LAND BRANDENBURG

be Berlin

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht

Gleichungen und Funktionen
Zahlen und Operationen

www.lisum.berlin-brandenburg.de

LISUM
Landesinstitut für Schule und Medien Berlin-Brandenburg

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

In einem kompetenzorientierten Mathematikunterricht hat die pädagogische Diagnose während des Lernprozesses einen hohen Stellenwert. Durch sie können Stärken und Schwächen der Schülerinnen und Schüler erfasst und bestehende Fördernotwendigkeiten im regulären Unterricht ermittelt werden. Besonders wichtig ist es, Fehlvorstellungen bei den Schülerinnen und Schülern zu erkennen, deren Entstehen zu vermeiden bzw. bereits vorhandene nicht tragfähige Vorstellungen zu überwinden. Im Anschluss an die Diagnose ist es Aufgabe der Lehrkräfte, passgenaue Förderschritte zu konzipieren, die sich zumeist auf kleine Gruppen oder auf einzelne Schülerinnen und Schüler beziehen und dabei die individuellen Lernvoraussetzungen, -bedürfnisse, -wege, -ziele und -möglichkeiten berücksichtigen. Die Entwicklung von Materialien zur Diagnose und Förderung ist ein aufwändiger und komplexer Prozess, der nicht immer durch jede Lehrkraft selbst geleistet werden kann. Aus diesem Grund hat das LISUM zum Rahmenlehrplan 1–10 für das Fach Mathematik passfähige Diagnose- und Fördermaterialien entwickelt.

Die vorliegenden Materialien zu den Leitideen „Gleichungen und Funktionen“ und „Zahlen und Operationen“ bestehen jeweils aus drei Teilen:
Der **didaktische Text** (1) gibt einen Überblick über die inhaltlichen und didaktischen Schwerpunkte der jeweiligen Leitidee. In einem inhaltlichen Konzeptbild werden die zu entwickelnden Ideen und deren Vernetzungen als Modell für den Kompetenzerwerb dargestellt. Die dabei verwendeten Farben werden in der Förderkartei (3) zur besseren Orientierung wieder aufgegriffen. Die **Diagnoseaufgaben** (2) sind als Arbeitsbögen für alle Schülerinnen und Schüler im Regelunterricht nutzbar. Sie wurden passend zu den im Rahmenlehrplan 1–10 ausgewiesenen Standards entwickelt und ermöglichen sowohl eine produkt- als auch prozessorientierte Diagnostik, um das *Können* (einzelne Kompetenzen und Vorstellungen), aber auch die *Lernprozesse* der Schülerinnen und Schüler gezielt erfassen zu können. Die Förderschritte sollen passend zur Diagnose aus der **Förderkartei** (3) ausgewählt und individuell oder gruppenbezogen für die Schülerinnen und Schüler zusammengestellt werden. Die Bearbeitung der Förderaufgaben durch die Schülerinnen und Schüler sollte sinnvollerweise im Dialog mit der Lehrkraft erfolgen.

Alle Materialien in diesem Ordner sind auch auf dem Bildungsserver Berlin-Brandenburg in digitalisierter Form unter folgender Adresse bereitgestellt:
https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/rlp-online/c-faecher/mathematik/materialien.

Liebe Kolleginnen und Kollegen,

wir hoffen, dass Sie das vorliegende Material bei der zielgerichteten Diagnose und Förderung Ihrer Schülerinnen und Schüler unterstützt und Sie anregt, entsprechende eigene Materialien zu entwickeln. Diese können beispielsweise für Übungszwecke im Förderprozess oder für eine noch gezieltere Feststellung der mathematischen Kenntnisse und Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler im Unterricht genutzt werden.

In diesem Sinne wünschen wir Ihnen viel Erfolg bei der Arbeit mit unserem Diagnose- und Fördermaterial für den Mathematikunterricht in den Jahrgangsstufen 1–10.

Susanne Wolter

Leiterin der Abteilung
Unterrichtsentwicklung Grundschule,
Sonderpädagogische Förderung und Medien

Renato Albustin

Leiter der Abteilung
Unterrichtsentwicklung Sekundarstufen I und II

Hinweise zur Arbeit mit dem vorliegenden Material

Das Diagnose- und Fördermaterial wurde passend zu den Standards und Inhalten der Leitidee *Gleichungen und Funktionen* aus dem Rahmenlehrplan 1–10 für das Fach Mathematik entwickelt.

In einem **inhaltlichen Konzeptbild** (farbige Grafik, größere Darstellung am Ende des Abschnitts 2) werden die zu entwickelnden Ideen und deren Vernetzungen in der Leitidee *Gleichungen und Funktionen* dargestellt. Es dient den Lehrkräften zur didaktischen Orientierung.

Idee der Variablen als Platzhalter, Unbekannte, Unbestimmte, Veränderliche		Idee der Operationen als Beschreibung von Veränderungen
Idee der Terme	**Idee der Gleichungen**	**Idee der funktionalen Zusammenhänge**
Aufstellen und Interpretieren von Termen	**Aufstellen und Interpretieren von Gleichungen**	**Zuordnungsvorstellung**
Strukturieren und Beschreiben von Mustern und Bildern mit Worten	Aufstellen von Gleichungen zu Bildern und Sachzusammenhängen	Erfassen, Strukturieren und Beschreiben von Bilder- und Zahlenfolgen mit Worten und Termen
Beschreiben von Mustern, Bildern und Sachzusammenhängen mit Termen	Zeichnen von Bildern, Erstellen von Zahlenrätseln und Finden von Sachzusammenhängen zu Gleichungen	Betrachten, Beschreiben und Darstellen der Zuordnung einer Größe zu einer anderen
Entwickeln von Mustern, Bildern und Sachzusammenhängen zu Termen	**Lösen von Gleichungen**	**Veränderungsvorstellung**
Identifizieren, Interpretieren und Substituieren von Teiltermen	Finden von Lösungen in informellen Formaten durch systematisches Probieren und Rückwärtsarbeiten	Fortsetzen von Bilder- und Zahlenfolgen
Interpretieren von Termen mit Variablen als Operatoren	Bestimmen der Lösungsmengen von Gleichungen durch systematisches Probieren, Rückwärtsarbeiten und mithilfe grafischer Darstellungen	Untersuchen und Beschreiben der Art der Abhängigkeit zweier Größen (wie sich zwei Größen miteinander verändern)
Vergleichen von Termen	Bestimmen der Lösungsmengen von Gleichungen durch Äquivalenzumformungen	**Objektvorstellung**
Erkennen und Finden von gleichwertigen Termen in Mustern, Bildern und Sachzusammenhängen	**Validieren und Interpretieren von Lösungen**	Untersuchen und Beschreiben von Eigenschaften zur Klassifizierung von Funktionen
Erkennen von Termen mit gleichem Termwert durch Einsetzen	Überprüfen des Wahrheitsgehalts der Gleichung	Untersuchen von Verknüpfungen von Funktionen
Untersuchen von Termbeziehungen unter Nutzung von Rechenregeln, Rechengesetzen und Umkehroperationen	Überprüfen der Lösung im Sachzusammenhang bzw. Ziehen von Schlussfolgerungen aus Lösungen	
Herstellen von äquivalenten Termen durch Umformen		

Inhaltliches Konzeptbild „Gleichungen und Funktionen“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Für die Niveaustufen B bis G des Rahmenlehrplans stehen **Diagnoseaufgaben** zu den Themen „Terme“, „Gleichungen“ und „Funktionen“ in Form von Kopiervorlagen zur Verfügung. Die Diagnoseaufgaben können im Mathematikunterricht als Eingangsdiagnose zu Beginn einer Unterrichtseinheit, aber auch im Verlauf der Unterrichtsarbeit sowie als Abschlussdiagnose am Ende einer Unterrichtseinheit oder am Ende eines Schuljahres genutzt werden. Die Einordnung der Diagnoseaufgaben in das inhaltliche Konzeptbild bietet eine Orientierung für die Beurteilung der Antworten der Schülerinnen und Schüler (größere Darstellung am Ende des Abschnitts 3).

Ausgehend von den Diagnoseergebnissen erfolgt die gezielte, planvolle Förderung der Schülerinnen und Schüler. Jede Idee aus dem inhaltlichen Konzeptbild wird mithilfe der Förderaufgaben aus der **Förderkartei** bearbeitet. Zu jeder Farbe gibt es eine Förderkartei für die Grundschule und eine Förderkartei für die Sekundarstufe I. Förderaufgaben mit der gleichen farbigen Kennzeichnung sind als **aufeinander aufbauende Förderschritte** zu nutzen und dienen der Entwicklung der gleichen Idee. Die Aufgaben der Sekundarstufe I schließen an die Aufgaben der Grundschule an. Zu jedem Aufgabenpaket wird zu Beginn kurz beschrieben, worum es inhaltlich und didaktisch geht.

Alle in der Förderkartei formulierten Aufgaben und Aktivitäten lassen sich sowohl innerhalb der ganzen Klasse als auch in Kleingruppen oder in einer Einzelförderung einsetzen. Ausgangspunkt für die methodischen Entscheidungen ist immer die vorausgegangene Diagnose. Eine **kommunikationsintensive Gestaltung der Fördersituationen** ist von entscheidender Bedeutung für deren Gelingen. Um bestimmte Bereiche intensiver zu üben, möchten wir dazu anregen, die Förderaufgaben als Empfehlungen zu verstehen und als Vorlage für weitere Aufgaben zu nutzen, sie umzuformulieren oder zu ergänzen.

Didaktischer Kommentar von Prof. Kortenkamp und Prof. Kuzle

„Man hat mir gesagt, dass jede Gleichung im Buch die Verkaufszahlen halbiert. Ich beschloss also, auf mathematische Formeln ganz zu verzichten. Schließlich habe ich doch eine Ausnahme gemacht: Es handelt sich um die berühmte Einstein'sche Formel $E = mc^2$. Ich hoffe, dies wird nicht die Hälfte meiner potentiellen Leser verschrecken."

Diese Sätze stehen in der Danksagung von Stephen W. Hawkings in seinem Buch „Eine kurze Geschichte der Zeit". Insofern stellt sich, wenn man die Schulbücher der Sekundarstufe betrachtet, die Frage, wie viele Schülerinnen und Schüler überhaupt noch am Mathematikunterricht teilnehmen möchten. Offenbar werden Formeln von vielen als ein undurchdringbares und abschreckendes Ausdrucksmittel der Mathematik wahrgenommen.

Für die Personen, die die Sprache der Formeln schon sprechen, ist das oft gar nicht verständlich, denn sie haben Formeln als Hilfsmittel entdeckt, mit dem man Zusammenhänge zwischen Zahlen und Größen kompakt und einfach beschreiben kann und mit dem man Modelle und die aus ihnen entstehenden Konsequenzen konstruieren kann. Losgelöst vom realen oder mathematischen Modell ist es dann möglich, mit den Mitteln der Algebra weitere Schlüsse aus diesen Formeln zu ziehen. Der Schulunterricht muss daher bereits in der Grundschule die Grundlage für dieses Hilfsmittel legen.

Betrachten wir noch einmal das Eingangsbeispiel: Wenn p die Anzahl der potenziellen Leserinnen und Leser ist, und n die Anzahl der Gleichungen im Text, dann beschreibt der abgerundete Bruch $\left\lfloor\frac{\mathrm{p}}{2^{\mathrm{n}}}\right\rfloor$ die Anzahl der noch verbleibenden Leserinnen und Leser. Soll diese größer als 1 sein, dann muss $\mathrm{p} \geq 2^{\mathrm{n}}$ sein. Ein Buch mit 100 Formeln bräuchte also eine Quintillion potenzielle Leserinnen und Leser, damit mehr als ein Exemplar davon verkauft wird. Abgesehen davon, dass dieser Text mit drei Formeln nun schon sieben Achtel der potenziellen Leserinnen und Leser verschreckt hat, wird deutlich, dass wir mit algebraischen Umformungen in Bereiche vordringen, die sich der konkreten Realisierung entziehen – die Algebra ermöglicht es, den Bereich des Erlebbaren zu verlassen und allgemeine Schlüsse in der Vorstellung und darüber hinaus zu ziehen.

Ein weiterer Aspekt der Beschreibung von mathematischen Zusammenhängen über algebraische Ausdrücke ist, dass sie damit maschinell bearbeitet werden können. Die Beschreibung der systematischen Veränderung eines Wertes kann mit Termen erfolgen, die Computer verarbeiten können. Der Übergang von der Arithmetik, dem „Rechnen", zur Algebra entspricht auf der „digitalen Seite" dem Übergang vom Taschenrechner zu Computeralgebrasystemen (CAS). Die Beschreibung als Term ermöglicht nun dem Gerät eine Berechnung automatisiert durchzuführen. Die durch $4\mathrm{x}^2 - 9$ gegebene Parabel kann mit dem Funktionsplotter als Graph auf dem Bildschirm oder in der Tabellenkalkulation als Wertetabelle dargestellt werden, wozu dieser Term jeweils für viele verschiedene x ausgewertet wird. Der nächste, tatsächlich algebraische Schritt ist dann die Berechnung der Ableitungsfunktion oder von Stammfunktionen. Ähnlich verhält es sich mit dem Übergang vom systematischen Probieren durch (arithmetisches) Einsetzen über das algebraische Finden einer Nullstelle bis hin zum Faktorisieren des Terms in $(2\mathrm{x} - 3)(2\mathrm{x} + 3)$ über die 3. binomische Formel. Auch hier ist wieder die Progression von der Arithmetik zur Algebra von der Grundschule bis zur Oberstufe sichtbar.

Schließlich kann man mit mehreren Termen Gleichungen aufstellen, die im Gegensatz zu den ähnlich aussehenden Termumformungen nicht beschreiben, dass die Terme exakt gleich sind, sondern für bestimmte Belegungen der dort verwendeten Variablen gleich sind oder gleich sein sollen. Ohne die Spezifizierung, welche Belegungen für die Variablen erlaubt sind, kommt man hier nur schwer weiter. Auch wenn die rigorose Behandlung von Quantoren und Mengen nicht mehr Bestandteil des Curriculums ist, so muss dennoch die sprachliche Beschreibung dieser Bedingungen – „für alle …“, „es gibt …“ – im Unterricht eingeübt werden.

Das vorliegende Material soll dabei helfen, den Erwerb der notwendigen Kompetenzen im Bereich Gleichungen und Funktionen zu unterstützen und Grundvorstellungen zum Variablen- und Termbgriff, zu Gleichungen, Funktionen und Operatoren aufzubauen. Der Zusammenhang zu den anderen Leitideen liegt auf der Hand, liefert uns doch die Formelsprache das Instrumentarium, Mathematik auf einer höheren Ebene zu betreiben.

Diagnose und Förderung

Diagnose sollte ein zentraler Baustein des Mathematikunterrichts sein. Hierzu sind Elemente der Diagnose zielgerichtet und zum passenden Zeitpunkt einzubinden, um die individuellen Leistungen und Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler zu erfassen sowie Fehlvorstellungen und die Entstehung von solchen zu verhindern bzw. bereits vorhandene zu überwinden. Dazu kann man zwischen einer eher produktorientierten oder einer eher prozessorientierten Diagnostik unterscheiden (Jordan & vom Hofe, 2008). Methoden, die auf die Erfassung individueller Lernergebnisse (z. B. Klassenarbeiten) zielen, gehören zu produktorientierter Diagnostik. Dabei wird das Ergebnis als „korrekt“ oder „nicht korrekt“ bzw. als Zeichen für „kann“ oder „kann nicht“ bewertet. Da solche Produkte oft erst am Ende eines Lernprozesses entstehen, können sie nur bedingt für gezielte Fördermaßnahmen oder das Anpassen des Unterrichts an die individuellen Bedürfnisse der Schülerinnen und Schüler eingesetzt werden. Anderseits ist eine prozessorientierte Diagnostik auf die Erfassung individueller Lernprozesse ausgerichtet mit dem Ziel, die einem Ergebnis zugrunde liegenden Gedanken einer Schülerin oder eines Schülers besser zu verstehen (Jordan & vom Hofe, 2008). Die Lehrkräfte nutzen dafür unterschiedliche Methoden, wie z. B. Lerntagebücher oder diagnostische Interviews. Diagnostische Interviews stellen eine zeitaufwändige, aber sehr aufschlussreiche Methode dar, mit der im direkten Gespräch Schülervorstellungen bzw. -fehlvorstellungen in Erfahrung gebracht werden kann. Nach Jordan und vom Hofe (2008) ist prozessorientierte Diagnostik der Schlüssel für eine systematische individuelle Förderung durch die Lehrkraft. Fördermaßnahmen zielen zumeist auf das einzelne Kind unter Berücksichtigung seiner spezifischen Lernvoraussetzungen, -bedürfnisse, -wege, -ziele und -möglichkeiten ab. Die Unterscheidung zwischen einer produktorientierten oder eher prozessorientierten Diagnostik ist nicht trennscharf – kein Produkt ohne Prozess, und auch ein Prozess ohne Produkt kann über das „nicht-Produkt“ analysiert werden.

