen durchaus organisierbar ist (durch parallele, interessendifferenzierende Kontextbezüge in Wahlaufgaben), muss in der Phase des Anknüpfens und Erkundens zugunsten der Erhaltung gemeinsamer Gesprächsbasen für den darauf aufbauenden Kernprozess des Austauschens (siehe unten) zurück gestellt werden. Berücksichtigt werden können unterschiedliche (nicht nur genderspezifische) Interessenlagen jedoch in der Kombination von Themen über mehrere Unterrichtseinheiten hinweg.

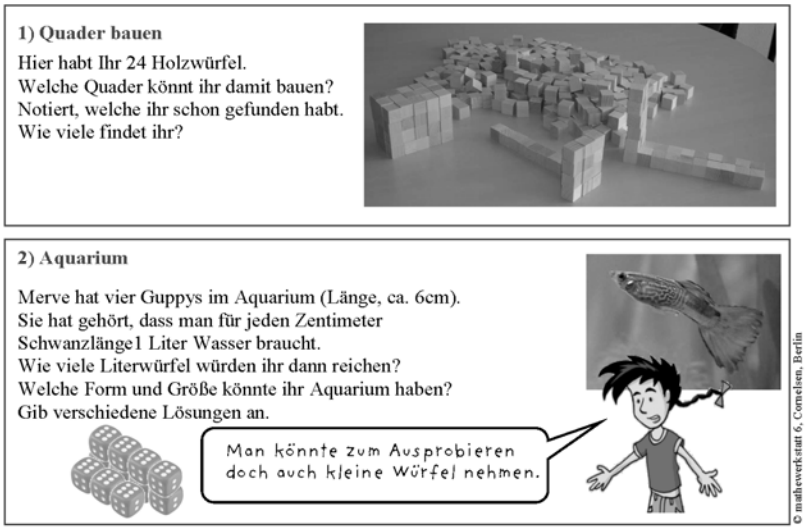
Gleichwohl kann auch innerhalb eines Kontextes Raum für differenzierende Interessenorientierung in Bezug auf den mathematischen Kern gegeben werden, wenn hinreichend offene Einstiegssituationen den Schülerinnen und Schülern genügend Raum lassen für eine „individuelle Positionsbestimmung" im Rahmen der vorgegeben Probleme (Gallin & Ruf, 1998).

2.2 Differenzieren beim Erkunden

Für die Erarbeitung neuen Wissens gibt es verschiedene Instruktionsmodelle, die auf unterschiedliche Weise Differenzierung zulassen. Ein auf effektiven individuellen Wissenserwerb ausgelegtes Lehrmodell kann im Extremfall beispielsweise computergestützt als tutorielles System realisiert werden, die Differenzierung findet dann in Form einer computergesteuerten adaptiven Individualisierung des Lernverlaufs statt (z.B. Koedinger & Corbett, 2006).

Auch wenn solche Modelle prinzipiell im schulischen Kontext einsetzbar sind, befassen wir uns an dieser Stelle mit einem anderen Modell von schulischem Mathematiklernen, bei dem der Erwerb neuen Wissens eingebettet ist in ein Lernen auf unterschiedlichen Zielebenen und der Balance unterschiedlicher Lernprozesse: Schülerinnen und Schüler erarbeiten nicht nur neue Inhalte, sie erwerben zugleich übergreifende und gegenstandsbezogene kognitive und metakognitive Strategien und bilden dabei ein angemessenes Mathematikbild aus. In diesem Sinne wird eine substantielle Lernumgebung (Wittmann, 1995; Reinmann-Rothmeier & Mandl, 2001) in heutigen Begriffen als kognitiv aktivierend auf verschiedenen Zielebenen zugleich charakterisiert (Leuders & Holzäpfel, 2011). Solche Lernumgebungen für das schulische Mathematiklernen sind zum einen geprägt von einem konstruktivistischen Grundverständnis von Lernen und zum anderen aus fachlicher Sicht von einer Balance der komplementären Grunderfahrungen des Faches Mathematik als Strukturwissenschaft, als Anwendungsdisziplin und als Feld intellektueller Betätigung (Winter, 1996). Daher werden aus fachlicher Sicht problemgenetische Lernwege (Wagenschein, 1968; Freudenthal, 1973) und mathematische Kernideen als Bedeutungsträger (Gallin & Ruf, 1998) als zentrale Strukturelemente für solche Lernprozesse erachtet (Barzel et al., 2011b). An dieser Stelle des Beitrags fragen wir also nicht nach optimalen Modellen für Wissenserwerb unter Bedingung der Heterogenität im Allgemeinen, sondern fokussieren auf das hier angedeutete Unterrichtsmodell für die erste Phase des Erwerbs neuer mathematischer Konzepte. Im bereits erwähnten fachdidaktischen Entwicklungsprojekt KOSIMA (Hußmann, Leuders, Barzel & Prediger, 2011) wird der damit verbundene Kernprozess als „Erkunden" bezeichnet.

Welche Differenzierungsansätze und -anforderungen ergeben sich nun für den Kernprozess des Erkundens? Bei einigen Themengebieten ist tatsächlich ein selbstdifferenzierender, offener Erkundungsauftrag vollkommen ausreichend. Ein Beispiel dafür liefert der offene Erkundungsauftrag „Quader bauen“ (Abbildung 2), der durch schlichte Umkehrung der klassischen Frage zur Volumenberechnung entsteht. Statt das Volumen zu vorgegebenen Quadern berechnen zu lassen, können sich Kinder das Thema Volumen selbst erschließen, wenn sie aufgefordert werden, zu einer vorgegeben Würfelzahl (also zu vorgegebenem Volumen) passende Quader zu finden. Sowohl in der innermathematischen Aufgabe 1 als auch in der kontexteingebetteten Aufgabe 2 wird mit der Erkundung die mathematische Grundidee der Volumenmessung als Legen von Körpern mit Einheitswürfeln, aus der sich dann die Beziehung *Länge x Breite x Höhe* erarbeitet. Die Aufgaben sind insofern selbstdifferenzierend, als alle Kinder mindestens einen Quader finden, die meisten mehrere. Nach Anspruch gestufte Impulse fordern jedes Kind auf seinem Niveau heraus, nicht alle müssen beim letzten ankommen (vgl. Hußmann & Prediger, 2007): *Stufe 1: Findest du einen? – Stufe 2: Findest du viele? – Stufe 3: Findest du alle? – Stufe 4: Wie kannst Du sicher sein, dass du alle gefunden hast?*



1) Quader bauen

Hier habt Ihr 24 Holzwürfel.
Welche Quader könnt ihr damit bauen?
Notiert, welche ihr schon gefunden habt.
Wie viele findet ihr?

2) Aquarium

Merve hat vier Guppys im Aquarium (Länge, ca. 6cm).
Sie hat gehört, dass man für jeden Zentimeter
Schwanzlänge1 Liter Wasser braucht.
Wie viele Literwürfel würden ihr dann reichen?
Welche Form und Größe könnte ihr Aquarium haben?
Gib verschiedene Lösungen an.

© mathewerkstatt 6, Cornelsen, Berlin

Abb. 2: Selbstdifferenzierender, materialgestützter Erkundungsauftrag in zwei Varianten (aus Prediger, 2009 bzw. Holzäpfel et al., 2012)

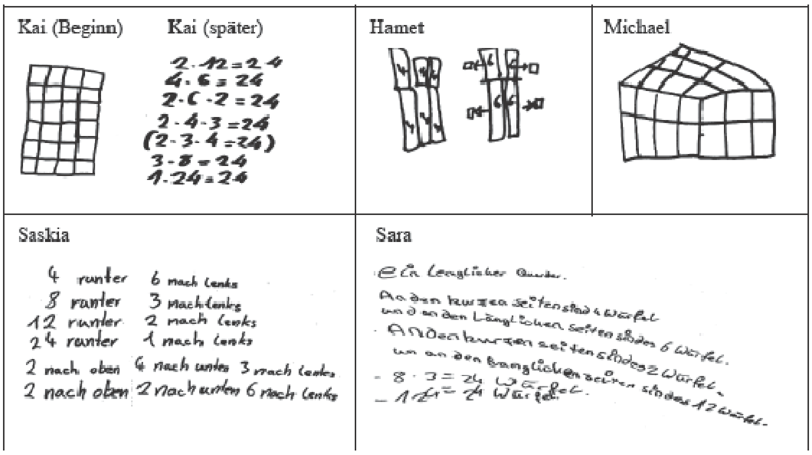


Abb. 3: Beispiele für vielfältige Bearbeitungswege der Lernenden

Abbildung 3 gibt einen Einblick in die große Breite der Bearbeitungen, die Kinder zweier Klassen 5 in Partnerarbeit dazu erzeugt haben. Um die bereits gefundenen Quader festzuhalten, erfinden die Kinder bzw. die Kinderpaare ganz unterschiedliche Notationen:

- verbale Notationen (allgemeinsprachlich wie Sara und Saskia)
- numerische Notationen (mit zwei oder drei Seiten, wie Kai und Sara)
- graphische Notationen (durch zwei- oder dreidimensionale Skizzen wie von Michael, Hamet und Kai zu Beginn).

Sie unterscheiden sich im Tempo, wie lange sie das Material zur Stützung brauchen, und in der Systematik, mit der sie sicherstellen, alle gefunden zu haben. Saskia zum Beispiel geht von Beginn an vom „quadratischsten“ zum länglichsten Rechteck, Kai dagegen hat ebenso wie Hamet Mühe, die Vollständigkeit zu prüfen. Alle erarbeiten ganz nebenbei die Volumenformel.

Die hier erreichte Niveaustreuung durch einen offenen Erkundungsauftrag kann sich in leistungsfähigen Lerngruppen auch auf größere Sinneinheiten beziehen. Hußmann (2002) zeigt im Rahmen seines Unterrichtskonzepts des „konstruktivistischen Lernens an intentionalen Problemen“, in welchem Maße Lernende bei radikaler Öffnung in der Lage sein können, mathematische Begriffsentwicklung selbstständig zu betreiben. Die Selbstdifferenzierung besteht hierbei wesentlich im Zulassen individueller fachlicher Erkundungswege, die durch die gemeinsamen (intentionalen) Problemstellungen die Zielorientierung behalten. Dieses Konzept, ebenso wie die extensive Arbeit mit Lerntagebüchern im Konzept des „Dialogischen Lernens“ bei Ruf und Gallin (1998) setzen allerdings sehr überschaubare Inhalte (wie die Volumenformel) voraus. Oder sie richten sich an Lernende, die über hinreichende metakognitive und selbstregulative Fähigkeiten verfügen, da sie den eigenen Lernprozess über lange Zeiträume hinweg organisieren und verbalisieren müssen. Beide Konzepte wurden daher vor allem für einen gymnasialen Unterricht der höheren Schulstufen entwickelt.

Welche Anforderungen müssen die Differenzierungsansätze für das Erkunden jedoch erfüllen, wenn die Lernenden nicht schon breit entwickelte metakognitive und selbstregulative Fähigkeiten besitzen? Wie kann man die Grundprinzipien des genetischen und zugleich eigenaktiven Lernens aufrechterhalten, ohne sie zu überfordern?

- *Zugänglichkeit*: Lernwege im Erkunden müssen für *alle* Lernniveaus offen gestaltet sein, da das Prinzip des genetischen, problemlösenden Erarbeitens aus oben genannten Gründen für alle Lernenden relevant ist.
- *Unterstützungsstrukturen*: Strukturelle Ansätze der Differenzierung bieten Stützen im Lernprozess an, wie z.B. geeignete Lehrerimpulse, vorstellungsunterstützende Materialien oder regelmäßige Aufforderungen zu Zwischenreflexionen.
- *Facettenreiche fachliche Angebote*: Aufgaben für das Erkunden können multiple Lösungswege, alternative Repräsentationen oder Begründungen auf verschiedenen Abstraktionsstufen anbieten und so die fachliche Vielfalt zur Eröffnung selbstdifferenzierender Lernwege nutzen.

Die Effektivität problemorientierter genetischer bzw. entdeckender Ansätze ist von der empirischen Lehr-Lernforschung aus unterschiedlicher Perspektive und unabhängig vom Fach untersucht worden. Die Jahrzehnte währende Forschung zur Effizienz von Formen des Entdeckenden Lernens (discovery-learning) lässt sich dahingehend zusammenfassen, dass Ansätze des angeleiteten bzw. erweiterten Entdeckens (guided discovery, enhanced discovery) dem reinen Entdecken (pure discovery, unassisted discovery) hinsichtlich der Effizienz des Wissenserwerbs überlegen sind (vgl. Metaanalyse von Alfieri, Brooks, Aldrich & Tenenbaum, 2011). Verglichen mit einem reinen Entdeckungslernen erweist sich nach dieser Metastudie darbietendes Lernen (expository learning) als effizienter, die untersuchten Studien beziehen sich jedoch mehrheitlich auf die Zielebene der Wissensvermittlung. Die im Unterricht bedeutsamen, oben aufgeführten Zieldimensionen der Vermittlung eines geeigneten Mathematikbildes oder der Förderung von Problemlösehaltungen und -fähigkeiten können einen solchen Ansatz jedoch nicht als geeignet erscheinen lassen.

Will man die formulierte Herausforderung der Zugänglichkeit für alle berücksichtigen, so darf man weniger leistungsstarke Lernende aus dem Entdeckungsprozess nicht ausschließen. Dabei besteht aber die Schwierigkeit, dass durch erhöhte kognitive Zusatzanforderungen im Bearbeitungsprozess gerade bei schwächeren Schülern Lerneffekte ausbleiben (Sweller, 1994). Alfieri et al. (2011) identifizieren mit Blick auf die Forschungslage anleitende Stützmaßnahmen (scaffolding), Selbsterklärungselemente (Chi, de Leeuw, Chiu & LaVancher, 1994), Rückmeldungen (feedback) und entlastende Lösungsbeispiele (worked examples; Renkl, Schworm & Hilbert, 2004) als geeignete Elemente zur Optimierung von Phasen entdeckenden Lernens.

Man kann also festhalten, dass die besten Lernerfolge in Bezug auf Wissensvermittlung bei einer Kombination aus Entdeckung und Unterstützung, einer Balance aus Konstruktion und Instruktion erzielt werden. Alle empirischen Befunde deuten darauf hin, dass es gerade die schwächeren Schülerinnen und Schüler sind, die der engeren Anleitung und Unterstützung bedürfen, um unter solchen Rahmenbedingungen effektiv zu lernen.

Um aufzuzeigen, wie die hier angedeuteten Differenzierungsanforderungen nicht nur in Form von Unterrichtsstrukturen umgesetzt werden können, sondern fachspezifisch und dabei mitunter sogar gegenstandsspezifisch konstituiert werden können, sollen einige Aufgabenformate kurz erläutert werden.

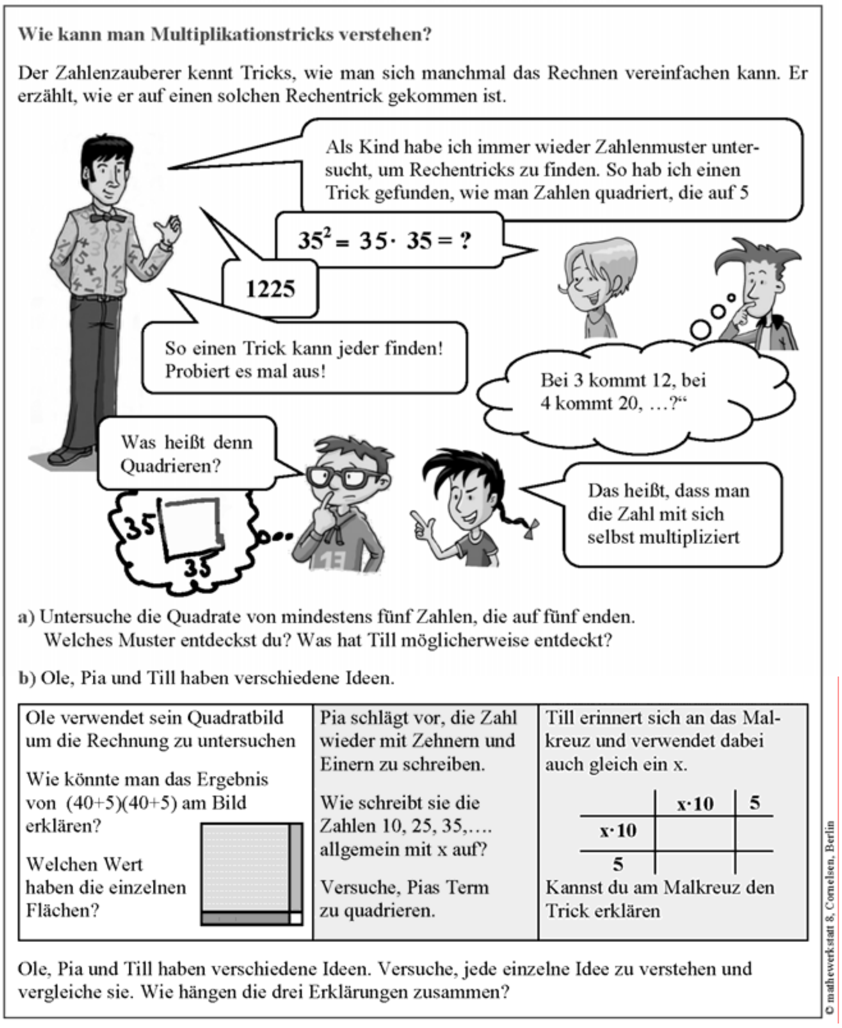
Bei geschlossener Differenzierung durch parallele Aufgaben können beim Erkunden die „Entdeckungsbögen“ weiter und knapper und damit die Erwartung an Selbststeuerung der Lernenden größer oder geringer skaliert werden. Dazu muss allerdings das Lernmaterial in verschiedenen Versionen vorliegen. Gestufte Aufgaben dagegen bieten einen niederschwelligen gemeinsamen Einstieg für alle und ermöglichen, sich sukzessive in den Anforderungen öffnen (vgl. Blütenaufgaben bei Bruder, i. d. Bd.). Lernende verzweigen in den offenen Teilen dann nach Lerntempo oder Erarbeitungstiefe.

Schließlich können Aufgaben verschiedene Bearbeitungsweisen erlauben, die nicht notwendig nach Anspruchsniveau, sondern nach verschieden präferierten Zugangsweisen differenzieren, z.B. hinsichtlich

- der *Modellierungs- oder Bearbeitungsstrategie* (z.B. Lösen durch Probieren vs. Aufstellen eines funktionalen Modells)
- des *Abstraktionsniveaus* (z.B. konkrete Beispiele zur Plausibilisierung bis hin zu formal-deduktiver Begründung)
- der *Repräsentationsformen* (z.B. grafische, symbolische oder tabellarische Darstellungen).

Dies wird durch die Teilaufgabe a) aus Abbildung 4 exemplarisch veranschaulicht. Der erste Dialog zwischen Zahlenkünstler und Pia repräsentiert das sacherschließende Problem: Wie kann der Zahlenkünstler so schnell rechnen? Als Verständnisstütze findet man einen weiteren Dialog zwischen

Ole und Merve, der verbal und ikonisch beim Verständnis der Aufgabe („Quadrat“) unterstützen soll. Tills Denkblase gibt eine Anregung für eine Untersuchungsstrategie.



Wie kann man Multiplikationstricks verstehen?

Der Zahlenzauberer kennt Tricks, wie man sich manchmal das Rechnen vereinfachen kann. Er erzählt, wie er auf einen solchen Rechentrick gekommen ist.

Als Kind habe ich immer wieder Zahlenmuster untersucht, um Rechentricks zu finden. So hab ich einen Trick gefunden, wie man Zahlen quadriert, die auf 5

$35^2 = 35 \cdot 35 = ?$

1225

So einen Trick kann jeder finden! Probiert es mal aus!

Bei 3 kommt 12, bei 4 kommt 20, …?“

Was heißt denn Quadrieren?

Das heißt, dass man die Zahl mit sich selbst multipliziert

a) Untersuche die Quadrate von mindestens fünf Zahlen, die auf fünf enden. Welches Muster entdeckst du? Was hat Till möglicherweise entdeckt?

b) Ole, Pia und Till haben verschiedene Ideen.

Ole verwendet sein Quadratbild um die Rechnung zu untersuchen Wie könnte man das Ergebnis von (40+5)(40+5) am Bild erklären? Welchen Wert haben die einzelnen Flächen?	Pia schlägt vor, die Zahl wieder mit Zehnern und Einern zu schreiben. Wie schreibt sie die Zahlen 10, 25, 35,…. allgemein mit x auf? Versuche, Pias Term zu quadrieren.	Till erinnert sich an das Malkreuz und verwendet dabei auch gleich ein x. **x·10** **5** **x·10** **5** Kannst du am Malkreuz den Trick erklären

Ole, Pia und Till haben verschiedene Ideen. Versuche, jede einzelne Idee zu verstehen und vergleiche sie. Wie hängen die drei Erklärungen zusammen?