Die Entwicklung von Angeboten zur Diagnose und Förderung ist ein aufwändiger und komplexer Prozess, der nicht durch jede Lehrkraft selbst geleistet werden kann. Aus diesem Grund hat das LISUM Diagnose- und Fördermaterialien zur Thematik „Gleichungen und Funktionen“ entwickelt. Die entwickelten Diagnosematerialien sind dabei eine gute Mischung zwischen produkt- und prozessorientierter Diagnostik, um sowohl das Können (einzelne Kompetenzen und Vorstellungen) als auch die Lernprozesse der Schülerinnen und Schüler gezielt zu erfassen. Dementsprechend soll die Förderung an der Diagnose orientiert werden – nicht alle Schülerinnen und Schüler sollen sämtliche Aufgaben bearbeiten. Hier ist zu empfehlen, die zu behandelnden Förderaufgaben an die bearbeiteten Diagnoseaufgaben anzuknüpfen. Die Förderaufgaben sind im Dialog zwischen der Lehrkraft und den Schülerinnen und Schülern einzusetzen, in dem das Hinterfragen von Schülerantworten im Vordergrund stehen soll. Organisatorisch ist das gut in Kleingruppen möglich. Dabei bietet sich auch die Möglichkeit der Kommunikation zwischen Schülerinnen und Schülern, die den Aufbau von Verständnis unterstützen. In diesen Situationen wird der Lehrkraft sowohl ein erneuter Einblick in den Fortschritt der Lernprozesse ermöglicht als auch den Schülerinnen und Schülern die Fortschritte des eigenen Lernens bewusst gemacht. Die vom LISUM entwickelten Diagnose- und Fördermaterialien können als Basis für die Entwicklung eigener, differenzierter Materialen für die eigene Lerngruppe genutzt werden, um bestimmte Bereiche intensiver zu üben, Kenntnisse und Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler genauer zu erheben und sie dadurch gezielter zu fördern.

Gleichungen und Funktionen

Die Leitidee „Gleichungen und Funktionen“, die in den KMK-Standards für den Primarbereich „Muster und Strukturen“ (2005) und für den mittleren Abschluss „Funktionaler Zusammenhang“ (2004) heißt, hat ihre mathematische Grundlage in Algebra und Analysis, die bei der Beschreibung von Strukturen und ihrer Analyse Hand in Hand gehen und damit den Kern der Mathematik darstellen. Da es stets darum geht, nicht nur einen Einzelfall, sondern ganze Situationen zu beschreiben, kommt man nicht umhin, den Begriff der Variable als zentrales Konzept einzuführen. Diese begegnen Schülerinnen und Schülern schon früh – allerdings zunächst als „Kästchen“ oder Lücken für gesuchte Werte in Rechenaufgaben, als vorzustellende Werte ohne Namen („Ich denke mir eine Zahl. Diese ist durch 5 teilbar.“) oder über die Vergabe von Namen („Multipliziere deine Lieblingszahl mit 5“). Die symbolische Schreibweise als x, y oder z ist dann später eine willkommene Vereinfachung.

Die erste Begegnung mit Operatoren findet auch in der Arithmetik statt. Der Gegenoperator von „plus 7“ ist „minus 7“, und so kann die Subtraktion als die Handlung erklärt werden, die die Addition einer bestimmten Zahl rückgängig macht. Diese Vorstellung ist eine wesentliche Grundlage für die Entwicklung des funktionalen Denkens. Äquivalenzumformungen von Gleichungen, die später durchgeführt werden, greifen auf diese Operatorsichtweise zurück

Zum einen lassen sich diese Operatoren funktional erklären – sie beschreiben die Veränderung eines Wertes und der Operator $+7$ entspricht somit der linearen Funktion f mit $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x} + 7$. Das Verständnis des Operators $+7$, der bereits in der Grundschule eingeführt wird, ist also eine Grundlage für das Verständnis von Funktionen.

Verkettet man Operatoren, führt also bestimmte Rechenoperationen nacheinander aus, so erhält man Terme, mit denen man auch mehrschrittige Rechnungen durchführen kann. Erlaubt man in diesen Termen auch Operatoren, deren Wirkung über eine Variable beschrieben wird, zum Beispiel „n“ für „nimm das n-fache“, dann werden die möglichen Rechnungen noch reichhaltiger. Und schließlich erlauben Vorrangregeln und Klammersetzung auch die Beschreibung von beliebig komplizierten Rechnungen über Terme. Und so, wie Operatoren als Funktionen interpretiert werden können, können über Terme gegebene Funktionen wieder als Operatoren interpretiert werden. Die Funktion f mit $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}^3$ ist dann zum Beispiel ein Operator, der aus einer Zahl den Rauminhalt eines Würfels mit dieser Kantenlänge macht. Mit diesen Termen als Operatoren schließt sich dann der Kreis.

Die durch **Terme** beschriebenen Rechnungen können dann, wie schon kurz in der Einleitung beschrieben, in verschiedener Form genutzt werden. Das Einsetzen von Werten für Variablen ordnet ihnen einen Termwert zu, man führt also die Rechnung aus. Beobachtungen zur Struktur der Terme und zu den Termwerten ist wesentliche Aufgabe der Grundschule (z. B. bei der Untersuchung von Zahlenmauern). Das Gleichsetzen zweier Terme ermöglicht es, Lösungsmengen zu bestimmen: die Variablenbelegungen, für die beide Terme den gleichen Termwert haben. Hierzu nutzt man meist das Umformen von Gleichungen, welches wie die Regeln zur Manipulation von Termen darauf basiert, eine äquivalente – gleichwertige – Gleichung zu finden, also eine, deren Lösungsmenge der Lösungsmenge der ursprünglichen Gleichung entspricht. Die Verwendung eines Terms als Funktionsterm erlaubt die allgemeine Beschreibung der Funktionswerte für gegebene Parameter und Argumente und eröffnet damit die Möglichkeit, komplexere Zusammenhänge zu modularisieren. Die Funktion f mit $\mathrm{f(x)} = \mathrm{g(x)} + 5$ erklärt, dass die neue Funktion das tut, was die alte Funktion tat, und zusätzlich noch 5 addiert. Die Funktion p mit $\mathrm{p(x)} = \mathrm{f(g(x))}$ beschreibt, dass man zunächst das tut, was g beschreibt, und mit dem Ergebnis macht, was f beschreibt, also die Nacheinanderausführung bzw. Verkettung der beiden Funktionen. Dies alles kann man auf Ebene der Zahlen tun, man kann aber auch über konkrete Handlungen bereits in der Grundschule zu diesen Vorstellungen hinführen.

Für die unterrichtliche Behandlung von Gleichungen und Funktionen ist nicht nur in der Primarstufe der Aufbau von entsprechenden Grundvorstellungen mit passenden Darstellungen und Handlungen wesentlich. Grundvorstellungen (vom Hofe, 1995) vermitteln hier zwischen Realität und mathematischem Modell und sind dadurch charakterisiert, dass sie

a. sinnkonstituierend für mathematische Begriffe durch die Anknüpfung an bekannte Sach- und Handlungszusammenhänge sind,

b. den Aufbau von (visuellen) Repräsentationen unterstützen, die operatives Handeln auf der Vorstellungsebene ermöglichen, und

c. die Fähigkeit zur Anwendung eines Begriffs auf die Wirklichkeit durch das Erkennen von Strukturen oder das Modellieren von Sachproblemen vermitteln.

Diese drei charakterisierenden Eigenschaften von Grundvorstellungen werden im vorliegenden Fördermaterial immer wieder aufgegriffen.

Am Ende stehen die drei zentralen Aspekte funktionalen Denkens (Vollrath, 1989):

(1) „Durch Funktionen beschreibt oder stiftet man Zusammenhänge zwischen Größen: einer Größe ist dann eine andere zugeordnet, so daß die eine Größe als abhängig gesehen wird von der anderen. […].

(2) Durch Funktionen erfaßt man, wie Änderungen einer Größe sich auf eine abhängige Größe auswirken. […].

(3) Mit Funktionen betrachtet man einen gegebenen oder erzeugten Zusammenhang als Ganzes.“

Der Einsetzungsaspekt (1) entspricht dabei der Nutzung von Termen als Rechenvorschrift, der Kovarianz- oder Veränderungsaspekt (2) entspricht der Nutzung von Termen als Operator, der Objektaspekt (3) entspricht der Nutzung von Termen als algebraischem Objekt.

Darüber hinaus ist die Fähigkeit, funktionale Zusammenhänge unterschiedlich darzustellen und zwischen diesen flexibel zu wechseln, nicht nur für die inhaltsbezogenen Kompetenzen im Bereich „Gleichungen und Funktionen“ relevant, sondern auch für andere mathematischen Gebiete wie etwa „Größen und Messen“ (z. B. Umfang eines Kreises, siehe Tabelle 1).

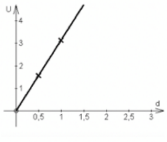
<table>
<tr><td>verbal</td><td>Der Umfang ist ein Vielfaches vom Durchmesser</td><td>$U = \pi \cdot d$</td><td>symbolisch</td></tr>
<tr><td>numerisch</td><td><table><tr><td>d</td><td>U</td></tr><tr><td>1</td><td>3,1</td></tr><tr><td>2</td><td>6,3</td></tr><tr><td>3</td><td>9,4</td></tr></table></td><td></td><td>grafisch</td></tr>
</table>

Tabelle 1: Zusammenhang zwischen unterschiedlichen inhaltsbezogenen Kompetenzbereichen

Ein Modell für den Kompetenzerwerb

Im Rahmenlehrplan 1–10 Berlin Brandenburg für das Fach Mathematik finden sich die Kernkompetenzen *Terme und Gleichungen darstellen*, *Gleichungen und Gleichungssysteme lösen*, *Zuordnungen und Funktionen untersuchen*, *Zuordnungen und Funktionen darstellen* und *Eigenschaften funktionaler Zusammenhänge nutzen* im inhaltsbezogenen Kompetenzbereich „Gleichungen und Funktionen“ wieder. Das Ziel dieser Leitidee ist es, dass die Schülerinnen und Schüler „ein Verständnis für das Operieren mit Variablen entwickeln“ und „in Sachsituationen funktionale Zusammenhänge zur Beschreibung und Problemlösung nutzen“ (MBJS, 2015, S. 9). Darüber hinaus sollen mithilfe von Funktionen „Phänomene der Abhängigkeit und Veränderung erfasst und analysiert werden“ (MBJS, 2015, S. 9), wobei der eingangs erwähnte Modellcharakter von Funktionen hervorgehoben wird, ebenso wie die prägende Tätigkeit des Darstellungswechsels.

Da sich das „funktionale Denken“ als Grundlage der Mathematik durch die gesamte Schullaufbahn zieht, ist der Aufbau eines Verständnisses im oben genannten Sinne eine komplexe Aufgabe. Um diese zu strukturieren, lohnt es sich, die zentralen Begriffe in diesem Bereich zu identifizieren: Variablen, Operationen, Terme, Gleichungen und funktionale Zusammenhänge.

Auf diesen Überlegungen aufbauend hat das LISUM ein Modell entwickelt, um die unterrichtlichen Aktivitäten im Bereich „Gleichungen und Funktionen“ zu strukturieren (siehe Abbildung 1). Es geht hier nicht um die Festlegung einer Reihenfolge oder die strikte Trennung von Unterrichtsinhalten, sondern um eine Orientierung für Lehrkräfte zu individuellen Fördermaßnahmen. Dabei ist es notwendig, Zusammenhänge zwischen den tragenden Ideen herzustellen und sie miteinander zu verknüpfen.

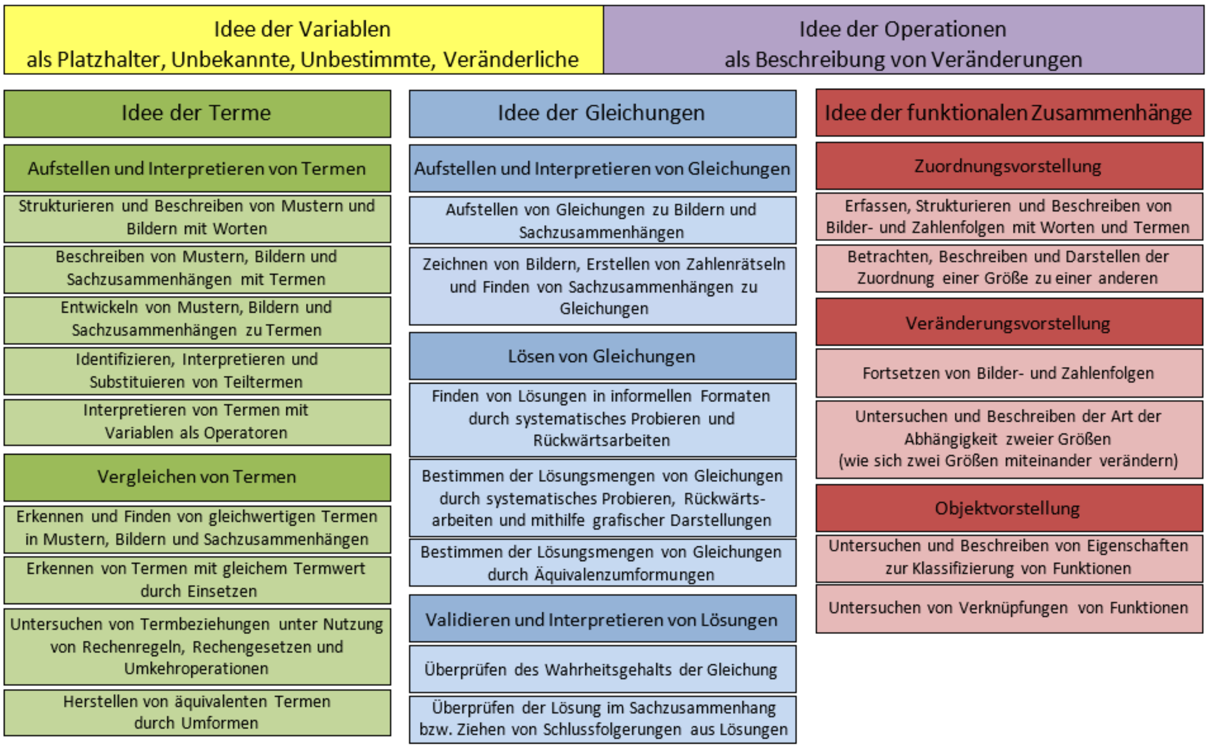


Abbildung 1: Konzeptbild zum Strukturieren der Aktivitäten im Bereich „Gleichungen und Funktionen“

Idee der Variablen

Als Überbau dienen die „Idee der Variablen“ und die „Idee der Operation“. Variablen können dabei als eine Art Verallgemeinerung von Zahlen angesehen werden – plakativ gesagt: Statt einer konkreten Zahl „5“ können wir im Bereich der Gleichungen und Funktionen auch mit „x“ (oder auch anderen Symbolen, wie ___ oder ☐) arbeiten. Die Verwendung dieser Zahlen kann dabei verschieden sein und induziert verschiedene Arten von Variablen:

- Platzhalter, die später noch gefüllt werden,
- Unbekannte, die als Ergebnis einer Aufgabe gesucht werden,
- Unbestimmte, die eine Zahl beschreiben, deren konkreter Wert nicht für die Lösung der Aufgabe notwendig ist,

- Veränderliche, zu denen die Veränderung von anderen, abhängigen Variablen untersucht wird,

um nur einige zu nennen.

Auch Parameter und Konstanten sind hier noch zu nennen, genauere Betrachtungen zum Variablenbegriff finden sich zum Beispiel bei (Malle 1993).

Idee der Operation

Spielen die Variablen die Rolle der Zahlen, so ergeben sich die Rechenoperationen aus der Idee der Operation, die die Veränderung von Zahlen beschreiben. In der Leitidee „Zahlen und Operationen" sind solche Operationen schon als Operatoren „+5" oder „–5" oder auch als der allgemeine Gegenoperator „minus", der aus einer Zahl ihr Gegenteil macht, bekannt. Auch der Operatoraspekt der Bruchrechnung („3/4 von") beschreibt eine Veränderung, die auf eine Zahl (oder Variable!) wirken kann.

Idee der Terme

Stehen Variablen und Operatoren zur Verfügung, so können aus diesen auch komplexere Beschreibungen von Rechnungen gebildet werden. Die Idee der Terme umfasst die symbolische Darstellung von solchen Rechenvorschriften und die dazugehörigen Übersetzungs- und Interpretationstätigkeiten. Dies kann schon sehr früh propädeutisch geschehen: Beschreibt man ein Muster (zum Beispiel Band-Ornamente oder Parkettierungen) mit einer Zeichenfolge, dann finden ähnliche Darstellungswechsel statt, wie sie beim Aufstellen und Interpretieren von Termen zu Rechenaufgaben notwendig sind. Ist es möglich, zwei solche Beschreibungen zu einer neuen, komplexeren Beschreibung zusammenzusetzen, dann kann man den Kerngedanken von Termen auch so zugänglich machen. So wird zum Beispiel aus dem Muster ABCABCABC mit den Ersetzungsregeln „A wird durch \/\ ersetzt", „B wird durch __/ ersetzt" und „C wird durch __/ ersetzt" das neue Muster \/__/__/\/__/__/\/__/__/. Dabei werden der Einsetzungsaspekt und sogar die Verkettung von Funktionen bereits in der frühen mathematischen Bildung vorbereitet.