© mathewerkstatt 8, Cornelsen, Berlin

Abb. 4: Verschiedene Differenzierungsstrategien bei einer Aufgabe zur Entdeckung einer binomischen Formel (Leuders, Marxer & Rülander, i. Vorb. für 2014)

Insgesamt repräsentiert die Teilaufgabe a) samt Vorspann also einen offenen Einstieg, der Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit des weitgehend selbstständigen Entdeckens der Zusammenhänge quadratischer Zahlenterme gibt. Die Teilaufgabe b) bietet dazu weitgehend gelöste Beispiele an, die inhaltlich auf das zentrale Erkundungsziel eingehen. Diese Angebote erfolgen in alternativen Repräsentationen, von denen die Lernenden für sich auswählen können, welche ihnen beim Verständnis des Zusammenhangs hilft.

In einer leistungsheterogenen Klasse kann man durchaus eine Gruppe schwächerer Schülerinnen und Schüler direkt mit der geschlosseneren Aufgabenvariante b) beginnen lassen, mit der sie sich dann länger befassen können, während die Stärkeren erst einmal auf eigenen Wegen den Trick erkunden und dann ihre Lösungsideen mit denen aus b) vergleichen können.

Hier zeigt sich, wie sehr Aufgaben- und Unterrichtsstruktur verschränkt gedacht werden müssen, wenn man optimale Differenzierungsbedingungen schaffen will. Insbesondere stellt ein solcher flexibler Umgang mit den Aufgaben hohe Anforderungen an die Lehrperson, die das Potential der Aufgabe und die Fähigkeiten der Lernenden einschätzen muss. Unterrichtsstudien wie TIMSS zeigen, dass allein die Verfügbarkeit solcher Aufgaben noch lange nicht die Umsetzung in einem differenzierenden, kognitiv aktivierenden Unterricht impliziert (Hiebert et al., 2003).

2.3 Differenzieren beim Austauschen

Als ein entscheidendes Strukturelement in konstruktivistisch angelegten Lernumgebungen werden das kommunikative Austauschen und das kollektive Reflektieren der Lernenden zu ihren in Eigenaktivität (individuell oder kooperativ) entwickelten Ideen angesehen. Dies ist angesichts der Lernwirksamkeit des reflektierenden Lernens (z.B. Stern & Schumacher, 2004) ein bedeutsamer Teilaspekt ko-konstruktiven Lernens (Reusser, 2005) und wird daher in unterschiedlichen didaktischen Ansätzen explizit berücksichtigt, wie z.B. in der „Du-Phase“ im Dialogischen Unterricht (Gallin & Ruf, 1998) oder bei kooperativen Lernszenarios wie „Think-Pair-Share“ (Green & Green, 2005), auch bei jüngeren Kindern (Sundermann, 1999; Götze, 2007). Da der Teilprozess in Bezug auf Heterogenität spezifische Anforderungen aufweist, wird er hier eigens aufgeführt, auch wenn wir ihn im Rahmen des KOSIMA-Unterrichtskonzeptes unter *Erkunden* subsumieren (z.B. Barzel et al., 2011c).

Im Folgenden soll verdeutlicht werden, dass der Kernprozess des Austauschens nicht nur auf methodischer Ebene für das Differenzieren relevant ist, sondern substantiell inhaltsbezogene Überlegungen tangiert.

Der Teilprozess des Austauschens entwickelter Ideen ist eine der prototypischsten Unterrichtssituationen, in denen die Heterogenität der Lernenden zur Chance werden kann (Sundermann, 1999): Werden die zunächst in eigenaktiven Erkundungen entwickelten Wege in Strategiekonferenzen oder zurückhaltend moderierten Unterrichtsgesprächen verglichen, dann kann die Heterogenität der Lernenden in ihren unterschiedlich präferierten Zugangsweisen, Repräsentationen und Strategien nutzbar gemacht werden für eine kognitiv anspruchsvolle Herausforderung eines verständigen und flexiblen Umgangs mit Mathematik, nämlich den aus fachlicher Sicht notwendigen Facettenreichtum an Zugangsweisen, Repräsentationen und Strategien zu erleben, zu vergleichen und zu reflektieren (dies haben Stigler & Hiebert 1999 als Charakteristikum japanischen Mathematikunterrichts identifiziert).

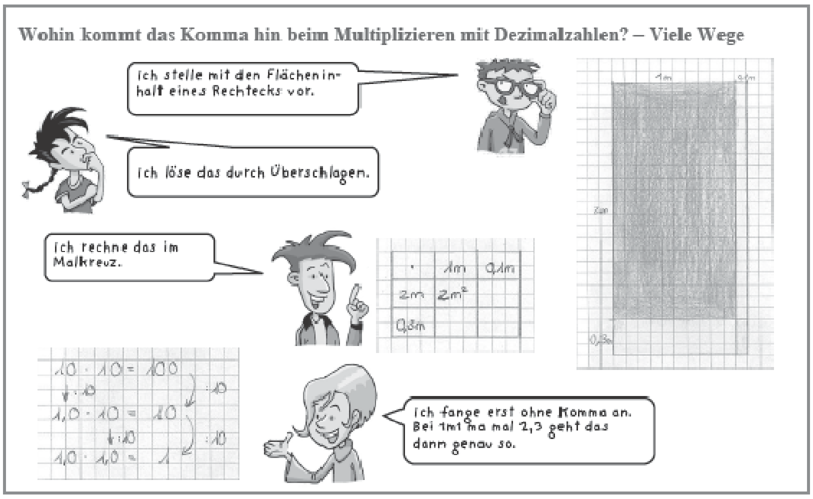
Damit Austauschprozesse in diesem Sinne effektiv sind, sollte die Unterschiedlichkeit der Wege auf fachlich gehaltvolle, relevante Unterscheidungen (wie unterschiedliche Repräsentationen oder Strategien von allgemein-heuristischer Bedeutung) beziehen. Zudem sollten intensive Reflexionen und nicht nur oberflächliche Sammlungen angestoßen werden. Für einen erfolgreichen Einbezug unterschiedlicher Lernvoraussetzungen sind dabei zwei Differenzierungsanforderungen aus fachdidaktischer Perspektive zentral:

- Die *Zugänglichkeit* für alle: die Denkwege der anderen Schülerinnen und Schüler dürfen nicht so fremd sein, dass sie von den schwächeren Lernenden nicht verstanden werden.
- Die *Zielorientierung*: in der Gestaltung der Austauschphasen sollte eine explizite Fokussierung auf eine geeignete Differenzierungsebene in den Lernzielen (Strategien, Repräsentationen usw.) angelegt sein.

Der zweite Punkt zielt darauf ab, sich Rechenschaft darüber abzulegen, auf welcher Stufe Lernende unterschiedliche Strategien erwerben sollen, etwa gemäß folgender Stufung (Hußmann & Prediger, 2007):

- *Stufe 1:* Eine Strategie / Repräsentation / Verfahren kennen und sicher beherrschen;
- *Stufe 2:* Mehrere Strategien / Repräsentationen / Verfahren kennen und eines sicher beherrschen;
- *Stufe 3:* Mehrere Strategien / Repräsentationen /Verfahren beherrschen;
- *Stufe 4:* Mehrere Strategien / Repräsentationen / Verfahren beherrschen und situationsangemessen eine optimale Variante auswählen.

Die letzte Lernstufe ist unter dem Stichwort flexibles bzw. adaptives Rechnen im Fokus der Mathematikdidaktik und Lernpsychologie (z.B. Heinze, Star & Verschaffel, 2009). Diese Stufe ist für Grundrechenarten ein wichtiges Ziel, für Inhalte höherer Klassen allerdings bezüglich der Angemessenheit aus curricularer Perspektive und unter Berücksichtigung individueller Lernstände im Einzelfall zu prüfen. In Unterrichtsversuchen hat sich daher zur Differenzierung bewährt, wenn sich Lehrkräfte über diese Stufung Rechenschaft ablegen und für jeden mathematischen Gegenstand überlegen, welche Stufe welche Lernenden erreichen sollen.



© mathewerkstatt 6, Cornelsen, Berlin

Abb. 5: Unterschiedliche Wege zur Bestimmung der Position des Kommas (aus Barzel, Royar & Streit, 2012b)

Dieser Ansatz der „Differenzierung durch reflektierte Lernziel-Stufung“ wird am Beispiel vielfältiger Repräsentation (und den damit verbundenen Konzeptualisierungen der mathematischen Zusammenhänge) illustriert. Ausgangspunkt ist die Frage, wohin beim Multiplizieren mit Dezimalzahlen wie *2,31 · 1,11* das Komma kommt. Abbildung 5 zeigt typische unterschiedliche Wege, wie sie Kinder entwickeln, die noch nicht auf den Standardalgorithmus der Kommaverschiebungsregel zurückgreifen können, aber über fundierte Verstehensressourcen verfügen:

- Merve überschlägt das Ergebnis, dies ist der wünschenswerte, weil am wenigsten fehleranfällige Begründungsweg.
- Oles Rechteckbild greift zurück auf die Grundvorstellung der Multiplikation als Rechteckfläche und zeigt, wieso die Multiplikationen mit Zehnteln ein um den Faktor 10 kleineres Produkt (d.h. eine kleinere Fläche) liefern. Dieser Begründungsweg sollte prinzipiell verstanden werden, ist jedoch für den Rechenalltag zu aufwendig.
- Tills Malkreuz basiert auf einem bevorzugt unterrichteten Rechenweg zum halbschriftlichen Multiplizieren natürlicher Zahlen (Wittmann & Müller, 2008, S. 59f.). Der Bezug zum vertrauten Rechenweg des Mal-

kreuzes kann helfen, die Zerlegung der Zahl zu verstehen. Er klärt jedoch nicht, wie mit Zehnteln und Hundertsteln zu multiplizieren ist, daher muss das Malkreuz zur Verstehensfundierung mit Oles Rechteckbild verbunden werden.

- Pias operative Betrachtung der Päckchen wirft ein anderes Licht auf die Zusammenhänge, was das Verständnis auf andere Weise stützen kann. Sie ist auch als Alltags-Rechenweg tauglich, jedoch wird man nicht von allen Kindern fordern, sowohl Merves als auch Pias Weg zu beherrschen.

Dieses Beispiel zeigt, dass die Begründungs- und Rechenwege nicht gleichberechtigt nebeneinander stehen müssen. Wird im Unterricht die Vielfalt der Wege für Austausch- und Reflektionsprozesse genutzt, sollte daher aus fachdidaktischer Sicht dem unterschiedlichen Gewicht der Wege Rechnung getragen werden. Dies bedeutet insbesondere, die Wege, die nachhaltig gelernt werden sollen, anders zu gewichten als diejenigen, die der Verständnisabsicherung dienen, aber nicht in gleichem Maße geübt werden müssen.

Nach dem Austausch über verschiedene Wege mit allen Lernenden (u.U. mit Gewichtung wie hier) kann differenzierend weiter gearbeitet werden, indem gemäß der Lernziel-Stufung schwächere Lernende einen Weg festigen, während stärkere stets aufgefordert werden, auf mehreren Wegen zu rechnen.

2.4 Differenzieren beim Ordnen

Für einen nachhaltigen, konsolidierten Wissensaufbau muss dem Erkunden (und Austauschen) eine Phase des Systematisierens und Sicherns folgen, die vier Funktionen erfüllt: Reflektieren (Erfahrungen bewusst machen), Regularisieren (individuell Erarbeitetes mit dem regulären mathematischen Wissen abgleichen), Vernetzen (fragmentiertes Wissen miteinander in Beziehung setzen) und Dokumentieren (Gelerntes im Wissensspeicher schriftlich festhalten, um später darauf zugreifen zu können) (Prediger et al., 2011). Im KOSIMA-Konzept heißt dieser Kernprozess das *Ordnen* (Prediger et al., 2011).

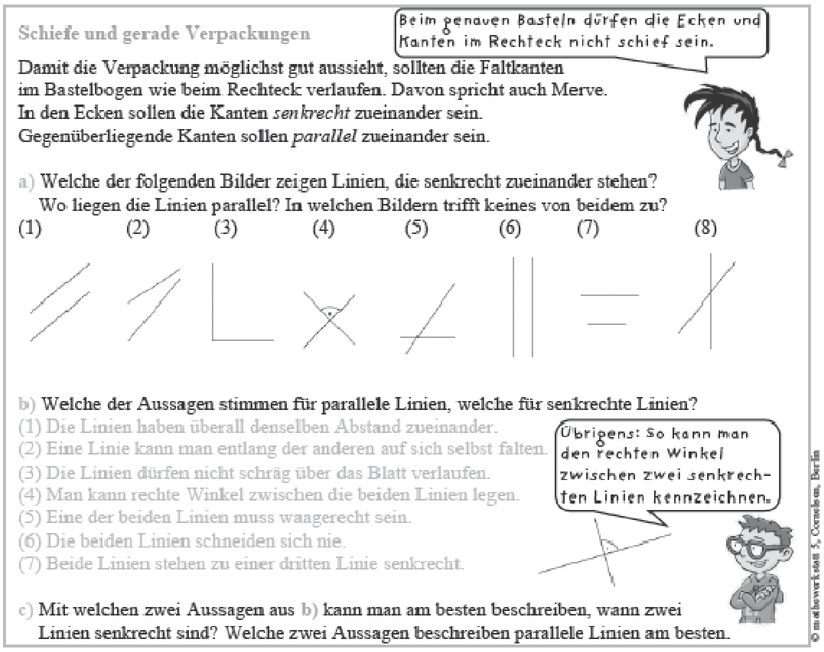
Während das Reflektieren und Vernetzen als Elaborationsstrategie in der pädagogischen Psychologie wiederholt als wichtiges Element effektiven Lernens empirisch untermauert wurde (Stern & Schumacher, 2004; Mandl & Friedrich, 2006), ist das Regularisieren (Gallin & Ruf, 1998) und Dokumentieren zwar für die Unterrichtspraxis als von großer Relevanz herausgearbeitet worden (exemplarisch bei Brückner, 1978; Gallin & Ruf, 1998), aber bislang unseres Wissens wenig im Fokus der Forschung. Umso wichtiger war es, im Rahmen des KOSIMA-Projekts für diesen Kernprozess systematische Design-Prinzipien überhaupt erst zu entwickeln und zu erproben.

Die wichtigsten zwei Qualitätsanforderungen an den Kernprozess des Ordnens beziehen sich auf die Inhaltsauswahl und die Eigenaktivität: *(1) Inhaltsauswahl:* Während sich die Sicherung in der Unterrichtspraxis oft verengend auf Rechenregeln beschränkt, plädieren wir dafür, zur Sicherung der Nachhaltigkeit eines breiten Wissensprofils alle Facetten prozeduralen und konzeptuellen Wissens (Begriffe, Sätze, auch Vorstellungen und Darstellungen, Abgrenzungsbeispiele, Strategien usw.) in den Kernprozess des Ordnens mit einzubeziehen. *(2) Eigenaktivität:* Während im traditionellen Unterrichtsskript der Kernprozess des Ordnens meist als ausgesprochen lehrergesteuerte Phase verwirklicht wird (z.B. im fragend-entwickelnden Gespräch und/oder dem Notieren und Abschreiben von so genannten „roten Kästen"), setzen wir darauf, auch in dieser Phase die Lernenden möglichst aktiv zu beteiligen.

Dieses Ziel der Aktivierung macht die Berücksichtigung der Heterogenität der Lernenden besonders relevant. Dazu mussten im KOSIMA-Konzept neue Wege erarbeitet werden, um auch das *Ordnen unter möglichst aktiver Beteiligung der Lernenden* zu gestalten, die Zugänglichkeit für alle Lernenden zu gewährleisten und diese nicht durch zu viel Offenheit zu überfordern. Entwickelt wurden für diesen Zweck eine Vielzahl von Aneignungshandlungen im Spektrum zwischen Selbstfinden und Nachvollziehen (Prediger et al., 2011; teilweise adaptiert von Swan, 2005).

Da der Kernprozess des Ordnens auf Konsolidierung und Schaffung von Kohärenz in der Lernendengruppe zielt (um eine minimale Ausgangsbasis an Kompetenzen zu schaffen), würde eine Differenzierung nach Zugangsweisen oder Anspruchsniveaus eine äußere Trennung der Lernenden nötig machen. Es lassen sich aber Differenzierungen nach Lerntempo durch zusätzliche Pufferaufgaben und nach Lernzielen vornehmen. Dazu gilt es zu spezifizieren, welche Wissensbestände *allen* Lernenden nachhaltig zur Verfügung stehen sollen und welche nur für einzelne im Horizont liegen. Nachhaltiges konzeptuelles Wissen, das insbesondere die Vorstellungen und Darstellungen umfasst, muss jeweils für alle Niveaus gesichert werden, dagegen ist ausdifferenziertes Abgrenzungswissen (wann kann ich statt diesem Verfahren günstiger ein anderes anwenden?) und weitgreifende Vernetzungen (der Satz ist unter Berücksichtigung der Nebenbedingung x ein Spezialfall von y) eher für die Stärkeren zu konsolidieren. Im Kernbereich der zentralen Wissensfacetten dagegen wird explizit nicht für verschiedene Lernende differenziert.

Die notwendige Anpassung der Aneignungshandlung an die jeweilige Wissensfacette soll durch das Beispiel in Abbildung 6 verdeutlicht werden. Gesichert werden in dieser Aufgabe die mathematischen Begriffe „senkrecht" und „parallel", die zuvor erarbeitet wurden entlang der Kernfrage, wie man einen Quader aus Papier basteln kann, ohne dass dieser schief aussieht. „Senkrecht" und „parallel“ sind in diesem Kontext wichtige Qualitätskriterien an die Faltkanten. An diese Erfahrung wird im Vortext der abgedruckten Aufgabe angeknüpft. Dabei werden die *Namen* der Begriffe „senkrecht“ und „parallel“ hier ohne Aneignungshandlung einfach genannt, denn Bezeichnungen können nicht aktiv erarbeitet werden. Ihre *Bedeutung* dagegen wird in den nächsten Teilaufgaben unter aktiver Beteiligung der Lernenden konsolidiert. Teilaufgabe a) thematisiert die Wissensfacette der Konkretisierung, indem Beispiele und Gegenbeispiele identifiziert werden müssen. In Teilaufgabe b) werden Charakterisierungen angeboten, die nach Richtigkeit beurteilt werden müssen, schließlich wird in c) eine davon ausgewählt als Definition (Wissensfacette explizite Formulierung).



Schiefe und gerade Verpackungen

Beim genauen Basteln dürfen die Ecken und Kanten im Rechteck nicht schief sein.

Damit die Verpackung möglichst gut aussieht, sollten die Faltkanten
im Bastelbogen wie beim Rechteck verlaufen. Davon spricht auch Merve.
In den Ecken sollen die Kanten *senkrecht* **zueinander sein.**
Gegenüberliegende Kanten sollen *parallel* zueinander sein.

a) **Welche der folgenden Bilder zeigen Linien, die senkrecht zueinander stehen?**
Wo liegen die Linien parallel? In welchen Bildern trifft keines von beidem zu?

b) **Welche der Aussagen stimmen für parallele Linien, welche für senkrechte Linien?**
(1) Die Linien haben überall denselben Abstand zueinander.
(2) Eine Linie kann man entlang der anderen auf sich selbst falten.
(3) Die Linien dürfen nicht schräg über das Blatt verlaufen.
(4) Man kann rechte Winkel zwischen die beiden Linien legen.
(5) Eine der beiden Linien muss waagerecht sein.
(6) Die beiden Linien schneiden sich nie.
(7) Beide Linien stehen zu einer dritten Linie senkrecht.

Übrigens: So kann man den rechten Winkel zwischen zwei senkrechten Linien kennzeichnen.

c) **Mit welchen zwei Aussagen aus** b) **kann man am besten beschreiben, wann zwei Linien senkrecht sind? Welche zwei Aussagen beschreiben parallele Linien am besten.**

© mathewerkstatt 5, Cornelsen, Berlin

Abb. 6: Beispiel einer Ordnen-Aufgabe (aus Barzel, Glade, Prediger & Schmidt, 2011a)

Durch jeweils einige leicht auszuschließende Wahloptionen ist in beiden Teilaufgaben a) und b) die Zugänglichkeit gewährt, denn alle Lernenden können in die Aufgabe einsteigen. Gleichwohl sind zur Sicherung negativen Wissens über typische Fehlvorstellungen (viele Lernende sehen (4) nicht als senkrecht an) auch schwerer zu entscheidende Beispiele dabei.

Bezüglich der Aneignungshandlungen wurde in dieser Aufgabe ein mittleres Niveau gewählt, und zwar in dem Grad der aktiven Beteiligung der Lernenden. Deutlich schwieriger wäre es, selbständig geeignete Formulierungen zu finden, deutlich leichter wäre es, nur zuzuordnen, welche Definition zu parallel gehört. Differenzierung im Zuge der Aneignungshandlungen im Kernprozess des Ordnens kann also darin liegen, den Grad der aktiven Beteiligung zu erhöhen oder zu verringern. Damit erfolgt auf Aufgabenebene eine Differenzierung nach Anspruchsniveau, aber nur begrenzt der Lernziele.