Neben dem Herstellen und Interpretieren von Termen ist aber auch der Vergleich mit Termen wichtig: Auf der Ebene der Arithmetik ist dieser bereits thematisiert, die Grundvorstellung des Zusammenfügens erklärt sofort, dass $4 + 7$ den gleichen Termwert wie $7 + 4$ ergibt. Ersetzt man hier die Zahlen durch Variablen, dann erhält man das Kommutativgesetz in allgemeiner Form. Hier ist es notwendig, die möglichen Belegungen der Variablen zu diskutieren, auch wenn Existenzquantor („es gibt eine Zahl für die gilt") und Allquantor („für jede Zahl gilt") zunächst nicht formal eingeführt werden. Ohne diese Unterscheidung ist der Weg vom Spezialfall zur Verallgemeinerung und damit zum Vergleich von Termen nicht zu schaffen, wie das Beispiel $3 \cdot 0 = 0 \cdot 5$ zeigt – es gilt keineswegs $x \cdot y = y \cdot z$ für beliebige x, y und z, aber es gibt ein y, so dass es für alle x und z gilt.

Idee der Gleichungen

Auf der Basis des Vergleiches von Termen ist es dann möglich, Gleichungen mit Termen aufzustellen, bei denen zulässige Belegungen der Variablen gesucht werden, die bei beiden Termen das gleiche Ergebnis liefern. Dabei können Terme sowohl durch gleichwertige (äquivalente) Terme ersetzt werden (wie in der Idee der Terme – grüne Säule in Abbildung 1 – vorbereitet), diese Gleichungen können aber auch als eigenständige mathematische Objekte angesehen werden und über Äquivalenzumformungen in neue Gleichungen verwandelt werden, die eventuell einfacher zu lösen sind. Dabei stehen neben heuristischen Verfahren wie dem systematischen Probieren oder grafischen Lösungsverfahren auch formalisierte Verfahren wie das Ineinander-Einsetzen zur Verfügung. Ohne die Interpretation der Lösungen (im Modellierungsaspekt) und Wege zum Validieren von Lösungen (primär durch das Einsetzen von Werten) wäre die Idee der Gleichungen allerdings unvollständig.

Idee der funktionalen Zusammenhänge

Bei der Einführung von Funktionen, die die Zuordnung von Werten beschreiben, wird schließlich die Kraft der Terme als symbolische Darstellung von Rechnungen und Strukturen wirklich genutzt. Es sollte aber bedacht werden, dass Funktionales Denken nicht von der Beschreibung einer Funktionsvorschrift als Term abhängig ist. Ist eine Funktion als Wertetabelle gegeben, so kann man durchaus über den Wert an einer Stelle (und damit den Einsetzungsaspekt in der Zuordnungsvorstellung) sprechen – ebenso wie bei einer rein grafischen Darstellung. Ist eine Funktion über ihren Graphen im Koordinatensystem gegeben, so kann man problemlos über ihre Steilheit sprechen und damit die Veränderungsvorstellung betonen – was auch dann möglich ist, wenn man eine Wertetabelle vorliegen hat. Und die Untersuchung von Minimum, Maximum und anderen Kennwerten, die man ebenfalls in Term-freien Darstellungen durchführen kann, verknüpft die Leitidee „Gleichungen und Funktionen“ nicht nur mit der Leitidee „Daten und Zufall“, sondern ermöglicht einen Zugang zur Objektvorstellung von Funktionen. Dennoch: Das Verständnis von Termen und Gleichungen ermöglicht es Schülerinnen und Schülern, Funktionen auch über Funktionsterme darzustellen und damit die nützlichen Formeln für die Berechnung von abhängigen Größen bereitzustellen. Schließlich ist die Untersuchung dieser Terme als mathematische Objekte dann auch die Grundlage der Analysis in der Oberstufe.

Einsatz der Diagnose- und Fördermaterialien

Die vom LISUM entwickelten Diagnose- und Fördermaterialien decken die genannten Bereiche und Kompetenzen auf verschiedenen Niveaustufen (B-G) und damit die Schullaufbahn von der Grundschule bis zur Sekundarstufe ab. Es ist aber nicht notwendig, das gesamte Material mit allen Schülerinnen und Schülern durchzuarbeiten! Um möglichst effektiv die notwendigen Förderschritte gehen zu können, wird über das Diagnosematerial zunächst grob festgestellt, in welchem Bereich evtl. Förderbedarf besteht.

Die Diagnosematerialien bestehen aus einer Kombination von quantitativen und qualitativen Aufgaben. Dadurch können die erkennbaren Stärken und Schwächen der Schülerinnen und Schüler den Lehrkräften Hinweise auf bestehende Fördernotwendigkeiten geben. Dabei geht es nicht nur um „richtig" oder „falsch“ bzw. „kann“ oder „kann nicht“, sondern darum, das Denken der Schülerinnen und Schüler sichtbar zu machen, zu verstehen, wo sich die Schülerin oder der Schüler befindet und wo die Schwierigkeiten liegen. Dazu wurden alle Diagnoseaufgaben in das oben beschriebene vom LISUM entwickelte Modell und in den neuen Rahmenlehrplan eingeordnet. Auch die Förderaufgaben sind entsprechend dem Modell geordnet. Durch die farbige Gestaltung ist leicht nachvollziehbar, welche Idee mit den Förderaufgaben verfolgt wird.

Um solche diagnostischen Informationen wirksam werden zu lassen, werden in den didaktischen Handreichungen (Fördermaterialien) zielgerichtete Fördermaßnahmen empfohlen, indem zu typischerweise erwarteten Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler konkrete Anregungen zur unterrichtlichen Bearbeitung gegeben werden. Für jede Idee aus dem LISUM-Modell ergeben sich allerdings verschiedene Schwerpunkte, sodass sowohl die Diagnose als auch die Förderung im Gespräch zwischen Lehrkräften und Schülerinnen und Schülern erarbeitet und bearbeitet werden sollen.

Spezielle Hinweise zu den im Material angesprochenen Teilbereichen

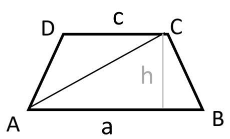
Idee der Terme

Terme sind sinnvolle Zusammensetzungen aus Zahlen, Größen und Variablen, die durch Rechenzeichen und Klammern miteinander verbunden sein können. Jede beliebige Zahl und Variable stellen ebenso einen Term dar. Terme sind also formal Zeichenreihen, die selbst Zahlen darstellen oder durch Einsetzen von Zahlen in Zahlen übergehen. Im Mathematikunterricht wird allerdings der Termbegriff üblicherweise nicht definiert.

Grundvorstellungen zu Termen

Die Betrachtung des Terms als Bauplan und des Terms als Rechenschema sind unterschiedliche Grundvorstellungen zu Termen (Siller & Roth, 2016).

Der Term als **Bauplan** beschreibt die mathematische Struktur einer Situation mit symbolischen Mitteln oder wird zur Bearbeitung eines Problems entwickelt. Ein so entstandener Term kann als mathematischer „Bauplan" für die gegebene mathematische Situation oder das gegebene mathematische Phänomen interpretiert werden. Wenn man z. B. einen Term zur Berechnung des Flächeninhalts eines Trapezes entwickeln möchte, kann man das Trapez in zwei Dreiecke zerlegen. Aus den zu diesem Zeitpunkt bereits bekannten Termen zur Berechnung des Flächeninhalts von Dreiecken wird nun im Sinne eines Bauplans der Term zur Berechnung des Flächeninhalts des Trapezes zusammengesetzt. Der Bauplan würde sich dann wie folgt ergeben: $A_{Trapez} = A_{Dreieck\ ABC} + A_{Dreieck\ ACD}$ (siehe Variablen in der untenstehenden Darstellung eines Trapezes).



Dreieck ABC $\frac{1}{2} \cdot a \cdot h$

Dreieck ACD $\frac{1}{2} \cdot c \cdot h$

$$A_{Trapez} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h + \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$$

Aus dem obigen Term ist die Struktur der mathematischen Situation (also des Flächeninhalts des Trapezes) direkt ablesbar.

Nachdem ein Term im Sinne der Grundvorstellung des Bauplans für eine mathematische Situation aufgestellt wurde, wird dieser in aller Regel in einer bestimmten Anwendungssituation genutzt, um wiederholte gleichartige Berechnungen optimal (u. a. schnell, einfach, mit wenig Aufwand) durchzuführen (Siller & Roth, 29016). Die Grundvorstellung des *Terms als Rechenschema* beschreibt eine Vereinfachung von Berechnungen von Zahlenwerten durch weitere Termumformungen. Gehen wir zu unserem Beispiel zurück: Um den Flächeninhalten von beliebigen Trapezen zu berechnen, wird der Term als Bauplan nun zu einem *Term als Rechenschema* umgeformt, indem der Term $\frac{1}{2} \cdot a \cdot h + \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$ weiter umgeformt und zielgerichtet vereinfacht wird: $A_{Trapez} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h + \frac{1}{2} \cdot c \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$. Dadurch wird es leichter, den Termwert zu ermitteln, wenn man für ein konkretes Trapez und bekannte Werte *a*, *c* und *h* dessen Flächeninhalt berechnen will. Die Grundvorstellung *Term als Rechenschema* spielt auch im alltäglichen Leben eine Rolle, zum Beispiel bei der Berechnung der Stromkosten (Siller & Roth, 2016).

Schon im Anfangsunterricht werden die ersten Vorstellungen zu Termen entwickelt. Algebraisches Denken beginnt schon beim Beobachten und Beschreiben von Strukturen geometrischer Gebilde (z. B. Figurenfolgen) und später arithmetischer Gebilde (z. B. Zahlenfolgen). Im weiteren Verlauf der Grundschulzeit sollen diese mit Worten beschriebenen Strukturen durch symbolische Mittel (Terme) ersetzt werden (z. B. Beschreiben von Punktmustern).

In erster Linie befassen sich die Schülerinnen und Schüler zu Beginn der Grundschulzeit mit **Zahlenterme**n oder Rechenausdrücken, die keine Variablen enthalten. Sie beinhalten ausschließlich Zahlen bzw. Größen, die mit Rechenzeichen und Klammern verbunden sind. Die Entwicklung von Termvorstellungen durch Zahlenterme ist mit dem Aufbau von Zahl- und Operationsvorstellungen eng verbunden.

Terme mit Variablen sind für Schülerinnen und Schüler abstrakter und oftmals schwerer fassbar. Um die Entwicklung zum abstrakten Denken bei den Schülerinnen und Schülern voranzubringen, lernen sie bereits in den ersten Grundschuljahren den Platzhalter in Termen kennen. Für den Platzhalter werden häufig Symbole (z. B. Kreise, Vierecke …) verwendet. Schrittweise werden diese Symbole dann durch Buchstaben – die Variablen – ersetzt. So wird die Entwicklung der Vorstellung zur Variablen als Unbekannte angebahnt.

Je nach Art der Anwendung unterscheidet man: die Variable als Unbekannte, als Unbestimmte und als Veränderliche.

Die Variable als Unbekannte:
Wie heißt die Zahl?
„Das Dreifache einer Zahl vermindert um 10 ergibt 8."

Die Variable als Unbestimmte:
Das Kommutativgesetz:
$$a + b = b + a$$

Die Variable als Veränderliche:
$x \rightarrow 3 \cdot x + 2$

x	0	1	2	3	4
y	2	5	8	11	14

Tätigkeiten mit Termen

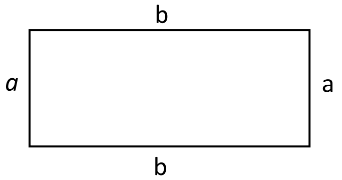
Von zentraler Bedeutung für den Unterricht sind folgende Tätigkeiten mit Termen:

1. Aufstellen von Termen (z. B. zum Beschreiben des Flächeninhalts von Trapezen)
2. Analysieren von Termen (z. B. durch die Beschreibung von Termen mit Worten, durch das Erkennen der Termstruktur oder das Überprüfen der Terme auf ihre Richtigkeit entsprechend dem Sachkontext)
3. Umformen von Termen (z. B. das Vereinfachen durch Zusammenfassen oder das Auflösen von Klammern usw. Dabei ist zu beachten, dass die Umformungsregeln für Zahlenterme auch für Terme mit Variablen gelten.)
4. Berechnen von Termen (durch Bestimmen des Termwerts)
5. Interpretieren von Termen (z. B. durch die Beschreibung ihrer Bedeutung oder Rückübersetzung in einen Sachkontext)
   Darstellen von Termen (z. B. durch grafische Veranschaulichungen von Formeln → beispielsweise kann der Term der binomischen Formel $(a + b)^2$ durch Rechtecke visualisiert werden) (Vollrath, 1994; Vollrath & Weigand, 2007).

Man kann immer wieder beobachten, dass vielen Schülerinnen und Schülern das Umformen von Termen Schwierigkeiten bereitet. Besonders problematisch wird es in der Sekundarstufe I, wenn Terme mit Variablen umgeformt werden sollen. Ein Hauptaugenmerk sollte darauf gelegt werden, dass ein Bezug zu den inhaltlichen Vorstellungen hergestellt wird und Termumformungen nicht nur auf Vorrat gelernt werden, sodass es zum scheinbar willkürlichen Anwenden vorgegebener Umformungsregeln kommt. Vielmehr muss den Schülerinnen und Schülern klar werden, dass Umformungen der Entlastung des Gedächtnisses, der Vereinfachung numerischer Berechnungen und dem Herstellen übersichtlicher Terme dienen sollen, die als Hilfsmittel zum Lösen von Gleichungen genutzt werden können.

Im Unterricht muss ein Verständnis von beschreibungs-, einsetzungs- und umformungsgleichen Termen entwickelt werden. Eine mögliche Abfolge von Lernschritten zur Erarbeitung von Termumformungen besteht aus folgenden Schritten: Zusammenfassen gleichartiger Ausdrücke, Vertauschen und Zusammenfassen in Summen, Auflösen von Klammern, Vertauschen und Zusammenfassen in Produkten, Ausmultiplizieren von Klammern, Kombination von Klammerausmultiplizieren und Klammerauflösen, Multiplizieren von Klammern und Umformen von Bruchtermen (Malle, 1993).

Beschreibungsgleichheit



Der Umfang kann durch folgende Terme angegeben werden:

$a + b + a + b = 2 \cdot a + 2 \cdot b$
$= 2 \cdot (a + b)$

Einsetzungsgleichheit

Term 1: $(a + 5)^2$
Term 2: $a^2 + 10a + 25$

Die Terme sind einsetzungsgleich. Setzt man in beide Terme für *a* jeweils die gleiche Zahl ein, dann sind ihre Termwerte gleich.

Umformungsgleichheit

Term 1: $2 \cdot (x + 1)$
Term 2: $2 \cdot x + 2$

Term 1 lässt sich durch Auflösen der Klammern nach Distributivgesetz in Term 2 „verwandeln".

Wie eingangs erwähnt, fällt den Schülerinnen und Schülern das bewusste Anwenden der Termumformungsregeln oft schwer. Eine mögliche Hilfe kann das Sprechen über die Umformungen sein. Beispielsweise können Aussagen zum Ziel, zum Weg und zur Begründung gemacht werden.

Beispiel:

Zielangabe: „Ich möchte in $5 \cdot (a + 7)$ die Klammern auflösen."
Wegangabe: „Dazu multipliziere ich jeden Summanden mit 5."
Begründung: „Nach dem Distributivgesetz gilt: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$"
(Siller & Roth, 2016)

Ein wesentlicher Grundstein für das Umformen von Termen ist das Verständnis der Rechengesetze und Rechenregeln.

Darstellungen von Termen

Im Umgang mit Termen ist es notwendig, dass die Schülerinnen und Schüler unterschiedliche Darstellungsebenen kennenlernen (symbolisch-algebraisch, grafisch, verbal und numerisch), zwischen diesen flexibel wechseln und diese vernetzen können (Barzel & Herget, 2006). Das flexible Wechseln der Darstellungsformen zeigt, dass ein Verständnis für den Umgang mit Termen entwickelt wurde. In den Fördermaterialien wurde darauf besonders Wert gelegt. So kann das Verständnis bei den Schülerinnen und Schülern vertieft und es können individuelle Präferenzen berücksichtigt werden.