Zusätzlich kann durch die Wahl geeigneter Methoden der Grad der Lehrersteuerung weiter nach den Lernvoraussetzungen der Schülerinnen und Schüler variiert werden: In stärkeren Gruppen wird man den Austausch im Aufgabenteil d) in selbst moderierten Kleingruppen erfolgen lassen, in schwächeren im Klassengespräch (Prediger et al., 2011).

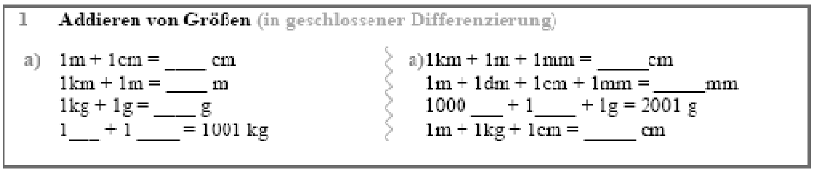
2.5 Differenzieren beim Vertiefen

Der Kernprozess des Vertiefens umfasst alle Lernsituationen, in denen nicht mehr die Konstruktion mathematischer Begriffe, das (Nach)erschaffen von Mathematik im Vordergrund steht, sondern die Absicherung, dass das erworbene Wissen flexibel und nachhaltig verfügbar bleibt. Zum Vertiefen gehört also zweierlei: Das Konsolidieren der erworbenen Kompetenzen (prozedurales und konzeptuelles Wissen, Vorstellungen, Fähigkeiten, usw.) und das Flexibilisieren von Wissensbeständen, also im Wesentlichen die Fähigkeit des Transfers auf verwandte Situationen (Aebli, 1983; Renkl, 2000). Insbesondere bedeutet das auch, dass das Wissen vom Erfahrungskontext unabhängig gemacht werden muss: Brüche kann man beispielsweise nicht nur bei Pizzen und Schokolade anwenden. Dies ist nicht nur im Sinne der Flexibilität der Fähigkeiten (Spiro & Jehng, 1990), sondern auch für den Aufbau eines angemessenen Mathematikbildes wichtig (Mähler & Stern, 2006).

Zur Gestaltung von Übephasen findet man eine große Zahl theoretischer Konzepte sowohl in der allgemeinen Didaktik (z.B. Heymann, 2005; Paradies & Linser, 2001) als auch in der Instruktionspsychologie (z.B. Schneider, 1985; Brophy, 2000; van Merriënboer, Clark & de Croock, 2002). Die pädagogische Psychologie hat viel zum Grundverständnis der Wirksamkeit des Übens (oder „Trainings“) beigetragen, wie z.B. Prinzipien des Überlernens von Fertigkeiten (z.B. Driskell, Willis & Cooper, 1992) oder der zeitlichen und inhaltlichen Verteilung von Üben (Donovan & Radosevich, 1999), die Anforderungen der Transparenz der Übeziele (van Lehn, 1990) oder die ausbalancierte Berücksichtigung verschiedener Facetten der Übeziele, wie die Ausbildung von Automatisierungsroutinen, die Transfersteigerung und im weitesten Sinne die Qualitätssteigerung des erworbenen Wissens (Renkl, 2000). Deutlich ist allerdings, dass die empirische Forschung weit überwiegend die Wirkungen eher kurzfristiger Trainings im Blick hat und bezüglich fachspezifischer und vor allem curricular über mehrere Jahre reichender Vertiefungsprozesse bislang wenig grundlegende Forschung vorliegt. Insbesondere betont Lipowsky (2009) den Mangel an Studien, die Wirkungen „auf schulrelevantes Wissen und schulbezogene Fähigkeiten explizit untersuchen" (S. 92).

Die Übekonzepte und -prinzipien der allgemeinen Didaktik und pädagogischen Psychologie sind von der deutschen Mathematikdidaktik immer wieder aufgenommen und fachspezifisch konkretisiert worden (Winter, 1984; Wittmann, 1992; Leuders, 2005, 2009) und haben in der Theorie (und zunehmend auch in der Unterrichtspraxis) zu einem breiten Übeverständnis unter der Bezeichnung des „produktiven Übens" bzw. des „intelligenten Übens" beigetragen. Diese Übekonzepte sind ausgesprochen fachspezifischer Natur – wiewohl in Teilen übertragbar – und manifestieren sich vor allem in charakteristischen Aufgabenformaten.

Differenzieren durch Aufgaben: Zentrale Anforderung an ein intelligentes Üben ist die Effektivität hinsichtlich der gesetzten Übeziele, d.h. dass die Übezeit auf bestmöglich lernwirksame Weise verwendet wird. Dies setzt eine gewisse Adaptivität voraus und führt direkt auf die Frage nach dem Differenzierungsvermögen. Die fachspezifischen Herausforderungen liegen in der wohldosierten Differenzierung nach Lernzielen: Welches sind die Fähigkeiten, die alle Lernenden üben müssen, welche Ebenen des Übens können darüber hinaus erreicht werden (z.B. das Erkennen vertiefter begrifflicher Zusammenhänge oder das kreative Weiterdenken in Mustern und Strukturen)? Dies soll an konkreten Beispielen zu geschlossenen und selbstdifferenzierenden Übeformaten erläutert werden.



1 **Addieren von Größen** (in geschlossener Differenzierung)

a) 1m + 1cm = ____ cm
1km + 1m = ____ m
1kg + 1g = ____ g
1___ + 1 ____ = 1001 kg

a) 1km + 1m + 1mm = _____cm
1m + 1dm + 1cm + 1mm = _____mm
1000 ___ + 1____ + 1g = 2001 g
1m + 1kg + 1cm = _____ cm

Abb. 7: Geschlossene differenzierte Übungsaufgaben (aus Barzel & Leuders, in Vorb. für 2012)

Geschlossene Übeformate wie das Beispiel in Abbildung 7 erlauben im Rahmen individualisierender Übephasen die Loslösung von Gleichschritt hinsichtlich aller relevanter Aspekte (Lerntempo, Zugangsweise, Anspruchsniveau, Lerninhalt). Deswegen gehören zu Recht Wahlaufgaben oder im

Niveau gestufte Aufgabensets zu den Standard-Differenzierungsansätzen vieler Lehrkräfte.

Aus fachdidaktischer Sicht ist es zentral, bei geschlossener Differenzierung durch Aufgaben diese nicht nur hinsichtlich der technischen Kompliziertheit auszuschöpfen (also z.B. durch größere Zahlen oder kompliziertere Terme o.ä.), sondern durch alle zur Verfügung stehenden schwierigkeitsgenerierenden Merkmale (Hußmann & Prediger, 2007; Leuders, 2009): *Art der kognitiven Aktivitäten* (z.B. Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten nach dem operativen Prinzip, Explorieren, Formulieren, Verallgemeinern, Begründen), *Komplexitätsgrad* (Wie übersichtlich ist die Situation und wie vielschrittig der Lösungsweg?), *sprachliche Komplexität der Aufgabenstellung* (Welche Hürden im Textverständnis müssen überwunden werden?), *Grad der Formalisierung der Aufgabenstellung und geforderten Lösung* (Erfordert die Aufgabe formale Schreibweisen? Wie vertraut sind diese?), *Vorstrukturiertheit der Lösung versus Offenheit* (Inwieweit ist durch die Enge der Aufgabenstellung bereits alle Vorstrukturierungsarbeit geleistet?) und *Bekanntheitsgrad der Mittel* (abhängig von Positionierung im Lernprozess).

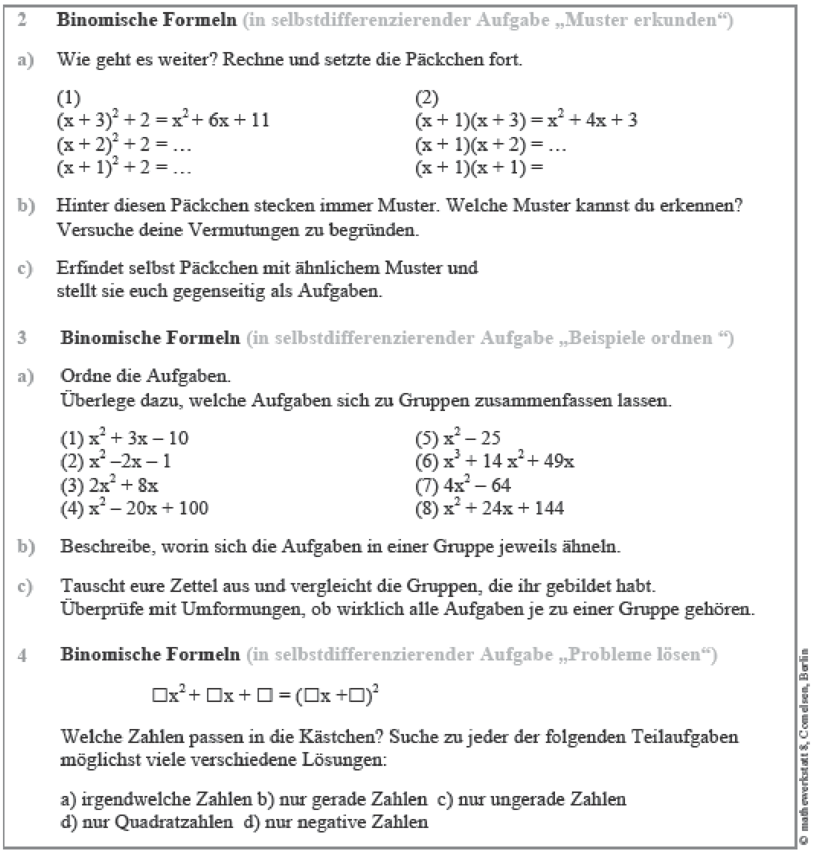
Im Beispiel aus Abbildung 7 findet man beispielsweise das Angebot verschiedener Komplexitäts- und Kompliziertheitsgrade. Beide Spalten enthalten im Sinne der operativen Durcharbeitung Rückwärtsaufgaben (1___ + 1 ___ = 1001 kg bzw. 1000 ___ + 1___ + 1g = 2001 g), während eine unlösbare „Störaufgabe", die zur erhöhten Reflexion zwingt, nur der rechten Spalte vorbehalten ist (1m + 1kg + 1cm = ___ cm).

Insgesamt allerdings stellen rein geschlossen differenzierte Übungsphasen die Lehrperson vor die diagnostische Herausforderung, die für die jeweilige Lernendengruppe geeignete Auswahl zu finden. Diesem Ansatz sind also Grenzen durch die diagnostischen Möglichkeiten und die Unterrichtsökonomie gesetzt. Setzt man die geschlosseneren Formate hingegen pragmatisch „im Gleichschritt" für die ganze Klasse ein – und dies entspricht der gängigen Unterrichtspraxis –, sind viele Lernende über- oder unterfordert.