Folgende Darstellungswechsel kommen in den Fördermaterialien beispielsweise zum Tragen:

- verbal – symbolisch (z. B. beim Zuordnen von Termen zu Sachverhalten in der Förderaufgabe 12, *Idee der Terme* oder beim Aufstellen von Termen zu Rechengeschichten in Förderaufgabe 15, *Idee der Terme*)
- symbolisch – visuell (z. B. beim Zuordnen von Termen zu Punktebildern in Förderaufgabe 13, *Idee der Terme* oder beim Aufstellen von Termen zu Mustern in Förderaufgabe 27, *Idee der Terme*)
- numerisch – visuell (z. B. beim Herstellen einer Zahlenfolge zu einer Bilderfolge in Förderaufgabe 7, *Idee der funktionalen Zusammenhänge* oder beim Ergänzen einer Werttabelle durch Ablesen der Werte im Koordinatensystem in Förderaufgabe 22, *Idee der funktionalen Zusammenhänge*)
- verbal – visuell (z. B. beim Entnehmen von Informationen aus einer grafischen Darstellung in Förderaufgabe 21, *Idee der funktionalen Zusammenhänge*)
- verbal – numerisch (z. B. beim Überprüfen einer Zuordnung und dem Eintragen in eine Wertetabelle in Förderaufgabe 20, *Idee der funktionalen Zusammenhänge*)
- symbolisch – numerisch (z. B. beim Überprüfen und Korrigieren der Darstellung einer Zuordnung in Förderaufgabe 26, *Idee der funktionalen Zusammenhänge*, siehe Abbildung 2).

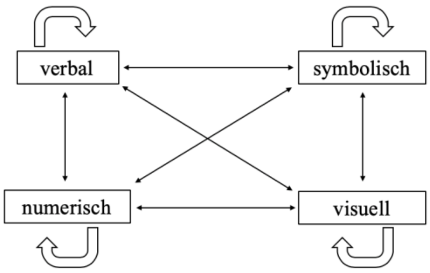


Abbildung 2: Darstellungen und Darstellungswechsel von Termen

Im Anfangsunterricht stehen insbesondere verbale und symbolische Darstellungen von Termen im Fokus. Durch das Erfinden von Rechengeschichten zu Termen beziehungsweise das Aufstellen von Termen zu Rechengeschichten und realen Situationen kann der Darstellungswechsel geübt werden.

Idee der Gleichungen

Eine mathematische Gleichung ist eine Aussage über die Gleichheit zweier Terme, die mithilfe des Gleichheitszeichens symbolisiert wird ($T_1 = T_2$). Bereits beim ersten Lösen von Rechenaufgaben beschäftigen sich die Schülerinnen und Schüler unbewusst auch mit den ersten einfachen Gleichungen. Diese werden im weiteren Verlauf der Schulzeit sukzessive komplexer und erhalten durch die unterschiedliche Verwendung des Gleichheitszeichens (=) auch eine andere Bedeutung. Wird es zunächst oft als Handlungsanweisung verstanden („Berechne das Ergebnis des links vom Gleichheitszeichen stehenden Ausdrucks"), so stellt es dann eine Äquivalenzrelation dar, die folgende Eigenschaften hat:

1. Reflexivität: Jedes Objekt *a* ist zu sich selbst äquivalent. „a = a".
2. Symmetrie: Wenn Objekt a äquivalent zu Objekt b ist, dann ist auch Objekt *b* äquivalent zu Objekt a. „Wenn a = b, dann b = a."
3. Transitivität: Wenn Objekt a äquivalent zu Objekt b und Objekt b äquivalent zu Objekt c ist, dann ist auch Objekt a äquivalent zu Objekt c. „Wenn a = b und b = c, dann gilt auch a = c."

Das heißt formal, dass ein Ausdruck wie 4 + 7 = 11 gleichbedeutend zum Ausdruck 11 = 4 + 7 ist.

Gleichungen als mathematische Objekte

Gleichungen können auch als mathematische Objekte aufgefasst werden. Dabei unterscheidet man Gleichungen mit und ohne freie Variablen. Gleichungen ohne freie Variablen stellen mathematische Aussagen dar, deren Wahrheitsgehalt im Prinzip überprüfbar ist.

Zum Beispiel:
- 4 + 7 = 11 ist eine wahre Aussage (w. A.)
- 3 + 5 = 8 + 2 ist eine falsche Aussage (f. A.)
- Für alle a und b gilt: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (w. A.)

Bei Gleichungen mit freien Variablen handelt es sich um Aussageformen, die erst durch das Einsetzen von Elementen aus der Grundmenge an die Stelle der Variablen zu wahren oder falschen Aussagen werden. Zum Beispiel wird die Aussageform 4x + 7 = 11 mit der freien Variablen x für x = 1 zu einer wahren Aussage und für x = 0 zu einer falschen Aussage. Im Mathematikunterricht werden Verfahren gelehrt, um Einsetzungen zu bestimmen, die zu wahren Aussagen führen, zum Beispiel mithilfe von Äquivalenzumformungen.

Verwendung des Gleichheitszeichens
Im Mathematikunterricht wird zwischen zwei Verwendungsweisen des Gleichheitszeichens unterschieden: als Zuweisungszeichen (Handlungszeichen) und als Beziehungszeichen (Vergleichszeichen) (Malle,1993). Zu Beginn der Schulzeit lernen die Schülerinnen und Schüler das Gleichheitszeichen als Zuweisungszeichen kennen.

Beispiel: Rechne aus. 13 + 15 =

Die Verwendung des Gleichheitszeichens entspricht dabei der „=“ Taste auf dem Taschenrechner. Auch im Beispiel *Berechne das Volumen des Prismas* V_{Prisma} *= Grundfläche · Höhe* wird das Gleichheitszeichen als Zuweisungszeichen verwendet.

Diese erste Vorstellung des Gleichheitszeichens als Zuweisungszeichen muss nach und nach zur Vorstellung des Gleichheitszeichens als Beziehungszeichen ergänzt und weiterentwickelt werden. Dabei lernen die Schülerinnen und Schüler, dass auf beiden Seiten einer Gleichung gleichwertige Terme stehen und die Seiten einer Gleichung vertauschbar sind (z. B. verschiedene Namen desselben Objektes wie $3\frac{4}{5} = \frac{19}{5} = 3{,}8$, Gleichwertigkeit bei Termen wie $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, Gleichungen $7x^2 + 2x - 24 = 0$). Mit Gleichungen werden also Beziehungen zwischen mathematischen Objekten (z. B. Zahlen, Größen oder Funktionen) und deren Eigenschaften ausgedrückt. Sie dienen als Werkzeug zur Formulierung und zum Lösen von Problemen.

Es kommt vor, dass Schülerinnen und Schüler immer wieder Fehlvorstellungen zum Gleichheitszeichen entwickeln (Winter, 1982):

- Das Gleichheitszeichen wird vornehmlich als Zuweisungszeichen verstanden und nicht als Beziehungszeichen. Demnach wird z. B. eine Gleichung wie 3 + 2 = 2 + 3 nicht akzeptiert, sondern neu dargestellt als 3 + 2 = 5 und 2 + 3 = 5.
- Auch bei z. B. 18 + 4 = 22 + 5 = 27 : 3 = 9 wird das Gleichheitszeichen ausschließlich als Handlungsauftrag betrachtet und damit falsch verwendet.
- Darstellungen ohne Operationszeichen, wie z. B. 5 = 5, werden nicht akzeptiert, da sie zu keiner Handlung anregen.
- Die Vorstellung von Gleichheitszeichen als Zuweisungszeichen ist dann verfestigt und ändert sich nicht wesentlich von der Grundschule bis in den Sekundarbereich, zum Teil sogar nicht bis in den tertiären Bereich.

Aus diesem Grund ist es unerlässlich, beide Vorstellungen von Gleichheitszeichen – Zuweisungs- und Beziehungszeichen – bereits in der Grundschule zu thematisieren, auch um den Übergang von der Arithmetik zur Algebra angemessen vorzubereiten (Winter, 1982).

Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen: Methoden
Die Lösungsmenge einer Gleichung ist die Menge L von Elementen aus der Grundmenge G, die die Gleichung zu einer wahren Aussage machen. Sind zwei oder mehr Gleichungen angegeben, spricht man von einem Gleichungssystem. Diese sind für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe relevant. Eine Lösung des Gleichungssystems muss alle Gleichungen simultan erfüllen. Um die Lösung einer Gleichung oder eines Gleichungssystems zu finden, gibt es verschiedene Methoden (Vollrath, 1994). Nachfolgend sollen diejenigen erwähnt werden, die im Unterricht eine Rolle spielen. Schon für die Grundschule sind einige von ihnen relevant.

Beim gedanklichen Lösen wird die (entsprechend einfache) Gleichung im Kopf gelöst. Beim systematischen Probieren wird die Lösung durch das Einsetzen verschiedener Zahlen und Überprüfen des jeweiligen Wahrheitsgehaltes der Gleichung gefunden.

Zum Beispiel kann die Aufgabe 4x + 8 = 2x +14 wie im Folgendem bearbeitet werden.

x	y = 4x + 8	z = 2x + 14	4x + 8 = 2x +14
0	8	14	f. A.
1	12	16	f. A.
2	16	18	f. A.
3	20	20	w. A.

Tabelle 2: Lösen einer Gleichung durch systematisches Probieren.

Die 3 ist also die Lösung der Gleichung 4x + 8 = 2x + 14.

Eine einfache Gleichung wird durch die Umkehroperation gelöst. Aus einer Addition wird eine Subtraktion, aus einer Multiplikation eine Division und umgekehrt. Beispielsweise wird bei der Gleichung 3x = 12 die Division verwendet (12 : 3 = 4). Somit folgt x = 4.

Wenn einer der Terme zwei miteinander verknüpfte Operationen enthält, so kann die Gleichung mittels eines Termvergleichs gelöst werden. Beispielsweise besteht die Gleichung 3x + 2 = 14 aus den beiden Termen 3x + 2 und 14. Vergleicht man diese, so kann man sie so darstellen, dass beide die 2 beinhalten: 3x + 2 = 12 + 2. Somit kommt man auf 3x = 12. Diese Terme können so dargestellt werden, dass beide die 3 enthalten: 3x = 3 · 4. Damit kommt man auf x = 4. Auch diese Denkweise sollte bereits in den Jahrgangsstufen 5 und 6 thematisiert werden.

Besteht eine Gleichung aus komplexer werdenden Zusammenhängen von additiven und multiplikativen Verknüpfungen, so führt das Lösen durch Gegenoperationen (Rückwärtsarbeiten) dazu, dass die Verknüpfungen (mithilfe der Gegenoperationen) aufgelöst werden.

Beispiel: x · 3 + 4 = 19

$$\begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow{\cdot 3} & x \cdot 3 & \xrightarrow{+\,4} & x \cdot 3 + 4 \\ = & & & & = \\ 5 & \xleftarrow[\mathbf{:\,3}]{} & 15 & \xleftarrow[-\,4]{} & \mathbf{19} \end{array}$$

Dieses Verfahren sollten die Schülerinnen und Schüler beim Lösen von Zahlenrätseln schon in der Grundschule kennenlernen und nutzen. Es bahnt das in der Sekundarstufe übliche Gleichungslöseschema an, bei dem dann allein die Umkehroperation notiert wird.

Zum Beispiel:

$$\begin{array}{lllll} -\,3 & 2x + 3 & = 13 & -\,3 \\ :\,2 & 2x & = 10 & :\,2 \\ & x & = 5 & \end{array}$$

2x + 3	=	13	| -3
2x	=	10	| :2
x	=	5	

Beim grafischen Lösen wird ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen gelöst. Die Terme werden als Funktionsterme interpretiert und die Graphen der Funktionen y = Term 1 und y = Term 2 dargestellt. Das Prinzip dieser Verfahren ist das geschickte Kombinieren der Gleichungen mit dem Ziel, aus dem Gleichungssystem eine Gleichung mit einer Variablen zu erhalten. Gesucht ist dann ein Zahlenpaar (x, y), welches beide Gleichungen gleichzeitig erfüllt und damit eine Lösung des linearen Gleichungssystems darstellt. Dabei soll die Verbindung zum grafischen Lösen von Gleichungssystemen aufgebaut werden (x-Wert und y-Wert des Schnittpunkts der beiden Graphen sind die Lösungen der Gleichungen). Beispielsweise werden bei $4x + 8 = 2x + 14$ zwei Graphen der beiden Termen gezeichnet, nämlich $y = 4x + 8$ und $y = 2x + 14$ (siehe Abbildung 3).

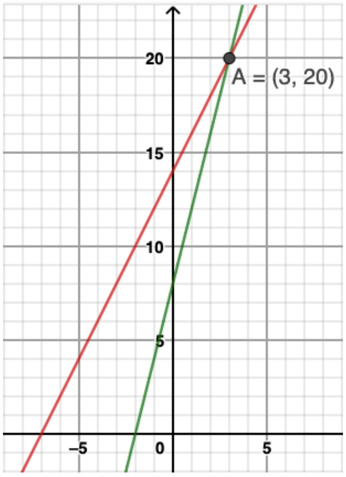


Abbildung 3: Grafisches Lösen des Gleichungssystems

Eine weitere Methode ist das Lösen von Gleichungen mithilfe einer Lösungsformel, das in der Sekundarstufe gelernt wird. Ein Beispiel ist die Lösungsformel für das Lösen einer quadratischen Gleichung in der Form

$x^2 + px^2 + q = 0$: $\quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$

Weitere Aspekte beim Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen
Die meisten linearen Gleichungen, die im Mathematikunterricht vorkommen, haben genau eine Lösung. Eine Gleichung ist eine erfüllbare Aussageform, wenn mindestens eine Zahl der Grundmenge zu einer wahren Aussage führt. Alle Zahlen, auf die das zutrifft, bilden die Lösungsmenge der Gleichung. Allerdings sollte nicht der Eindruck entstehen, dass Gleichungen in jedem Fall eindeutig lösbar wären.

Im Unterricht werden daher auch die zwei Sonderfälle betrachtet: Ein Gleichungssystem kann *keine* Lösung haben, z. B. $2(x + 1) = 2x + 3$, oder es können *unendlich viele* Lösungen bei sogenannten allgemeingültigen Gleichungen existieren, z. B. $2(x + 1) = 2x + 2$.

Im ersten Fall ist eine Gleichung eine unerfüllbare Aussageform, da die Lösungsmenge leer ist: Für keine Zahl aus der Grundmenge wird die Gleichung zur wahren Aussage. Im zweiten Fall ist die Gleichung eine allgemeingültige Aussageform: Alle Zahlen der Grundmenge führen zu wahren Aussagen. Handelt es sich um ein Gleichungssystem, dessen Gleichungen als Gerade im Koordinatensystem dargestellt werden, so sind diese im ersten Fall parallel und es gibt keinen Schnittpunkt, im zweiten Fall sind beide Geraden identisch.

Beim syntaktischen Umformen durch das Anwenden von Regeln wird zwischen Äquivalenzumformungen, Gewinnumformungen und Verlustumformungen unterschieden.

Bei Äquivalenzumformungen ändert sich die Lösungsmenge der Gleichung nicht (z. B. Lösungsformel für quadratische Gleichungen, Gauß'scher Algorithmus für lineare Gleichungssysteme).

Bei Gewinnumformungen kann die Erfüllungsmenge der Gleichung *vergrößert* werden (z. B. beide Seiten einer Gleichung quadrieren, mit einem ganzrationalen Term multiplizieren). Betrachtet man eine konkrete Gleichung wie z. B. $\sqrt{x+1} = x - 1$, so hat diese Gleichung die Lösungsmenge {3}. Aber wenn wir nun die beiden Seiten der Gleichung quadrieren, dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} x + 1 &= (x - 1)^2 \\ x + 1 &= x^2 - 2x + 1 \\ 0 &= x^2 - 3x \\ 0 &= x(x - 3) \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat aber zwei Lösungen: $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$.

Bei Verlustumformungen kann die Erfüllungsmenge der Gleichung *verkleinert* werden (z. B. wenn man aus den Termen auf beiden Seiten die Wurzel zieht oder beide Seiten durch einen rationalen Term dividiert). Betrachtet man eine konkrete Gleichung wie z. B. $x^2 + 2x = 0$. Diese Gleichung hat als Lösungsmenge {–2, 0}. Aber wir dividieren nun die beiden Seiten der Gleichung durch x:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x &= 0 \quad | :x \\ x + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Die Gleichung $x + 2 = 0$ hat aber als Lösungsmenge nur {–2}.

Für die Problematik von Gewinn- und Verlustumformungen sollte man die Schülerinnen und Schüler sensibilisieren.

Ein weiterer Aspekt, den man bei diesem Thema beachten sollte, ist, dass im Mathematikunterricht eine allzu starke Vereinfachung der Sprache nicht sinnvoll ist, da sie zu Verwechslungen, Unexaktheiten und Fehlern führen kann (Vollrath & Weigand, 2007). Eine häufig verwendete Floskel ist beispielsweise *auf die andere Seite bringen*. Diese kann zu folgendem Fehler führen: $x + 3 = 5$ aus *Ich muss 3 auf die andere Seite bringen, dabei geht das, was oben ist, nach unten* ergibt sich $x = \frac{5}{3}$.