Selbstdifferenzierende Übeformate wie die Beispielaufgaben in Abbildung 8 legen die Lernenden nicht auf ein Bearbeitungsniveau fest, sondern lassen verschiedene Bearbeitungstiefen und Reflexionsniveaus zu. Oft erlauben sie auch deutlich weitergehende kreative Bearbeitungsmöglichkeiten und sind so offen auch für die Förderung begabter Schülerinnen und Schüler.

Einige immer wiederkehrende Aufgabenformate entstehen dadurch, dass Automatisierungsprozesse und Prozesse der operativen Durcharbeitung (Aebli, 1993) verbunden werden mit mathematischen Tätigkeitstypen (Muster finden, Strukturieren, Problemlösen). Die entstehenden Aufgabentypen (Wittmann, 1992; Leuders, 2009) sind so konstruiert, dass sie zunächst allen Lernenden einen leichten Einstieg und Gelegenheit für das Üben von Grundfertigkeiten bieten: In solchen Aufgabentypen, die etwa der Aufgabe 2 in Abbildung 8 entsprechen, kann jeder Lernende zunächst die Aufgabenfolge abarbeiten und dann je nach Reflexionsniveau die entstehenden Muster analysieren. In Aufgabe 3 werden Lernende aufgefordert, vor der Bearbeitung erst einmal subjektiv leicht empfundene Aufgabentypen zu identifizieren, wodurch das Üben um eine reflektive Kompetente ergänzt wird. Im einfachsten Fall ist diese Schwierigkeitsreflexion eine intuitive, bei stärkeren Lernern kann sie das Erkennen von hilfreichen Mustern fördern. In Aufgabe 4 schließlich wird das Üben in eine einfache Problemlöseaufgabe eingebettet, die durch Probieren allen Lernenden einen Zugang erlaubt. Stärkere werden angeregt, das Problem systematisch für alle Fälle anzugehen. Übungsaufgaben dieses Typs lassen sich durch Lehrkräfte mit etwas Routine in großer Zahl und für alle Inhaltsgebiete selbst herstellen (Leuders, 2006, 2009).

Die Beispiele zeigen den Vorzug selbstdifferenzierter Übeformate: Neben der Offenheit für die Bearbeitung auf verschiedenen Niveaustufen puffern sie die Bearbeitung auch zeitlich, bieten stärkeren Lernenden vertiefte Verstehensoptionen an, ohne sie im Lernprozess zu weit vorauseilen zu lassen und fördern schließlich bei allen Lernenden prozessbezogene Kompetenzen. Diese Beispiele und Überlegungen verdeutlichen, wie sehr solche Differenzierungsansätze mit fachspezifischen Konzepten verwoben sind und was mit der bereits zitierten „Offenheit vom Fach“ (Wittmann, 1996) gemeint ist.



2 **Binomische Formeln** (in selbstdifferenzierender Aufgabe „Muster erkunden“)

a) Wie geht es weiter? Rechne und setzte die Päckchen fort.

(1)	(2)
$(x + 3)^2 + 2 = x^2 + 6x + 11$	$(x + 1)(x + 3) = x^2 + 4x + 3$
$(x + 2)^2 + 2 = \ldots$	$(x + 1)(x + 2) = \ldots$
$(x + 1)^2 + 2 = \ldots$	$(x + 1)(x + 1) =$

b) Hinter diesen Päckchen stecken immer Muster. Welche Muster kannst du erkennen? Versuche deine Vermutungen zu begründen.

c) Erfindet selbst Päckchen mit ähnlichem Muster und stellt sie euch gegenseitig als Aufgaben.

3 **Binomische Formeln** (in selbstdifferenzierender Aufgabe „Beispiele ordnen “)

a) Ordne die Aufgaben.
Überlege dazu, welche Aufgaben sich zu Gruppen zusammenfassen lassen.

(1) $x^2 + 3x - 10$
(2) $x^2 -2x - 1$
(3) $2x^2 + 8x$
(4) $x^2 - 20x + 100$
(5) $x^2 - 25$
(6) $x^3 + 14 x^2 + 49x$
(7) $4x^2 - 64$
(8) $x^2 + 24x + 144$

b) Beschreibe, worin sich die Aufgaben in einer Gruppe jeweils ähneln.

c) Tauscht eure Zettel aus und vergleicht die Gruppen, die ihr gebildet habt.
Überprüfe mit Umformungen, ob wirklich alle Aufgaben je zu einer Gruppe gehören.

4 **Binomische Formeln** (in selbstdifferenzierender Aufgabe „Probleme lösen“)

$$\square x^2 + \square x + \square = (\square x + \square)^2$$

Welche Zahlen passen in die Kästchen? Suche zu jeder der folgenden Teilaufgaben möglichst viele verschiedene Lösungen:

a) irgendwelche Zahlen b) nur gerade Zahlen c) nur ungerade Zahlen
d) nur Quadratzahlen d) nur negative Zahlen

© mathewerkstatt 8, Cornelsen, Berlin

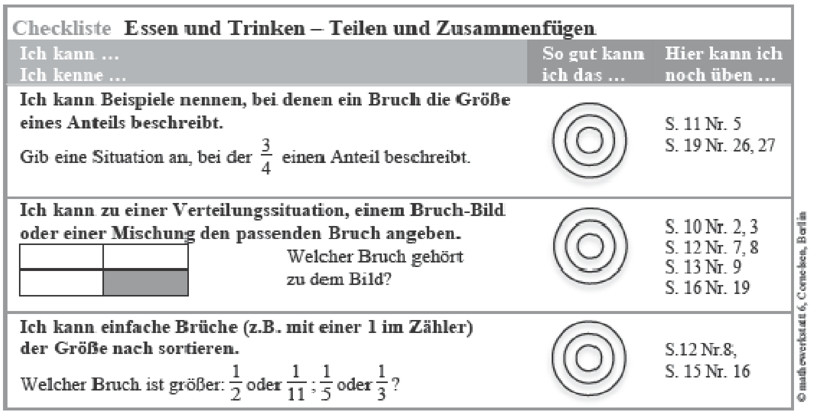
Abb. 8: Geschlossene und selbstdifferenzierende Übungsaufgaben (nach Leuders, Marxer & Rülander, i. Vorb.)

Die Adaptivität solcher Aufgabenformate ist in der Fachdidaktik auf der Seite der Konstruktionsprinzipien ausführlich beschrieben und ein sinnvoller Einsatz in der Praxis wird aus vielen Modellprojekten berichtet, weil sie den Umgang mit einer großen Niveaustreuung innerhalb einer Klasse ermöglichen (Wittmann, 1995; Hengartner et al., 2006; Krauthausen & Scherer, 2010). Eine empirische Prüfung der Chancen und Grenzen der tatsächlichen Adaptivität selbstdifferenzierender Aufgaben im Sinne einer Niveauangemessenheit für die einzelnen Lernenden ist bislang allerdings nur in einer Fallstudie erfolgt (Prediger & Scherres, 2011). Diese Fallstudie zeigt, dass selbstdifferenzierende Aufgabenformate keineswegs „automatisch differenzierend“ sind, sondern einer geeigneten methodischen Stützung durch die Lehrkraft und Gewöhnung der Lernenden bedürfen. Die ersten explorativen Analysen zu Kontextbedingungen (Kooperation, Metakognitionen, Selbstregulation, Interventionen) bedürfen in Zukunft weiterer vertiefender Forschung.

Eine weitere Grenze der Differenzierung durch selbstdifferenzierende Aufgaben wird deutlich bei vertieftem Förderbedarf: Wenn eine Lerngruppe noch substantiell am Grundverständnis der Inhalte arbeiten muss, während andere bereits problemlösend und abstrahierend mit diesen Inhalten umgehen können, ist dies nicht auf der Aufgabenebene alleine zu lösen, dann sind spezifische Förderprogramme notwendig, die durch geeignete Unterrichtsstrukturen verankert sein müssen.

Differenzieren durch Strukturen: Über die Differenzierung mit Aufgaben hinaus haben sich gerade im Kernprozess des Vertiefens auch geeignete *Unterrichtsstrukturen* bewährt, die die Eigenverantwortlichkeit des Lernens stützen (Bönsch, 2004; Barzel, Büchter & Leuders, 2007; Prediger et al., 2006). Übergibt man z.B. den Lernenden etwas Eigenverantwortung bei der Auswahl geschlossen differenzierter Aufgaben, so können sie (trotz verbindlicher Anforderungsniveaus innerhalb der Aufgaben) in die Verantwortung für die Adaptivität einbezogen werden. Allerdings sind Arbeitsaufträge wie „Bearbeite so viele Aufgaben wie du brauchst, um sicher Dezimalzahlen der Größe nach ordnen zu können“, ohne eine *Zielorientierung* (Köller & Schiefele, 2010; Bruder & Reibold, i. d. Bd.), für einige Lernende nur schwer erfüllbar, weil sich viele Lernende unter- oder überfordern.

Eine in vielen Unterrichtsversuchen bewährte Struktur zur Ermöglichung von Transparenz und Zielorientierung bieten die sogenannten Checklisten (z.B. Prediger, 2007).



Checkliste **Essen und Trinken – Teilen und Zusammenfügen**

Ich kann … **Ich kenne …**	**So gut kann ich das …**	**Hier kann ich noch üben …**
Ich kann Beispiele nennen, bei denen ein Bruch die Größe eines Anteils beschreibt. Gib eine Situation an, bei der $\frac{3}{4}$ einen Anteil beschreibt.	◎	S. 11 Nr. 5 S. 19 Nr. 26, 27
Ich kann zu einer Verteilungssituation, einem Bruch-Bild oder einer Mischung den passenden Bruch angeben. Welcher Bruch gehört zu dem Bild?	◎	S. 10 Nr. 2, 3 S. 12 Nr. 7, 8 S. 13 Nr. 9 S. 16 Nr. 19
Ich kann einfache Brüche (z.B. mit einer 1 im Zähler) der Größe nach sortieren. Welcher Bruch ist größer: $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{11}$; $\frac{1}{5}$ oder $\frac{1}{3}$?	◎	S.12 Nr.8, S. 15 Nr. 16

© mathewerkstatt 6, Cornelsen, Berlin

Abb. 9: Auszug einer Checkliste (aus Barzel et al., 2012a)

Abbildung 9 zeigt an einem Beispiel, wie sie für Lernende und Lehrende die Lernziele einer Unterrichtseinheit transparent darstellen in Form von Kompetenzen, illustrierenden Aufgaben, einer Möglichkeit zur Selbsteinschätzung sowie einem Angebot von passenden Übungsaufgaben.