Zusammenfassend ist es eine wichtige Aufgabe des Mathematikunterrichts, dass die Schülerinnen und Schüler ein Verständnis zum Vorgehen beim Lösen von Gleichungen entwickeln. Deshalb sollen die Schritte zum Umformen von Gleichungen immer wieder begründet und die Lösungen von den Schülerinnen und Schülern kritisch betrachtet werden. Ein mechanisches Umformen bzw. Abarbeiten der Umformungsschritte nach scheinbar willkürlichen Regeln soll von Anfang an vermieden werden. Das Lösen von Gleichungen durch Umformen benötigt sichere Kenntnisse der Termumformungsregeln. In der Praxis werden diese zum großen Teil parallel zur Gleichungslehre entwickelt.

Didaktische Modelle zum Lösen von Gleichungen

Zum Lösen von Gleichungen existieren unterschiedliche Modelle wie etwa das Waagemodell, das Boxenmodell (Knack-die-Box-Modell), die Zahlengerade und das Streifenmodell (Falt-Modell) (Barzel & Holzäpfel, 2011). Insbesondere im Anfangsunterricht eignet sich das Waagemodell, um Gleichungen und Äquivalenzumformungen zu veranschaulichen und Vorstellungen zum Lösen einfacher Gleichungen zu entwickeln. Der Lösungsweg entspricht konkreten Handlungen an der Waage. Der Grundgedanke besteht darin, dass eine Waage im Gleichgewicht bleibt, wenn auf beiden Waagschalen dasselbe geschieht. Ebenso bleibt eine Gleichung bestehen, wenn auf beiden Seiten dieselbe Operation angewendet wird. Daraus lassen sich mögliche Umformungsschritte beim Lösen von Gleichungen begründen wie z. B. auf beiden Seiten denselben Term addieren oder subtrahieren, beide Seiten mit derselben Zahl (außer 0) multiplizieren oder dividieren und die beiden Seiten der Gleichung vertauschen. Die (Balken-)Waage kann als realer Gegenstand benutzt werden oder nur als Vorstellungshilfe dienen, insbesondere wenn die Variable auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens auftritt. Allerdings ist das Waagemodell wie jedes Modell nur begrenzt einsetzbar. Es kann z. B. nur Gleichungen darstellen, bei denen ausschließlich positive Zahlen vorkommen. Es ist jedoch erwiesen, dass das Waagemodell syntaktische Fertigkeiten unterstützt und dabei hilft, das Gleichheitszeichen als Beziehungszeichen (Vergleichszeichen) besser erfassen zu können (Barzel & Holzäpfel, 2011).

Idee der funktionalen Zusammenhänge

Eine Funktion ist eine Relation zwischen zwei Mengen, die jedem Element der einen Menge (unabhängige Variable, *x*-Wert) genau ein Element der anderen Menge (abhängige Variable, y-Wert) zuordnet.

Bereits in der Grundschule und sogar schon im Anfangsunterricht kann ein erstes funktionales Denken entwickelt und geschult werden. Dieses beruht auf einer mengentheoretischen Sichtweise. Dabei spielt der Zuordnungsgedanke die entscheidende Rolle, wenn z. B. zwei Mengen gegeben sind. Zur Menge A gehören die Kinder einer Klasse und zur Menge B gehören alle Farben. Jedem Kind wird nun genau seine Lieblingsfarbe zugeordnet. Dabei entstehen Paare (Kind | Lieblingsfarbe). „Mengentheoretisch betrachtet stellen Funktionen die Beziehung zwischen zwei Mengen dar. Es entstehen also Paare (a,b)" (Büchter et al., 2019, S. 4).

Definiert wird eine Funktion wie folgt: Eine Funktion f ordnet jedem Element x einer Definitionsmenge D genau ein Element y einer Zielmenge Z zu. Anders gesagt: f: D → Z. Für das dem Element $x \in D$ zugeordnete Element der Zielmenge schreibt man im Allgemeinen f(x).

Funktionen sind eindeutige Abbildungen von einer Menge D auf eine Menge Z. Jedem x wird genau ein y zugeordnet (siehe Abbildung 4a).

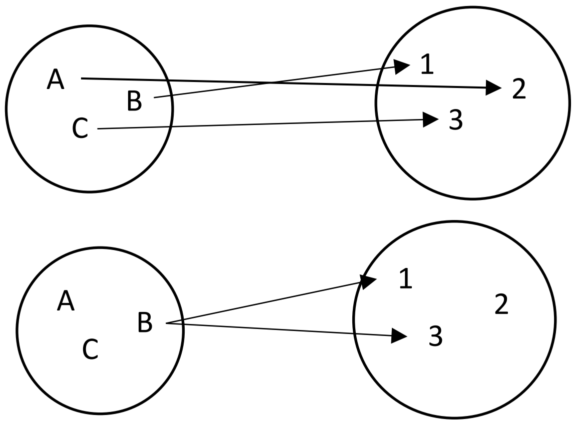


Abbildung 4a: Eindeutige Abbildungen
Abbildung 4b: Nichteindeutige Abbildungen sind keine Funktionen. Beispielsweise wird hier dem Buchstaben B die 1 und die 3 zugeordnet.

Ziel des Mathematikunterrichts muss es sein, dass die Schülerinnen und Schüler den Funktionsbegriff erfassen, Funktionstypen und ihre Eigenschaften kennen und sie zum Beschreiben und Herstellen von Zusammenhängen nutzen (Malle, 2000).

Zentrale Aspekte von Funktionen

„Funktionales Denken ist eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit Funktionen ist“ (Vollrath, 1989, S. 6). Dabei beschränkt sich funktionales Denken nicht auf den Funktionsbegriff oder auf einzelne Funktionsklassen, die in der Schule behandelt werden. Eine Schülerin oder ein Schüler denkt funktional, wenn sie/er ihre/seine Fähigkeiten aus dem Umfeld der Funktionen (u. a. Terme, Gleichungen, Operationen) zur Lösung eines gestellten Problems einsetzt. Hierzu müssen bestimmte Kompetenzen entwickelt werden, die zu Grundvorstellungen der Funktionen passen. Jede Lehrkraft muss dabei diese Kompetenzen im Blick haben und diese bei den Schülerinnen und Schülern entwickeln. Somit kann jede Lehrkraft schon einmal anhand der Schülerbeschreibung einschätzen, ob eine Schülerin bzw. ein Schüler funktional denkt (bzw. denken kann).

Funktionales Denken unterteilt sich in drei grundlegende Aspekte. Vollrath (1989), Büchter (2008) sowie Leuders und Prediger (2005) beschreiben die folgenden Grundvorstellungen, die nur in der Namensgebung etwas voneinander abweichen, inhaltlich aber größtenteils übereinstimmen:

a. Zuordnungsvorstellung

Die Zuordnungsvorstellung (Zuordnungsaspekt) umfasst, dass jedem Element x aus der Definitionsmenge genau ein Element *y* aus der Wertemenge zugeordnet wird. Beim Zuordnungsaspekt wird die Funktion nur lokal (mit einzelnen Wertepaaren) betrachtet. Es werden also Zusammenhänge zwischen zwei Größen beschrieben ($x \rightarrow y$ und $y = f(x)$). Hier wird im Allgemeinen die Frage fokussiert „Welche Größe wird einer anderen eindeutig zugeordnet?“ (Büchter, 2008) bzw. „Welche Größe ist von welcher abhängig?“ (Leuders & Prediger, 2005). Im Mathematikunterricht könnten konkrete Fragestellungen sein: „Zu welcher Masse gehört welcher Preis?“ oder „Welcher Funktionswert y gehört zu einem Argument x?“ (siehe Abbildung 5).

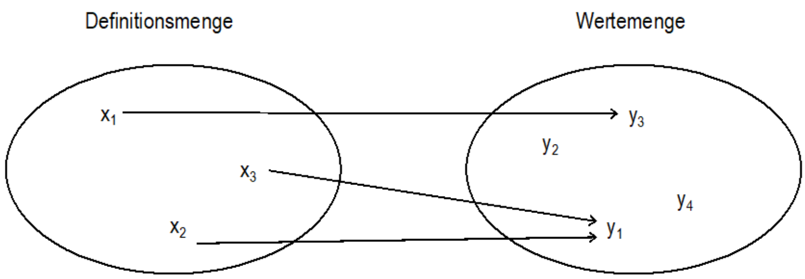


Abbildung 5: Veranschaulichung des Zuordnungsaspektes

b. Veränderungsvorstellung

Die Veränderungsvorstellung (Kovarianzvorstellung, Änderungsverhalten) nimmt die Änderung der abhängigen Variablen in Abhängigkeit von der Änderung der unabhängigen Variablen in den Blick. Verändert sich eine Größe, so verändert sich die zugeordnete Größe in bestimmter Weise und umgekehrt. Die Mengen sind also ggf. voneinander abhängig. Zusätzlich zur Zuordnung wird noch die Dynamik der Veränderung betrachtet. Hier steht also im Vordergrund, wie sich zwei Größen miteinander verändern. Eine typische Fragestellung ist: „Wie wirkt sich die Änderung einer Größe auf die andere Größe aus?“ oder anders gesagt „Wie wirkt sich die Veränderung der Argumente x auf die Funktionswerte y aus?“. Im Mathematikunterricht soll zunächst die Abhängigkeit zweier Größen mit Worten beschrieben oder durch die Betrachtung der Wertepaare formuliert werden (z. B. je mehr … desto mehr). Anschließend kann die Abhängigkeit zwischen Argument und Funktionswert auch in anderen Formen, z. B. einer Gleichung oder einer grafischen Darstellung ausgedrückt werden (siehe Abbildung 6). Mithilfe solcher Darstellungen können später die Begriffe *Steigungsverhalten* oder *Änderungsverhalten* aufgebaut werden.

c. Objektvorstellung

Bei Objektvorstellung (Vorstellung der Funktion als Ganzes) wird der Zusammenhang als Ganzes angeschaut und die Funktion als Objekt betrachtet bzw. „tritt uns als Objekt entgegen". Beispielsweise kann sie durch einen bestimmten Graphen oder symbolisch als Term oder Funktionsname dargestellt (siehe Abbildung 6) und darüber gesprochen werden. Dies geschieht beispielsweise, wenn Funktionen addiert oder subtrahiert werden. Eine typische Frage unter diesem Aspekt ist „Wie verändert sich der Graph der Funktion, wenn die Parameter der Funktion verändert werden?".

Nicht immer spielen alle drei Grundvorstellungen gleichzeitig eine Rolle, aber sie greifen ineinander über. Durch gezielte Aufgabenstellungen kann die Lehrkraft den Fokus auf eine bestimmte Grundvorstellung richten (siehe Fördermaterialien zur Idee der funktionalen Zusammenhänge).

Darstellen funktionaler Zusammenhänge

Ein weiterer Ansatz, funktionales Denken zu beschreiben, verwendet die vier wichtigsten Repräsentationsformen: verbale Beschreibung, numerisch als Tabelle, grafisch als Diagramm oder Graph und schließlich rein symbolisch als Term (Hußmann & Lackmann, 2011) (siehe Abbildung 6).

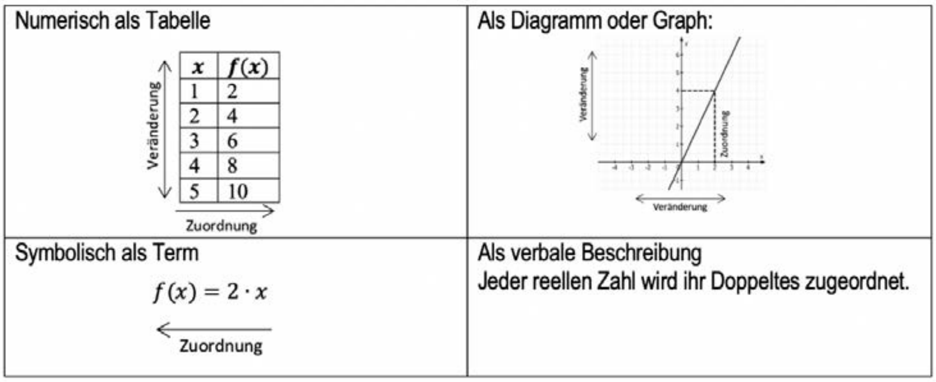


Abbildung 6: Unterschiedliche Darstellungsmöglichkeiten funktionaler Zusammenhänge

Wenn man von funktionalem Denken spricht, ist nicht nur die Verwendung unterschiedlicher Darstellungen gemeint, sondern auch das flexible Wechseln von einer Darstellungsform in eine andere. „Erst die Kenntnis dieser verschiedenen Gesichter und die Kompetenz, zwischen ihnen hin und her zu wechseln, zeugen von einem Verständnis von Funktionen und führen zu einem flexiblen Umgang mit ihnen. Es lohnt sich, auch mit Lernenden über die Frage zu reden, wieso man überhaupt zwischen den verschiedenen Darstellungsformen hin- und herwechseln will" (Leuders & Prediger, 2005, S. 4). Der Wechsel von Darstellungsformen ist verbunden mit einer Vielzahl mathematischer Tätigkeiten, wie das Ablesen von Werten, Skizzieren von Graphen, Werte ermitteln … (siehe Abbildung 7).

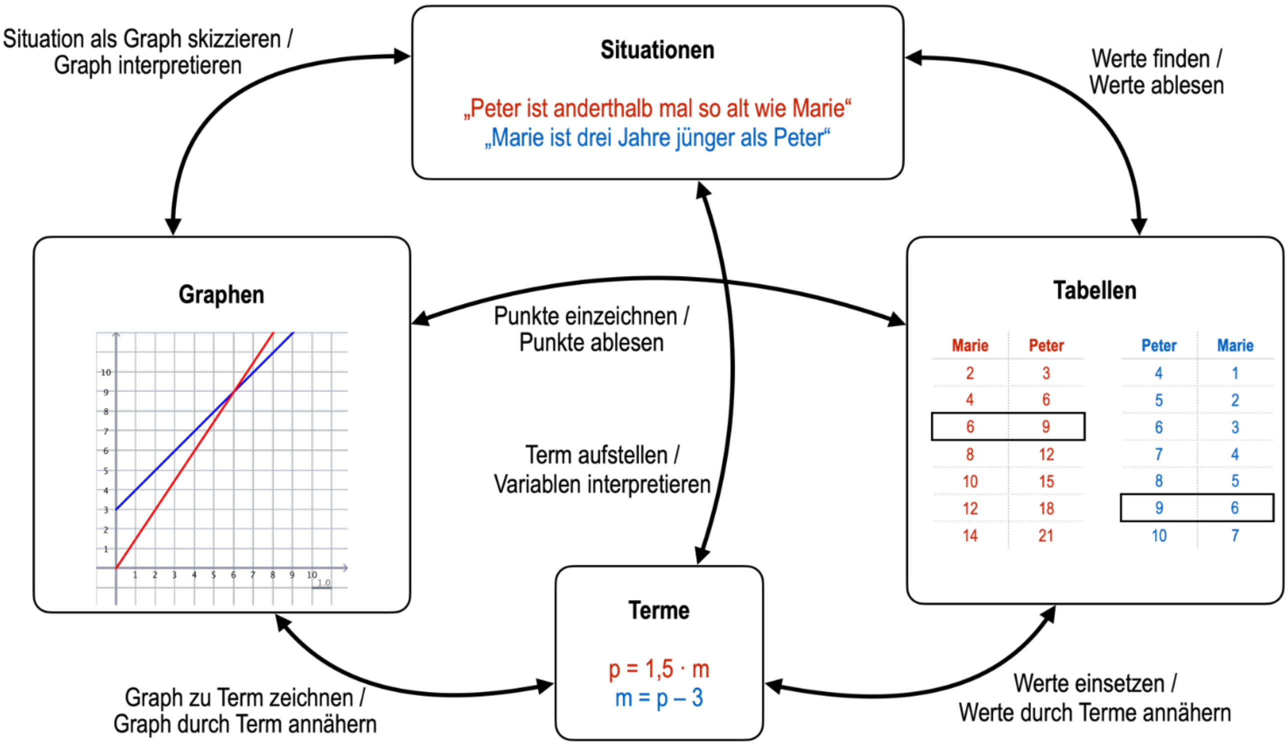


Abbildung 7: Vielfältige Tätigkeiten beim Darstellungswechsel (eigene Darstellung)

Potenzielle Schwierigkeiten mit dem funktionalen Denken

Auch wenn funktionale Zusammenhänge ein wesentlicher Bestandteil vieler Fächer (u. a. Mathematik, Naturwissenschaften, Politik) und Teil unseres Alltags sind, zeigen Studien immer wieder, dass Schülerinnen und Schüler erhebliche Schwierigkeiten im Umgang mit dieser Thematik haben (Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990). Schwierigkeiten treten unter anderem auf,

- wenn Funktionen rein abstrakte Objekte bleiben und keine Vorstellungen entwickelt werden,
- wenn Schülerinnen und Schüler nur Formeln und Gleichungen nutzen, um Dinge nach einem Algorithmus zu berechnen, den sie im Kern nicht verstanden haben,
- wenn Ergebnisse und Darstellungen nicht auf ihre Plausibilität geprüft werden können.