Dies geschieht nicht im Sinne eines programmierten Übens, sondern soll dem Üben eine gewisse Flexibilität und Transparenz verleihen und eine Selbststeuerung der Lernenden ermöglichen, die Autonomieerfahrungen beim Üben erhöhen (Deci & Ryan, 1993). Allerdings benötigen Lernende – vor allem schwächere – eine geduldige Anleitung in der Nutzung eines solchen Instrumentes, wenn es tatsächlich differenzierende Wirkung zeigen soll.

Die fachdidaktische Qualitätsanforderung an solche Checklisten bezieht sich, ähnlich wie im Ordnen, auf die Wissensfacetten, die dort explizit vermerkt sind: Diese sollten nicht nur das Ausführen von Verfahren umfassen, sondern auch Vorstellungen, Darstellungen, Strategien usw.

3 Fazit

In diesem Beitrag wurde aufgezeigt, wie Ansätze des Differenzierens entlang verschiedener „Achsen“ oder „Dimensionen“ eingeordnet werden können:

- Differenzierungsansätze lassen sich nach fachübergreifenden Strategien, wie dem offenen oder geschlossenen Differenzieren, oder der Differenzierung nach Lerntempo, Lerninhalt, Zugangsweisen oder Anspruchsniveau einordnen. Sie werden auf der Ebene von Methoden, Strukturen oder Aufgaben angesiedelt. Für ein ganzheitliches Unterrichtskonzept

sollte ein breites Repertoire ausgeschöpft werden, weil kein einzelner Ansatz alle Qualitätsanforderungen zugleich erfüllen kann.
- Die konkrete Umsetzung von Differenzierungsmaßnahmen, insbesondere auf Ebene der Aufgaben (weniger auf der Ebene der Unterrichtsstruktur) bedarf eines tiefen Verständnisses des fachlichen Gehalts des jeweiligen Gegenstandes.
- Für die Spezifikation konkreter Qualitätsanforderungen an die jeweiligen Differenzierungsmaßnahmen ist es aus fachdidaktischer Sicht wesentlich, nach epistemologisch verschiedenen Lernsituationen zu unterscheiden („Kernprozesse: Anknüpfen, Erkunden, Austauschen, Ordnen, Vertiefen“). Diese Unterscheidung trägt sowohl fachunabhängige als auch fachspezifische Züge.

Eine solche Einordnung von Differenzierungsansätzen hilft sowohl bei der Entwicklung als auch der systematischen empirischen Erforschung von differenzierenden Lernumgebungen im Zusammenspiel von Fachdidaktik, Instruktionspsychologie und Unterrichtsforschung. Hier finden sich noch zahlreiche Herausforderungen in der Aufdeckung und Überprüfung relevanter Prozesse und Wirkungszusammenhänge. Es stellen sich Fragen wie: Welche Lernprozesse finden bei Lernenden in differenzierenden Lernumgebungen tatsächlich statt? Wie nutzen sie die Lernangebote? Welches sind Gelingensbedingungen und typische problematische Konstellationen?

Die Beispiele haben deutlich gemacht, dass solche Fragen immer nur in Verbindung allgemeiner Prinzipien des Lehrens und Lernens und fachlicher Konkretisierungen der spezifischen Lerngegenstände in Angriff genommen werden können, weil nur bei fachspezifischer Konkretisierung auch die besonderen Herausforderungen im Hinblick auf den gegenstandsspezifischen fachlichen Gehalt deutlich werden. Gerade in einem solchen Forschungsprogramm liegt eine Chance für ein künftiges Zusammenwachsen von unterschiedlichen Forschungstraditionen in Theorie und Empirie.

Danksagung

Viele der in diesem Beitrag dargestellten Überlegungen entstammen der gemeinsamen Arbeit im Rahmen des Forschungs- und Entwicklungsprojektes KOSIMA – unterstützt vom Cornelsen Verlag –, in dem wir über viele Jahre hinweg mit Bärbel Barzel und Stephan Hußmann zusammenarbeiten.

Literatur

Aebli, H. (1983). Zwölf Grundformen des Lehrens: eine allgemeine Didaktik auf psychologischer Grundlage. Stuttgart: Klett-Cotta.

Aebli, H. (1993). *Denken: Das Ordnen des Tuns I.* Stuttgart: Klett-Cotta.

Alfieri, L. , Brooks, P.J. , Aldrich, N.J. & Tenenbaum, H. (2011). Does discovery-based instruction enhance learning? *Journal of Educational Psychology, 103(1),* 1–18.

Barzel, B, Glade, M., Prediger, S. & Schmidt, U. (2011a). Verpackungen – Körperformen beschreiben, herstellen, zeichnen. In B. Barzel, S. Hußmann, T. Leuders, S. Prediger (Hrsg.), *Mathewerkstatt 5.* Berlin: Cornelsen.

Barzel, B., Büchter, A. & Leuders, T. (2007). *Mathematik – Methodik: Handbuch für die Sekundarstufe I und II.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (2011b). „Das macht Sinn!“ Sinnstiftung mit Kontexten und Kernideen. *Praxis der Mathematik in der Schule, 53(37),* 2–9.

Barzel, B., Hußmann, S., Schneider, C. & Streit, C. (2012a). Essen und Trinken – Teilen und Zusammenfügen. In S. Prediger, B. Barzel, S. Hußmann & T. Leuders (Hrsg.), *Mathewerkstatt 6*. Berlin: Cornelsen.

Barzel, B., Prediger, S., Leuders, T. & Hußmann, S. (2011c). Kontexte und Kernprozesse – Ein theoriegeleitetes und praxiserprobtes Schulbuchkonzept. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011*, 71–74.

Barzel, B., Royar, T. & Streit, C. (2012b). Planen und Einkaufen beim Renovieren – Rechnen mit Komma. In S. Prediger, B. Barzel, S. Hußmann & T. Leuders (Hrsg.), *Mathewerkstatt 6*. Berlin: Cornelsen.

Bohl, T. & Kucharz, D. (2010). *Offener Unterricht heute: Konzeptionelle und didaktische Weiterentwicklung.* Weinheim und Basel: Beltz.

Bönsch, M. (2004). *Intelligente Unterrichtskultur*. Baltmannsweiler: Schneider.

Brophy, J. (2000). *Teaching (Educational Practices Series Vol. 1).* Brüssel: International Academy of Education (IAE).

Bruder, R. & Reibold, J. (i. d. Bd.). Erfahrungen mit Elementen offener Differenzierung im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I im niedersächsischen Modellprojekt MABIKOM.

Brückner, H. (1978). Systematische Festigung des grundlegenden Wissens in den Klassen 5 bis 10. Zur Erarbeitung eines Wissensspeichers in den Klassen 5 bis 7. *Mathematik in der Schule, 16(6),* 310–316.

Büchter, A. & Leuders, T. (2005). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Chi, M.T.H., de Leeuw, N., Chiu, M. & LaVancher, C. (1994). Eliciting self-explanations improves understanding. *Cognitive Science, 18,* 439– 477.

Deci, E. & Ryan, R. (1993). Die Selbstbestimmungstheorie der Motivation und ihre Bedeutung für die Pädagogik. *Zeitschrift für Pädagogik, 39,* 223–238.

Donovan, J.J. & Radosevich, D.J. (1999). A meta-analytic review of the distribution of practice effect. *Journal of Applied Psychology, 84 (5),* 795–805.

Driskell, J.E., Willis, R.P. & Copper, C. (1992). Effect of overlearning on retention. *Journal of Applied Psychology, 77,* 615–622.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe* (Bd. 1). Stuttgart: Klett Verlag.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: Kluwer.

Gallin, P. & Ruf, U. (1998). *Sprache und Mathematik in der Schule.* Seelze: Kallmeyer.

Gerstenmaier, J. & Mandl, H. (1995). Wissenserwerb unter konstruktivistischer Perspektive. *Zeitschrift für Pädagogik, 41(6),* 867–888.

Götze, D. (2007). *Mathematische Gespräche unter Kindern*. Hildesheim: Franzbecker.

Green, K. & Green, N. (2005). *Kooperatives Lernen im Klassenraum und im Kollegium.* Seelze: Kallmeyer.

Grell, J. & Grell, M. (1994): *Unterrichtsrezepte*. Weinheim/Basel: Beltz.

Heinze, A., Star, J.R. & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM International Journal on Mathematics Education ,41*, 535–540.

Helmke, A. (2010). *Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität: Diagnose, Evaluation und Verbesserung des Unterrichts.* Seelze: Klett-Kallmeyer.

Hengartner, E., Hirt, U., Wälti, B. & Primarschulteam Lupsingen (2006). *Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte.* Zürich: Verlag Klett und Balmer.

Heymann, H.W. (1991). Innere Differenzierung im Mathematikunterricht. *Mathematik lehren, 49,* 63–66.

Heymann, H.W. (2005). Was macht Üben „intelligent“? *Pädagogik, 57(11),* 6–10.

Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K.B., Hollingsworth, H., Jacobs, J. K., Wearne, D., Smith, M., Kersting, N. & Stigler, J. (2003). *Teaching Mathematics in seven countries: Results from the TIMSS 1999 Video Study.* Washington, DC: U.S. Department of Education.

Holzäpfel, L., Leuders, T., Marxer, M. (2012). Fläche und Volumen – Lebensraum Zoo. In B. Barzel, S. Hußmann, T. Leuders & S. Prediger (Hrsg.), *Mathewerkstatt 5*. Berlin: Cornelsen.

Hußmann, S. (2002). *Konstruktivistisches Lernen an intentionalen Problemen: Mathematik unterrichten in einer offenen Lernumgebung.* Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Hußmann, S. & Leuders, T. (2011). Das Gleiche woanders. Eine sinnstiftende Annäherung an den Symmetriebegriff. *Praxis der Mathematik in der Schule (PM), 53 (37),* 10–18.

Hußmann, S. & Prediger, S. (2007). Mit Unterschieden rechnen. Differenzieren und Individualisieren. *Praxis der Mathematik in der Schule, 49(17),*1–8.

Hußmann, S., Leuders, T., Barzel, B. & Prediger, S. (2011). Kontexte für sinnstiftendes Mathematiklernen (KOSIMA) – ein fachdidaktisches Forschungs- und Entwicklungsprojekt, *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 419–422.

Klafki, W. (1976). Innere Differenzierung des Unterrichts. *Zeitschrift für Pädagogik, 22,* 497–523.