Um ein tieferes Verständnis von funktionalen Zusammenhängen zu entwickeln, ist es sinnvoll, dass die Schülerinnen und Schüler dabei handelnd tätig werden (z. B. durch Messprozesse).

Zum Beispiel kann man nach einem Lauf auf dem Schulhof in 30-Sekunden-Abständen den Puls messen.
Zuordnung: In einer Tabelle werden die Zeitpunkte und der gemessene Puls eingetragen.
Veränderung: Beantwortung von Fragen, z. B. „Wie verändert sich der Puls in gleichen Zeitabschnitten?“
Sicht als Ganzes: Betrachtung der Menge aller Wertepaare und Vergleich zu anderen Messungen.
Auch bei der grafischen Darstellung von Funktionen treten oft typische Fehler auf, z. B. bei der Beschriftung und Skalierung der Achsen, Probleme beim Einzeichnen und Ablesen von Punkten, Probleme beim Herstellen eines Bezuges zur Sachsituation, Verwechslung des Graphen mit einem Bild (z. B. Beschreibung einer monoton steigenden Funktion mit dem Satz „Ich gehe einen Berg hinauf.“) oder Verwechslung von Bestand und Veränderung (siehe dazu auch Roth, o.J.).

Im Mathematikunterricht der Sekundarstufe erfolgt zunehmend eine Formalisierung des Funktionsbegriffs. Die Zuordnungen von konkreten Größen aus dem Alltag (z. B. Massen, Preise) werden durch abstraktere Zuordnungen abgelöst. Um die Grundvorstellungen zu festigen, ist es notwendig, die abstrakten Zuordnungen immer wieder auf konkrete Sachzusammenhänge zurückzuführen.

Literatur und weiterführende Literatur

Barzel, B. & Herget, W. (2006). Zahlen, Symbole, Variablen – abstrakt und konkret. Ein Plädoyer für einen lebendigen Umgang mit Termen. mathematik lehren, 136, 4–9.

Barzel, B. & Holzäpfel, L. (2011). Gleichungen verstehen. mathematik lehren, 169, 2–7.

Büchter, A. (2008). Funktionale Zusammenhänge erkunden. mathematik lehren, 148, 4–10.

Büchter, A., Glade, M., Herold-Blasius, R., Klinger, M., Schacht, F. & Scherer, P. (Hrsg.). (2019). Vielfältige Zugänge zum Mathematikunterricht. Konzepte und Beispiele aus Forschung und Praxis. Berlin, Heidelberg, Deutschland: Springer Spektrum.

Embacher, F. (o.J.). Grundsätzliches zu Termen und Variablen. Skripten für einen schnellen Einstieg. mathe-online.at. URL: https://www.mathe-online.at/skripten/var/variable_grundsaetzliches.pdf (9.12.2020)

Hußmann, S. & Laakmann, H. (2011). Eine Funktion – viele Gesichter. Darstellen und Darstellungen wechseln. Praxis der Mathematik in der Schule, 38(53), 2–13.

Kultusministerkonferenz (2004). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss. Bonn: KMK.

Kultusministerkonferenz (2003). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Bonn: KMK.

Jordan, A. & vom Hofe, R. (2008). Diagnose von Schülerleistungen. mathematik lehren, 150, 4–12.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. Review of Educational Research, 60(1), 1–64.

Leuders, T. & Prediger, S. (2005). Funktioniert‘s? – Denken in Funktionen. Praxis der Mathematik in der Schule, 2(47), 1–7.

Malle, G. (1993). Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Wiesbaden, Deutschland: Vieweg.

Malle, G. & Bürger, H. (2000). Funktionen untersuchen. mathematik lehren, 103, 1–24

Roth, J. (o.J.). Didaktik der Algebra. Kapitel 3: Funktionen. Vorlesungsfolien. Abgerufen von https://dms.uni-landau.de/roth/lehre/skripte/did_algebra/did_algebra_3_funktionen.pdf (10.12.2020)

Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Wissenschaft Berlin, Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg (2015). (Hrsg.). Rahmenlehrplan Jahrgangsstufen 1-10. Teil C, Mathematik. Berlin, Potsdam, Deutschland: LISUM.

Siller, H.-S. & Roth, J. (2016). Herausforderung Heterogenität: Grundvorstellungen als Basis und Bezugsnorm − das Beispiel Terme. Praxis der Mathematik in der Schule, 58(70), 2–8.

Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. Journal für Mathematik-Didaktik, 10(1), 3–37. https://doi.org/10.1007/BF03338719

Vollrath, H.-J. (1994). Algebra in der Sekundarstufe. Mannheim, Leipzig, Wien, Zurich, Deutschland: Bibliographisches Institut Wissenschaftsverlag.

Vollrath, H.-J. & Weigand, H.-G. (2007). Algebra in der Sekundarstufe. München, Deutschland: Springer Spektrum.

vom Hofe, R. (1995). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Heidelberg, Berlin, Oxford, Deutschland: Spektrum Akademischer Verlag.

Winter, H. (1982). Das Gleichheitszeichen im Mathematikunterricht der Primarstufe. mathematica didactica, 5(4), 185–211.

Idee der Variable als Platzhalter, Unbekannte, Unbestimmte, Veränderliche		Idee der Operation als Beschreibung von Veränderungen

Idee der Terme

Aufstellen und Interpretieren von Termen

- Strukturieren und Beschreiben von Mustern und Bildern mit Worten
- Beschreiben von Mustern, Bildern und Sachzusammenhängen mit Termen
- Entwickeln von Mustern, Bildern und Sachzusammenhängen zu Termen
- Identifizieren, Interpretieren und Substituieren von Teiltermen
- Interpretieren von Termen mit Variablen als Operatoren

Vergleichen von Termen

- Erkennen und Finden von gleichwertigen Termen in Mustern, Bildern und Sachzusammenhängen
- Erkennen von Termen mit gleichem Termwert durch Einsetzen
- Untersuchen von Termbeziehungen unter Nutzung von Rechenregeln, Rechengesetzen und Umkehroperationen
- Herstellen von äquivalenten Termen durch Umformen

Idee der Gleichungen

Aufstellen und Interpretieren von Gleichungen

- Aufstellen von Gleichungen zu Bildern und Sachzusammenhängen
- Zeichnen von Bildern, Erstellen von Zahlenrätseln und Finden von Sachzusammenhängen zu Gleichungen

Lösen von Gleichungen

- Finden von Lösungen in informellen Formaten durch systematisches Probieren und Rückwärtsarbeiten
- Bestimmen der Lösungsmengen von Gleichungen durch systematisches Probieren, Rückwärtsarbeiten und mithilfe grafischer Darstellungen
- Bestimmen der Lösungsmengen von Gleichungen durch Äquivalenzumformungen

Validieren und Interpretieren von Lösungen

- Überprüfen des Wahrheitsgehalts der Gleichung
- Überprüfen der Lösung im Sachzusammenhang bzw. Ziehen von Schlussfolgerungen aus Lösungen

Idee der funktionalen Zusammenhänge

Zuordnungsvorstellung

- Erfassen, Strukturieren und Beschreiben von Bilder- und Zahlenfolgen mit Worten und
- Betrachten, Beschreiben und Darstellen der Zuordnung einer Größe zu einer anderen

Veränderungsvorstellung

- Fortsetzen von Bilder- und Zahlenfolgen
- Untersuchen und Beschreiben der Art der Abhängigkeit zweier Größen (wie sich zwei Größen miteinander verändern)

Objektvorstellung

- Untersuchen und Beschreiben von Eigenschaften zur Klassifizierung von Funktionen
- Untersuchen von Verknüpfungen von Funktionen

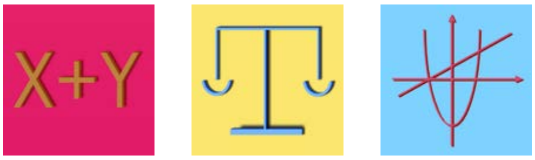
Diagnoseaufgaben

Gleichungen und Funktionen

Terme, Niveaustufen B – G

Gleichungen, Niveaustufen B – G

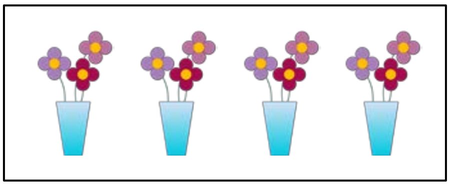
Zuordnungen, Niveaustufen B – G



Leitidee Gleichungen und Funktionen (B) – Diagnoseaufgaben zu Termen

Aufgabe 1

a) Was siehst du auf dem Bild?



- Schreibe möglichst genau auf. Verwende auch Zahlen.

____

____

____

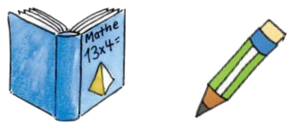
b) Susi hat 50 Bonbons. Davon verschenkt sie 30 Bonbons in ihrer Klasse.

- Schreibe eine passende Aufgabe auf.

c) • Zeichne ein Bild zur Aufgabe $\boxed{5 \cdot 3}$.

d) Pia kauft ein Buch und 4 Stifte.

Sie schreibt die Aufgabe auf: $1 \cdot 3\,€ + 4 \cdot 2\,€$

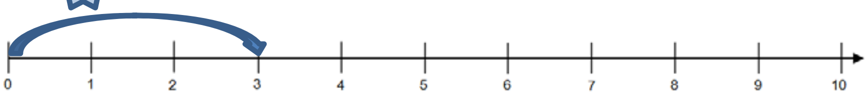


3 € **2€**

- Unterstreiche in der Aufgabe, an welcher Stelle Pia den Preis für <u>alle</u> Stifte berechnet.

e) Das Zeichen  bedeutet: Rücke immer drei Schritte weiter.

Für  zeichnet Susi am Zahlenstrahl:



- Zeichne **3** ·  auf dem Zahlenstrahl ein. Beginne bei 0.

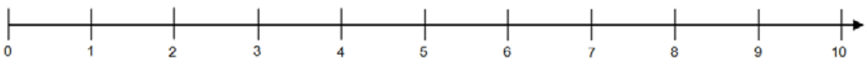


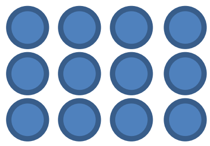
Bild 1: „Blumenvase", Pixabay.com, CC0 *Bild 2: „Buch", erstellt mit Worksheet Crafter* *Bild 3: „Stift", erstellt mit Worksheet Crafter*

Leitidee Gleichungen und Funktionen (B) – Diagnoseaufgaben zu Termen

Aufgabe 2

a) Tom sagt:

In dem Bild sehe ich die Aufgabe **3 · 4**.



- Schreibe eine weitere Aufgabe auf, die zum Bild passt. ✎ ______________________________
- Kreise im Bild so ein, dass man deine Aufgabe erkennt.

b) Alle Aufgaben in einem Paket haben das gleiche Ergebnis.

- Welche Zahl passt für ☐? Probiere.

7	8	20	30	35

5 + 5
4 + 6
3 + 7
2 + ☐

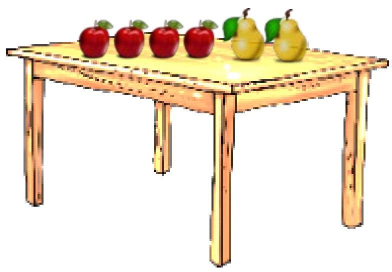
20 – 5
23 – 8
45 – 30
☐ – 15

- Begründe deine Entscheidung.

✎ ____

____

c) Tom und Lisa sehen Äpfel und Birnen auf dem Tisch liegen.



Tom schreibt zum Bild die Aufgabe: 4 + 2.

Lisa sagt: „Die Aufgabe heißt 2 + 4.“

- Wer hat Recht? Begründe.

✎ ____

____

d) Die Aufgaben haben das gleiche Ergebnis.

- Ergänze die fehlenden Zahlen.

2 + 2 + 2 + 2	4 + 4	6 + ___	4 · ___

Bild 4: „Junge“, Pixabay.com, CC0 Bild 5: „Tisch“, erstellt mit Worksheet Crafter Bild 6: „Apfel“, Pixabay.com, CC0 Bild 7: „Birne“, Pixabay.com, CC0

Leitidee Gleichungen und Funktionen (C) – Diagnoseaufgaben zu Termen

Aufgabe 1

a) Für eine Theateraufführung wurden Stühle aufgestellt.

- Wie kannst du die Anzahl aller Stühle bestimmen, ohne alle zu zählen?
  Beschreibe die Aufstellung der Stühle möglichst genau.

b) Susi fährt von Montag bis Freitag täglich 10 km mit dem Fahrrad.
Am Wochenende fährt sie insgesamt 30 km.

- Schreibe einen passenden Term auf.

c) $\boxed{3 \cdot 4 + 2}$

Welche Situation passt zu diesem Term?

- Kreuze an und begründe deine Entscheidung.

☐ Auf dem Tisch liegen dreimal vier Stifte und dreimal zwei Hefte.

☐ Auf dem Tisch liegen dreimal vier Stifte und zwei Hefte.

☐ Auf dem Tisch liegen drei Hefte und zweimal vier Stifte.

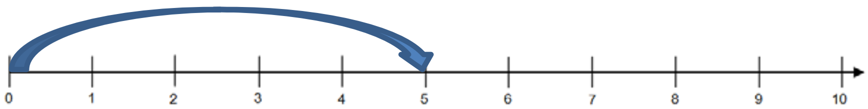
Bild 1: „Stühle", erstellt mit Worksheet Crafter

d) Auf einem Bauernhof leben 3 Katzen mit je 4 Beinen und einige Hühner mit je 2 Beinen.

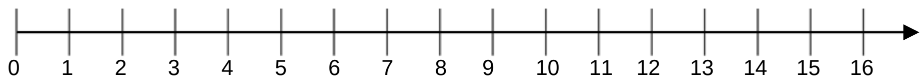
Lisa schreibt: $\mathbf{3 \cdot 4 + \square \cdot 2}$

- Unterstreiche im Term, an welcher Stelle Lisa die Gesamtzahl aller Hühnerbeine berechnet.

e) ☺ bedeutet: Immer **5 Schritte nach rechts**.



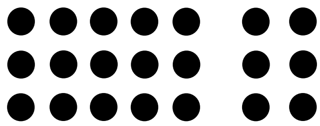
- Zeichne am Zahlenstrahl **3 · ☺ – 4** ein. Beginne bei 0.



Aufgabe 2

a) Tim sieht in diesem Bild den Term $\boxed{\mathbf{3 \cdot 5 + 3 \cdot 2}}$.

- Schreibe einen anderen Term für dieses Bild auf.



b) Der Termwert (Ergebnis) soll immer gleich sein.

- Setze die fehlende Zahl ein.

$\boxed{100 - 60}$ $\boxed{3 \cdot 10 + \square}$

- Finde zwei weitere Terme. ____

____

c) Gegeben ist das Pfeilbild.

$$\boxed{10} \xrightarrow{+\,5} \boxed{} \xrightarrow{\cdot\,2} \boxed{}$$

Tina hat das Pfeilbild ergänzt.

$$\boxed{10} \xrightarrow{+\,5} \boxed{15} \xrightarrow{\cdot\,2} \boxed{30}$$

- Überprüfe, ob Tina richtig gerechnet hat. Ergänze das Pfeilbild.

$$\boxed{10} \xleftarrow[\boxed{}]{} \boxed{15} \xleftarrow[\boxed{}]{} \boxed{30}$$

- Warum kannst du so überprüfen? Erkläre.

d) • Markiere alle Terme, die den gleichen Termwert (Ergebnis) haben wie $\boxed{6 + 6 + 6 + 14 + 14}$

$6 \cdot 14$	$3 \cdot 6 + 2 \cdot 14$	$2 \cdot 20 + 6$
$18 + 28$	$5 \cdot (6 + 14)$	$3 \cdot 6 + 3 \cdot 14$

- Begründe, warum diese Terme den gleichen Termwert (Ergebnis) haben.

Leitidee Gleichungen und Funktionen (D) – Diagnoseaufgaben zu Termen

Aufgabe 1

a) Kati kauft ein Meerschweinchen. Das Meerschweinchen kostet 35 €.
Für das Meerschweinchen kauft sie einen Käfig, ein Haus und Futternäpfe, die zusammen 49,90 € kosten.
Jeden Monat muss sie für 4,50 € Streu kaufen und eine Packung Futter für 28 €.

Wofür muss Kati nur einmal Geld ausgeben?

- Schreibe auf.

____

____

b) Susi bekommt jeden Monat 5 € Taschengeld und an ihrem Geburtstag zusätzlich 20 € geschenkt.
Mit welchem Term kann man ausrechnen, wie viel Geld Susi in diesem Jahr bekommt?

- Schreibe einen passenden Term auf.

c) Auf dem Parkplatz einer Reifenwerkstatt stehen Fahrzeuge.
Alle Fahrzeuge benötigen neue Reifen.

Der Chef der Werkstatt sagt: „Mit $\boxed{\mathbf{10 \cdot 2 + x \cdot 4}}$ kann man ausrechnen, wie viele Reifen gekauft werden müssen.“

Welche Situation passt zu seinem Term?

- Kreuze an und begründe deine Entscheidung.

☐ Auf einem Parkplatz stehen 10 Motorräder und eine unbekannte Anzahl an Fahrrädern.

☐ Auf einem Parkplatz stehen 10 Motorräder und eine unbekannte Anzahl an Autos.

☐ Auf einem Parkplatz stehen eine unbekannte Anzahl Motorräder und 4 Autos.

____

____

Bild 1: „Meerschwein“, erstellt mit Worksheet Crafter *Bild 2: „Motorrad“, erstellt mit Worksheet Crafter* *Bild 3: „Auto“, erstellt mit Worksheet Crafter*

Kugel Eis 0,90 €

Tasse Kaffee 1,50 €

Stück Kuchen 2 €

d) Familie Sommer fährt an einem Sonntagnachmittag in ein Café.
Mit diesem Term kann man ausrechnen, wie viel die Familie bezahlen muss.

$\boxed{2 \cdot 1{,}50\,€ + x \cdot 0{,}90\,€ + 2\,€}$

- Beschreibe anhand der Teilterme, was die Familie bestellt hat.

2 · 1,50 € ____________________

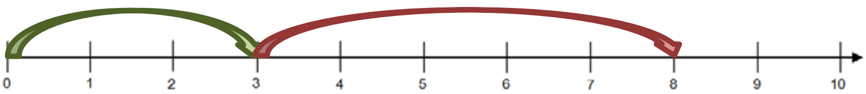
x · 0,90 € ____________________

2 € ____________________

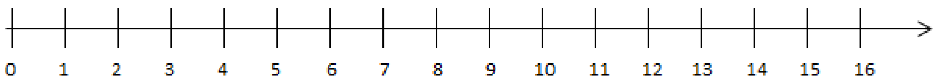
e) Das Zeichen ☺ bedeutet: Immer 3 Schritte nach rechts.

Das Zeichen ☾ bedeutet: Immer 5 Schritte nach rechts.

Susi zeichnet ☺ + ☾ am Zahlenstrahl ein. Beginne bei 0.



- Zeichne 2 · ☾ + ☺ am Zahlenstrahl ein. Beginne bei 0.



Aufgabe 2

a) Familie Müller zahlt monatlich 460 € Miete und 40 € für Strom.

Mit dem Term **12 · 460 € + 12 · 40 €** kann man ausrechnen, wie viel Geld Familie Müller im Jahr für Miete und Strom insgesamt ausgibt.

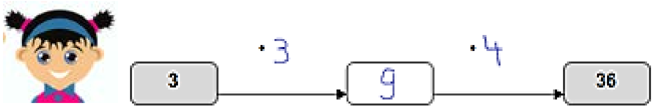
- Schreibe einen weiteren Term auf, mit dem man die Gesamtkosten berechnen kann.

b) Alle Terme sollen den gleichen Termwert haben.

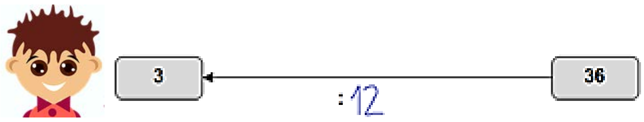
- Welche Zahlen musst du für x einsetzen? Schreibe auf.

15 · x	5 · 10 + x · 10	$\frac{1}{2} \cdot x$	3 · (10 + x)
x = <u>10</u>	x = ______	x = ______	x = ______

c) Tina ergänzt das Pfeilbild.



Leon überprüft mit einer Umkehraufgabe, ob Tina richtig gerechnet hat.



- Erkläre, warum Leon geteilt durch 12 rechnen darf.

✎ ____

____

d) Beide Terme haben denselben Wert.

156 : 3 + 102 : 3	(156 + 102) : 3

- Begründe.

✎ ____

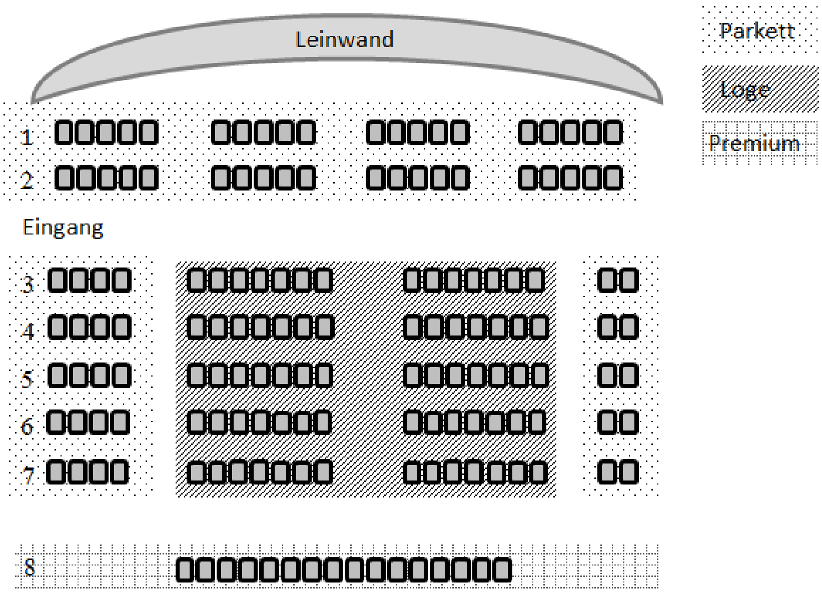
____

Bild 4: „Mädchen Zöpfe“, erstellt mit Worksheet Crafter *Bild 5: „Junge“, erstellt mit Worksheet Crafter*

Leitidee Gleichungen und Funktionen (E) – Diagnoseaufgaben zu Termen

Aufgabe 1

a)



- Beschreibe den Saalplan des Kinos.

- Wie kannst du herausbekommen, wie viele Plätze es in dem Kinosaal gibt, ohne sie alle zu zählen?

b) In einem Autoverleih wird die Gebühr für das Ausleihen eines Transporters so berechnet:

20,00 € Grundpreis zuzüglich 0,10 € pro gefahrenem Kilometer

- Schreibe einen Term für die Gebühr auf, wenn Herr Müller 50 Kilometer fahren möchte.

___

Herr Müller möchte vor dem Ausleihen diese Gebühr für eine beliebige Anzahl von Kilometern berechnen.

- Schreibe einen Term für die Gebühr auf.

___

c) Sina ist im Supermarkt.

Bild 1: Supermarktregal[1]

- Schreibe eine passende Situation zu dem Term auf. $\boxed{8 \cdot a + 3 \cdot b}$

d) Für ein Fest am Schuljahresende werden 300 Flaschen Limonade, 20 Packungen Grillwürste und 180 Brötchen eingekauft. In jeder Wurstpackung sind 6 Würste.

Limonade	1,20 € pro Flasche
Grillwurst	5,40 € je Packung
Brötchen	27 Cent je Stück

Tim hat einen Term erstellt, der den Gesamtpreis für den Einkauf beschreibt.

$$\boxed{\mathbf{300 \cdot 1{,}20 + 120 \cdot 5{,}40 + 180 \cdot 27}}$$

- Ermittle, welche Teile des Terms richtig erstellt wurden und bei welchen Teilen des Terms Tim Fehler gemacht hat. Begründe, warum diese Teile fehlerhaft sind.

e) g bedeutet: „Eine Zahl wird vervierfacht“.

$\boxed{x = g + 4}$

- Berechne den Termwert x für die Zahl 8.

Aufgabe 2

a) Jan behauptet, die Terme $\boxed{(2 + 3) \cdot x}$ und $\boxed{2 + 3 \cdot x}$ sind gleich.

- Hat Jan Recht? Begründe deine Entscheidung.

---

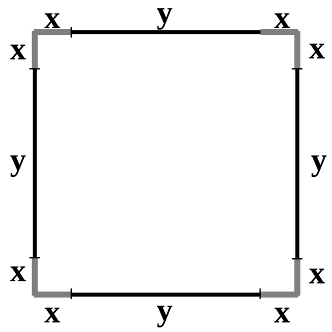
[1] © Viscious-Speed, 2015, Pixabay-Lizenz. Verfügbar unter: https://pixabay.com/de/supermarktregal-produkte-imbisse-1094815 (Zugriff 30.01.19)

b) Nebenstehend ist ein Quadrat dargestellt.

Marco berechnet den Umfang mit dem Term:

$\boxed{x+y+x + x+y+x + x+y+x + x+y+x}$.

Lisa rechnet mit dem Term $\boxed{4 \cdot (2x + y)}$.



- Begründe, warum beide Terme zur Berechnung des Umfanges richtig sind.

c) • Bestimme die Termwerte für die vorgegebenen Zahlen (x).

- Setze auch eine selbstgewählte Zahl ein.

x	2 · x + 6	2 · (x + 6)	2 · (x + 3)	x + 6 + x
3				
5				

- Vergleiche die Termwerte innerhalb der Zeile. Was stellst du fest?

d) Gegeben ist der Term $3 \cdot (2x + 4)$.
Welche der folgenden Terme ist dem gegebenen Term gleichwertig? Begründe.

A	**B**	**C**	**D**
$6x + 4$	$6 \cdot (x + 2)$	$6 \cdot (x + 4)$	$6x + 12$

Leitidee Gleichungen und Funktionen (F) – Diagnoseaufgaben zu Termen

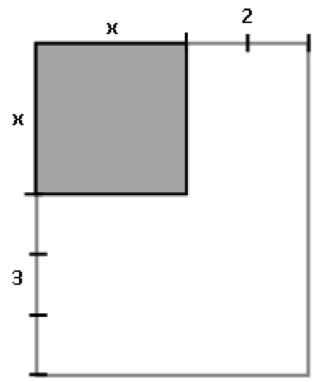
Aufgabe 1

a) Lea geht bei den Nachbarn Babysitten. Sie bekommt pro Stunde 7,50 €. Außerdem geht sie mit dem Hund ihrer Tante spazieren und bekommt dafür jedes Mal 3,00 €.

- Beschreibe, wie Lea ausrechnen kann, wie viel Geld sie in einem Monat verdient.

b)

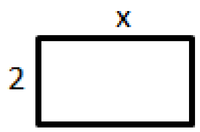
- Gib einen Term an, der den Flächeninhalt des Rechteckes beschreibt.



____

c) Die Seiten des Rechtecks unten sollen verlängert werden. Der Term $\boxed{4 \cdot x + 6}$ beschreibt den Umfang des neu entstandenen Rechtecks.

- Ergänze in der Zeichnung das neue Rechteck.



d) Für ein Fest am Schuljahresende werden 15 Getränkekästen, 120 Grillwürste und 180 Brötchen eingekauft. Jeder Getränkekasten enthält 20 Flaschen, in jeder Wurstpackung sind 6 Würste, die Brötchen sind in Tüten zu jeweils 15 Stück abgepackt.

x – Preis für einen Getränkekasten
y – Preis für eine Packung Wurst
z – Preis für ein Brötchen

- Prüfe, welcher Term den Gesamtpreis des Einkaufs beschreibt. Kreuze an.

☐ 15x + 20y + 15z	☐ 300x + 20y + 180z	☐ 15x + 20y + 180z

- Begründe, warum die anderen Terme falsch sind.

In einem anderen Einkaufsmarkt werden die Preise anders angegeben:
a – Preis für eine einzelne Flasche
b – Preis für eine Wurstpackung
c – Preis für eine Tüte Brötchen.

- Schreibe einen Term mit a, b und c auf, der den Gesamtpreis für denselben Einkauf beschreibt.

____

e) g bedeutet: „Eine Zahl wird verfünffacht."

$\boxed{x = (g^2 + 4)}$

Berechne den Termwert x für die Zahl 6.

Aufgabe 2

a) Ein Schüler hat den folgenden Term umgeformt: $\boxed{(x + 5) \cdot (x - 3)}$

Dabei hat er Fehler gemacht. Sein Ergebnis ist:

$\boxed{x - 3x + 5x + 15}$

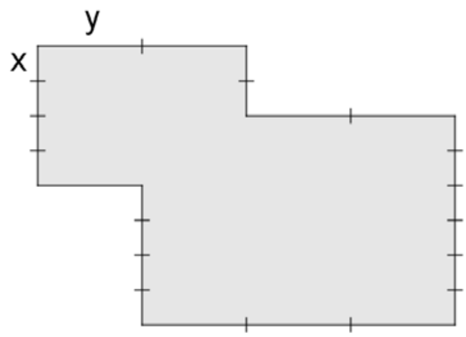
- Unterstreiche die Fehler.
- Schreibe die richtige Umformung auf und fasse deinen Term zusammen.

b) Nebenstehend ist eine Fläche dargestellt.

Nelly berechnet den Umfang der Fläche mit dem Term $\boxed{2 \cdot (8x + 4y)}$.

Lars rechnet mit dem Term $\boxed{16x + 8y}$.

- Begründe, warum beide Terme zur Berechnung des Umfangs richtig sind.



c)

- Bestimme die Termwerte für die vorgegebenen Zahlen (x).
- Setze auch mindestens eine selbstgewählte Zahl ein.

	Term 1	**Term 2**	**Term 3**	**Term 4**
x	**$(x + 5)^2$**	**$x^2 + 25$**	**$2x + 10$**	**$x^2 + 10x + 25$**
3				
−3				

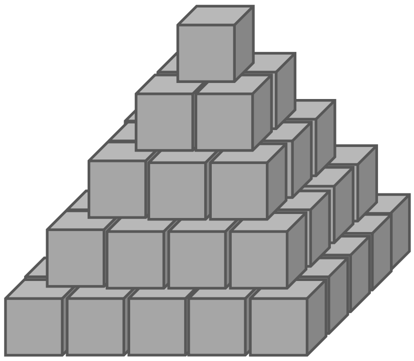
- Vergleiche die Termwerte. Was stellst du fest?

d) Gegeben ist der Term $(x + 4) \cdot (x + 4)$.
Welche der folgenden Terme sind dem gegebenen Term gleichwertig? Begründe.

A	**B**	**C**	**D**
$x + 4x + 4$	$(x + 4)^2$	$x^2 + 16$	$x^2 + 8x + 16$

Leitidee Gleichungen und Funktionen (G) – Diagnoseaufgaben zu Termen

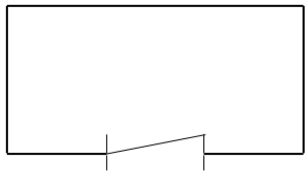
Aufgabe 1



a) Martin hat Würfel zu einer quadratischen Pyramide aufgestapelt.

- Beschreibe ein Vorgehen, mit dem die Anzahl der Würfel ermittelt werden kann.

b) Ein rechteckiges Grundstück ist doppelt so lang wie breit.
Das Eingangstor hat eine Breite von 2,50 m.
Das Grundstück soll eingezäunt werden. Am Tor ist kein Zaun.

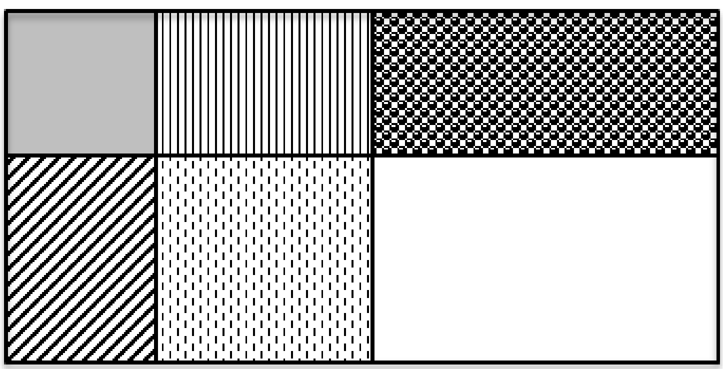


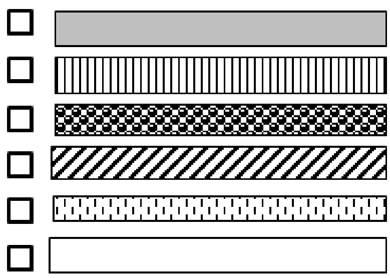
- Stelle einen Term mit einer Variablen auf, der die Gesamtlänge des Zauns angibt.
- Formuliere deine Überlegungen, die zu diesem Term führen.

c) Der Term stellt den Flächeninhalt einer Fläche in dem Rechteck dar:

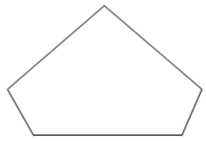
$$\boxed{a \cdot (a + b + c) - a \cdot (a + b)}$$

- Welche Fläche beschreibt den Term? Kreuze an. Erläutere deine Entscheidung.





d) Der Umfang dieses Fünfecks kann mit dem Term **3a + 2b** angegeben werden.