Klieme, E., Lipowsky, F., Rakoczy, K. & Ratzka, N. (2006). Qualitätsdimensionen und Wirksamkeit von Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und ausgewählte Ergebnisse des Projekts »Pythagoras«. In M. Prenzel & L. Allolio-Näcke (Hrsg.), *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule* (S.127–146). Münster: Waxmann.

Koedinger, K. & Corbett, A. (2006). Cognitive Tutors: Technology bringing learning sciences to the classroom. In R.K. Sawyer (Hrsg.), *The Cambridge handbook of the learning sciences* (S. 61–77). New York, NY: Cambridge University Press.

Köller, O. & Schiefele, U. (2006). Zielorientierung. In D.H. Rost (Hrsg.), *Handwörterbuch Pädagogische Psychologie* (S. 880–886). Weinheim: Psychologie Verlags Union.

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2010). *Umgang mit Heterogenität. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht der Grundschule. Handreichung des Programms SINUS an Grundschulen.* Kiel: IPN.

Krippner, W. (1992). *Mathematik differenziert unterrichten.* Hannover: Schroedel.

Leiß, D. (2007). *„Hilf mir es selbst zu tun“: Lehrerinterventionen beim mathematischen Modellieren*. Hildesheim: Franzbecker.

Lengnink, K., Prediger, S. & Weber, C. (2011). Lernende abholen, wo sie stehen – Individuelle Vorstellungen aktivieren und nutzen. *Praxis der Mathematik in der Schule, 53(40),* 2–7.

Leuders, T. (2003). Prozessorientierter Mathematikunterricht. In T. Leuders (Hrsg.), *Mathematikdidaktik. Ein Praxishandbuch für die Sekundarstufe I & II* (S. 265–291). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Leuders, T. (2005). Intelligentes Üben selbst gestalten! - Erfahrungen aus dem Mathematikunterricht. *Pädagogik, 11*, 29–32.

Leuders, T. (2005).Was macht Üben "intelligent"? *Pädagogik, 57 (11),* 6–9.

Leuders, T. (2006). Reflektierendes Üben mit Plantagenaufgaben. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht (MNU), 59(5),* 276–284.

Leuders, T. (2009). Intelligent üben und Mathematik erleben. In T. Leuders, L. Hefendehl-Hebeker &. H.-G. Weigand (Hrsg.), *Mathemagische Momente* (S. 130–143). Berlin: Cornelsen.

Leuders, T. & Holzäpfel, L. (2011). Kognitive Aktivierung im Mathematikunterricht. *Unterrichtswissenschaft, 39,* S.213-230.

Leuders, T., Marxer, M. & Rülander, N. (i. Vorb. für 2014). Rechenkünstler und Zahlenzauberer – Mit Termen Rechnungen vereinfachen und durchschauen (Arbeitstitel). In S. Hußmann, T. Leuders, S. Prediger & B. Barzel (Hrsg.). *Mathewerkstatt 8*. Berlin: Cornelsen.

Lipowsky, F. (2009). Unterricht. In E. Wild & J. Möller (Hrsg.), *Pädagogische Psychologie* (S. 73–101). Berlin: Springer.

Lipowsky, F., Rakoczy, K. Pauli, C., Drollinger-Vetter, B., Klieme, E. & Reusser, K. (2009). Quality of geometry instruction and its short-term impact on students' understanding of the Pythagorean Theorem. *Learning and Instruction, 19 (6),* 527–537.

Lipowsky, F. (1999). Methodik der Vielfalt: Didaktik der Einfalt? Für die qualitative Weiterentwicklung offener Lernsituationen. *Die Grundschule, 31(7/8),* 49–54.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics.* Mahwah, NJ: Erlbaum.

Mähler, C. & Stern, E. (2006). Transfer. In D. Rost (Hrsg.),*Handwörterbuch Pädagogische Psychologie* (S. 782–793). Beltz: Weinheim.

Mandl, H. & Friedrich, H.F. (2006). *Handbuch Lernstrategien*. Göttingen: Hogrefe.

Meyer, H. (2004). *Was ist guter Unterricht?* Frankfurt a.M.: Cornelsen Scriptor.

Niggli, A. & Kersten, B. (1999). Lehrerverhalten und Wochenplanunterricht. Wirkungen auf Mathematikleistungen und nicht-kognitive Merkmale von Lernenden. *Bildungsforschung und Bildungspraxis, 21 (3),* 272–291.

Paradies, L. & Linser, H.J. (2001). *Differenzieren im Unterricht.* Berlin: Cornelsen Verlag.

Prediger, S. (2009). Quader bauen aus 24 Würfeln – Kinder auf dem Weg zur Volumenformel. *MNU Primar,1(1),* 8–12.

Prediger, S. & Scherres, C. (2011). *Niveauangemessenheit von Arbeitsprozessen in selbstdifferenzierenden Lernumgebungen: Qualitative Fallstudie am Beispiel der Suche aller Würfelnetze. Z*ur Publikation eingereichtes Manuskript).

Prediger, S., Barzel, B., Leuders, T., Hußmann, S. (2011). Systematisieren und Sichern. Nachhaltiges Lernen durch aktives Ordnen. *Mathematik lehren, 164,* 2–9.

Prediger, S., Bialek, S., Fernholz, J., Heckmann, L., Kraatz-Röper, A. & Vernay, R. (2006). *Eigenverantwortliches Lernen auf vielfältigen Wegen: Umgang mit Heterogenität im Mathematikunterricht: Endbericht des Schulbegleitforschungsprojekts 165.* Bremen: Landesinstitut für Schule.

Prenzel, M. (1988). *Die Wirkungsweise von Interesse*. Opladen: Westdeutscher Verlag.

Rakoczy, K., Klieme, E. Lipowsky, F. & Drollinger-Vetter, B. (2010). Strukturierung, kognitive Aktivität und Leistungsentwicklung im Mathematikunterricht. *Unterrichtswissenschaft, 38 (3),* 229–246.

Reinmann-Rothmeier, G. & Mandl, H. (2001). Unterrichten und Lernumgebungen gestalten. In A. Krapp & B. Weidenmann (Hrsg.), *Pädagogische Psychologie* (S. 601–646). Weinheim: Beltz.

Renkl, A (2000). Automatisierung allein reicht nicht aus: Üben aus kognitionspsychologischer Perspektive. *Friedrich Jahresheft, Üben und Wiederholen*, 16–19.

Renkl, A., Schworm, S., & Hilbert, T.S. (2004). Lernen aus Lösungsbeispielen: Eine effektive, aber kaum genutzte Möglichkeit, Unterricht zu gestalten. In J. Doll & M. Prenzel (Hrsg.), *Bildungsqualität von Schule* (S. 77–92). Münster: Waxmann.

Reusser, K. (2005). Problemorientiertes Lernen. *Beiträge zur Lehrerbildung*, *23 (2)*, 159–182.

Roth, H. (1976). *Pädagogische Psychologie des Lehrens und Lernens*. Hannover: Beltz,.

Schneider, W. (1985).Toward a model of attention and the development of automatic processing. In M.I. Posner (Hrsg.), *Attention and performance* (S. 475–492). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Seidel, T. & Shavelson, R.J. (2007).Teaching Effectiveness Research in the Past Decade: The Role of Theory and Research Design in Disentangling Meta-Analysis Results. *Review of Educational Research*, *77(4)*, 454–499.

Spiro, R.J. & Jehng, J.C. (1990). Cognitive flexibility and hypertext: Theory and technology for the non-linear and mulit-dimensional traversal of complex subject matter. In D. Nix & R.J. Spiro (Hrsg.), *Cognition, education, and multimedia: Exploration in high technology* (S. 163–205). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Stern, E. & Schumacher, R. (2004). Intelligentes Wissen als Lernziel. *Universitas*, *59 (2)*, 121–134.

Stigler, J. & Hiebert, J. (1999).*The teaching gap. Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom.* New York: Free Press.

Sundermann, B. (1999). Rechentagebücher und Rechenkonferenzen. *Grundschule*, *1*,48–50.

Swan, M. (2005). *Standards Unit. Improving learning in Mathematics: challenges and strategies.* Nottingham: University of Nottingham.

Sweller, J. (1994). Cognitive load theory, learning difficulty, and instructional design. *Learning and Instruction*, *4*, 295–312.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2001). Realistic mathematics education in the Netherlands. In J. Anghileri (Hrsg.), *Principles and practices in arithmetic teaching. Innovative approaches for primary classroom* (S. 49–63). Buckingham: Open University Press.

Van Merriënboer, J.J.G., Clark, R.B. & de Croock, M.B. (2002). Blueprints for complex learning: The 4C/ID-model. *Research and Development*, *50 (2)*, 39–64.

Van Lehn, K. (1990). *Mind Bugs: The origins of procedural misconceptions*. Cambridge, Mass.: MIT Press.

Von Glasersfeld, E. (1991). *Radical constructivism in mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.

Wagenschein, M. (1968). *Verstehen lehren: Genetisch – Sokratisch – Exemplarisch.* Weinheim: Beltz.

Weinert, F.E. (1997). Lerntheorien und Instruktionsmodelle. In F.E. Weinert (Hrsg.), *Psychologie des Unterrichts und der Schule. Enzyklopädie der Psychologie. Pädagogische Psychologie* (Vol. 2, S. 1–48). Göttingen: Hogrefe.

Winter, H. (1984). Begriff und Bedeutung des Übens im Mathematikunterricht. *Mathematik lehren, 2*, 4–16.

Winter, H. (1996). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der DMV 2*, 35–41.

Wittmann, E.Ch. (1992). Wider die Flut der bunten Hunde und der grauen Päckchen: Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und produktiven Übens. In G. N. Müller & E.Ch. Wittmann (Hrsg.), *Handbuch produktiver Rechenübungen* (S. 152–166). Stuttgart: Klett.

Wittmann, E.Ch. (1995). Aktiv-entdeckendes und soziales Lernen im Rechenunterricht – vom Kind und vom Fach aus. In G.N. Müller & E.Ch. Wittmann (Hrsg.), *Mit Kindern rechnen* (S. 10 – 41). Frankfurt a.M.: Arbeitskreis Grundschule.

Wittmann, E.Ch. (1996). Offener Mathematikunterricht in der Grundschule – vom FACH aus. *Grundschulunterricht*, *6*, 3–7.

Wittmann, E.Ch. & Müller, G.N. (2004). *Das Zahlenbuch: Mathematik im 4. Schuljahr: Lehrerband*. Leipzig: Klett Grundschulverlag.

Wittmann, E.Ch. & Müller, G.N. (2008). Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept. In G. Walther, M. van den Heuvel-Panhuizen, D. Granzer & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret*. (S. 42–65). Berlin: Cornelsen.