- Gib die Bedeutung von a und von b an.

Das gegebene Fünfeck wird verändert. Die längeren Seiten werden verdoppelt und die kürzeren Seiten um 3 cm verlängert.

- Schreibe mit den Variablen a und b einen Term für den Umfang dieses Fünfecks auf:

____

e) p bedeutet: „Eine Zahl wird quadriert.“

$\boxed{x = 5p + 1}$

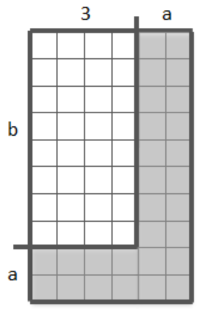
Berechne den Termwert x für die Zahl 10.

Aufgabe 2

a) Welche der folgenden Terme sind gleichwertig zum Term **2x · (x + 1)**?

- Kreuze an. ☐ $2x^2 + 1$ ☐ $3x + 1$ ☐ $2x^2 + 2x$ ☐ $3x + 2x$ ☐ $2 \cdot (x^2 + x)$
- Begründe deine Entscheidung.

b) Die graue Fläche in dem Rechteck kann man mit dem Term **$A = (a + 3) \cdot a + ab$** berechnen.



- Stelle einen weiteren Term zur Berechnung des Flächeninhalts auf.

____

- Formuliere deine Überlegungen, die zu diesem Term führen.

c) Bestimme die Termwerte für die vorgegebenen Zahlen (a und b).

		Term 1	**Term 2**	**Term 3**	**Term 4**
a	**b**	**$a \cdot b + a \cdot (a + b)$**	**$a^2 + 2a \cdot b$**	**$a^2 + b + a \cdot b$**	**$(a + b)^2 - b^2$**
1	**3**				
3	**1**				
2	**5**				

- Vergleiche die Termwerte. Welche Terme sind gleichwertig?

d) Gegeben ist der Term **$(x + 3)^2 - 2$** .

- Ermittle einen äquivalenten Term ohne Klammern.

Leitidee Gleichungen und Funktionen (B) – Diagnoseaufgaben zu Gleichungen

Aufgabe 1

a) In einer 3. Klasse sind 11 Mädchen und 13 Jungen. Wie viele Kinder sind es insgesamt?

- Schreibe eine passende Aufgabe zum Text.

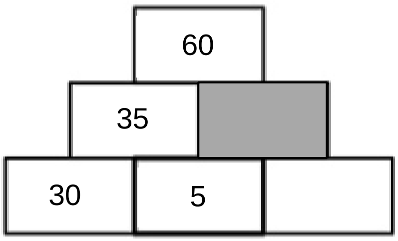
b) • Zeichne ein Bild so, dass es zur Aufgabe **12 = 3 · 4** passt. Begründe.

Mein Bild:

Aufgabe 2

a) Du suchst die Zahl im grauen Stein.

- Beschreibe, wie du rechnest.



____

b) Lisa hat in diese Aufgabe | 35 + 40 = 20 + ▢ | für den Platzhalter ▢ nacheinander

die Zahlen | 35 | | 45 | | 55 | eingesetzt.

| 35 + 40 = 20 + $\boxed{35}$ |

| 35 + 40 = 20 + $\boxed{45}$ |

| 35 + 40 = 20 + ▢ |

- Ergänze die fehlende Zahl für den Platzhalter.

- Welche Aufgabe stimmt? Rechne nach und kreise die richtige Aufgabe ein.

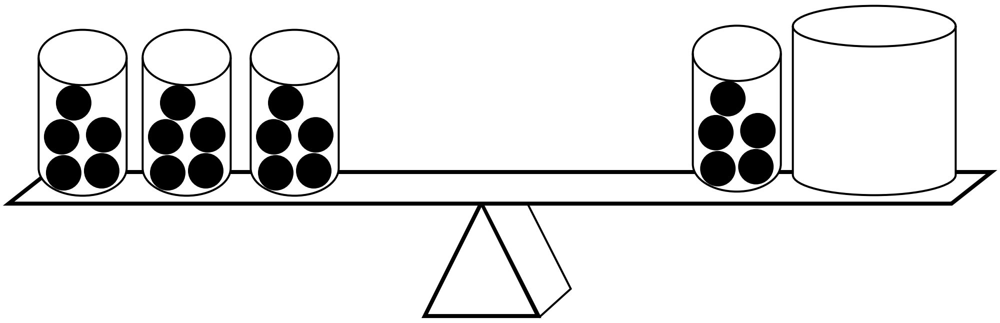
- Ergänze den Lückentext.

Die Aufgabe stimmt, wenn Lisa für ▢ = _____ *einsetzt,*

weil ____.

c) Auf beiden Seiten der Waage sollen gleich viele Kugeln sein.

- Zeichne die fehlenden Kugeln ein.



Aufgabe 3

a) Schaue dir jede Zeile genau an.

- Welche Aufgabe ist richtig? Kreuze an.
- Begründe deine Entscheidung.

18 = 12 + 5 ☐ ✎ ____________________

10 + 10 = 15 + 5 ☐ ✎ ____________________

5 · 8 = 26 + 14 ☐ ✎ ____________________

b) Die Katzen und Hühner auf dem Bauernhof haben insgesamt 20 Beine.

Susi zeichnet und antwortet:

- Die Antwort *„4 Katzen und 3 Hühner"* ist falsch. Begründe.

Die Antwort ist falsch, weil ✎ ____________________

____

- Verändere das Bild so, dass es 20 Beine sind.

Bild 1: „Wägestücke", LISUM, CC-BY-SA 4.0 *Bild 2: „Tiere", LISUM, CC-BY-SA 4.0*

Leitidee Gleichungen und Funktionen (C) – Diagnoseaufgaben zu Gleichungen

Aufgabe 1

a) Am Wandertag fährt die Klasse 5a in das Naturkundemuseum.
Es fahren 24 Kinder und 2 Lehrer mit.
Für den Eintritt bezahlen sie insgesamt 58 Euro.

Eintrittspreise Museum	
Kind	2 €
Erwachsene	5 €

- Schreibe eine passende Gleichung zur Sachaufgabe auf.

b) • Schreibe zur Gleichung ein passendes Zahlenrätsel auf.

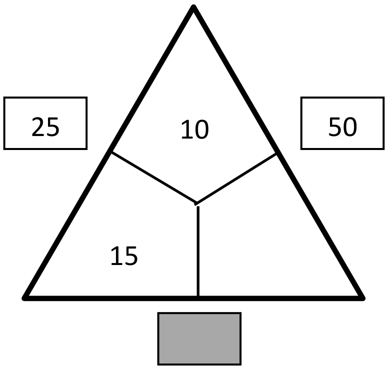
$\square \cdot 5 + 100 = 150$

___

___

Aufgabe 2

a) Du suchst die Zahl im grauen Feld. Wie kannst du rechnen?
- Schreibe passende Aufgaben auf.



___

___

b) Setze für das Kästchen $\square$ nacheinander die Zahlen 10, 20, 30 und 40 ein und berechne.

$2 \cdot \boxed{10} - 10 = 50$ 20 – 10 = 50 falsche Aussage

$2 \cdot \square - 10 = 50$ ___

$2 \cdot \square - 10 = 50$ ___

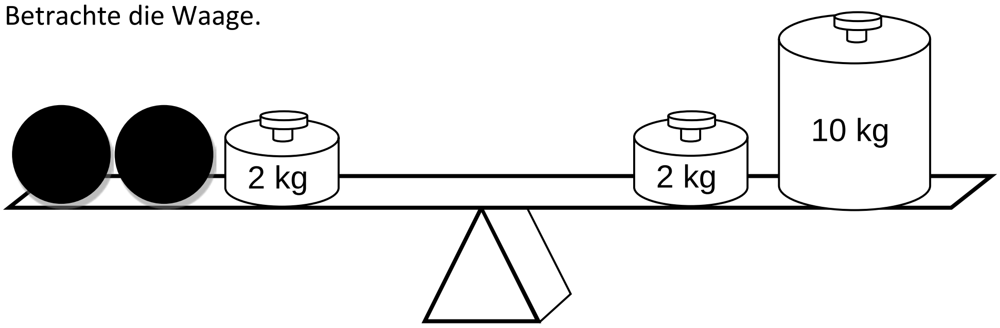
$2 \cdot \square - 10 = 50$ ___

Für welche Zahl wird die Gleichung $2 \cdot \square - 10 = 50$ zu einer wahren Aussage?

- Begründe.

___

c) Betrachte die Waage.



- Wie viel wiegt eine Kugel? ✎ ____

- Beschreibe deinen Lösungsweg.

✎ ____

____

____

Aufgabe 3

a) Ali sollte die Gleichung $3 \cdot \square + 10 = 43$ lösen.
Ali sagt: „Die Lösung ist 12."

- Hat Ali Recht? Begründe.

✎ ____

____

b) Kati geht mit ihren Eltern und ihrer Zwillingsschwester ins Kino.
Der Kinobesuch kostet für jeden Erwachsenen 7 € und für jedes Kind 5 €.
Wie viel muss die Familie von Kati für den Kinobesuch bezahlen?

Kati rechnet und antwortet: Insgesamt müssen wir 12 € bezahlen.

- Hat Kati Recht? Begründe mit einer Rechnung.

✎ ____

____

Bild 1: „Wägestück", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Leitidee Gleichungen und Funktionen (D) – Diagnoseaufgaben zu Gleichungen

Aufgabe 1

a) Tim erhält jeden Monat Taschengeld und zum Geburtstag zusätzlich 25 €.
Insgesamt hat er in diesem Jahr 205 € erhalten.

- Schreibe eine passende Gleichung zur Sachaufgabe auf.

b) • Schreibe eine Rechengeschichte zur Gleichung $\boxed{5 \cdot x + 10 = 45}$.

____

____

Aufgabe 2

a) Wie heißt die Startzahl?

$$\boxed{} \xrightarrow{-100} \boxed{} \xrightarrow{\cdot 4} \boxed{240}$$

Startzahl Zielzahl

Die Startzahl heißt __________.

- Beschreibe deinen Rechenweg.

____

____

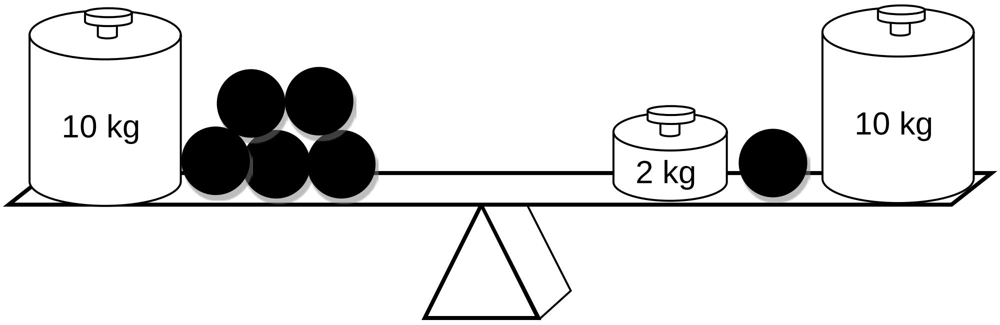
b) $\boxed{x \cdot 4 + 7 = 48 + 7}$

- Welche Zahl musst du für x einsetzen, damit beide Seiten gleich sind? x = ________
- Beschreibe, wie du dein Ergebnis gefunden hast.

____

____

c)



- Wie schwer ist eine Kugel?
- Beschreibe deinen Lösungsweg.

Aufgabe 3

a) Susi löst die Gleichung $\boxed{4 \cdot (x + 30) = 140 + 2 \cdot x}$.

Sie ermittelt für x die Zahl 10.

- Hat Susi Recht? Begründe.

b) Der Juni war zu trocken. Nur an einem Zehntel der Tage hat es geregnet.

Tom antwortet: „Also hat es an 10 Tagen geregnet."

- Hat Tom Recht? Begründe mit einer passenden Gleichung.

Bild 1: „Wägestücke", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Leitidee Gleichungen und Funktionen (E) – Diagnoseaufgaben zu Gleichungen

Aufgabe 1

a) Pia und Jan tragen Zeitungen aus. Für jede ausgetragene Zeitung erhalten sie etwas Geld. Pia hat schon 15 € verdient und Jan hat 21 € verdient.

Jan sagt: „Wenn du noch 250 Zeitungen austrägst und ich noch 150 Zeitungen, dann haben wir beide gleich viel Geld verdient.“

- Stelle eine Gleichung auf, mit der man ausrechnen kann, wie viel Geld sie für jede ausgetragene Zeitung bekommen.

b) Welche Aussagen passen zu folgender Gleichung: $8 + 2 \cdot x = 13$?

- Kreuze an.

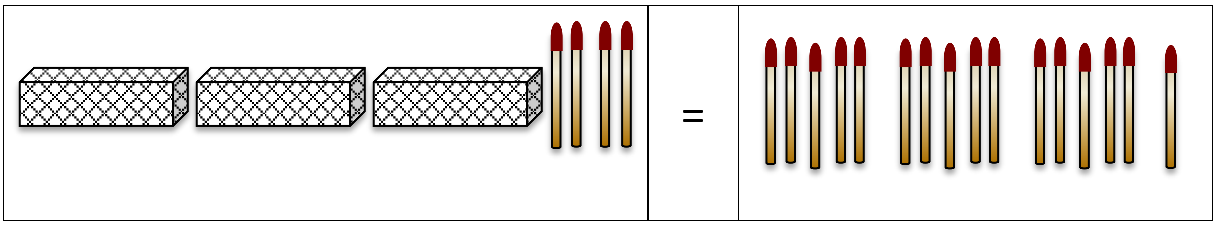
☐ A – Vermehrt man das Doppelte einer Zahl um 8, so erhält man 13.
☐ B – Die Summe von 8 und 2 wird mit einer Zahl multipliziert und das Ergebnis ist 13.
☐ C – Zur 8 wird das Doppelte einer Zahl addiert und man erhält 13.
☐ D – Zum Produkt von 8 und einer Zahl wird 2 dazugerechnet und man erhält 13.

- Erkläre, warum die anderen Beschreibungen nicht zutreffen.

Aufgabe 2

a) In jeder Schachtel sind gleich viele Streichhölzer.

- Ermittle durch Probieren, wie viele Hölzer in den Streichholzschachteln sind, wenn auf beiden Seiten gleich viele Streichhölzer sind.



b)
- Zeige, dass die Zahlen 4 und 10 keine Lösung der Gleichung $16 = 3 \cdot x - 5$ sind.
- Probiere mit weiteren Zahlen, bis du die Lösung gefunden hast.
Schreibe alle Rechnungen auf.

- Löse auch die Gleichung $50 = 0{,}2 \cdot x$ und stelle deine Lösungen dar.

c)
- Forme die folgenden Gleichungen so um, dass die Lösung erkennbar ist.
- Schreibe jeden Umformungsschritt auf.

$32 \cdot x + 95 = 415$

$$\frac{8}{3} = \frac{15}{x}$$

Aufgabe 3

a) Für die Gleichung $14 - 3x = 2 \cdot (x + 2)$ hat Lisa die Lösung x = 2 ermittelt.
Ihre Banknachbarin hat das Ergebnis x = 1,5 erhalten.

- Prüfe, welche Lösung die richtige ist.

b) 30 t Sand müssen an einem Tag abtransportiert werden.
Am Vormittag wurden bereits 13 t abtransportiert.
Am Nachmittag steht noch ein Fahrzeug mit einer Traglast mit 2,5 t zur Verfügung.

Folgende Gleichung kann dazu aufgestellt werden: $13\ t + 2{,}5\ t \cdot x = 30\ t$

Die Gleichung hat die Lösung $x = 6{,}8$.

- Gib die Bedeutung der Variablen x an.
- Erkläre, was diese Lösung in Bezug auf den Sachverhalt bedeutet.
- Welche Schlussfolgerung ziehst du?

Leitidee Gleichungen und Funktionen (F) – Diagnoseaufgaben zu Gleichungen

Aufgabe 1

a) Bei einer Klassensprecherwahl stimmen drei Viertel aller Schüler für Ronja.
Tim erhält 12 Stimmen weniger als Ronja.

- Stelle eine Gleichung auf, mit der man ausrechnen kann, wie viele Schüler in der Klasse sind.

b) Welche Aussage passt **nicht** zur Gleichung $11 - 2 \cdot x = x + 2$?

- Kreuze an.

☐ A – Wenn man das Doppelte einer Zahl von 11 abzieht, dann erhält man diese Zahl vermehrt um 2.

☐ B – Man rechnet 11 minus 2 und multipliziert dann mit einer unbekannten Zahl. Dann erhält man die unbekannte Zahl vermehrt um 2.

☐ C – Die Differenz aus 11 und dem Produkt von 2 und einer unbekannten Zahl ist gleich der Summe aus dieser Zahl und 2.

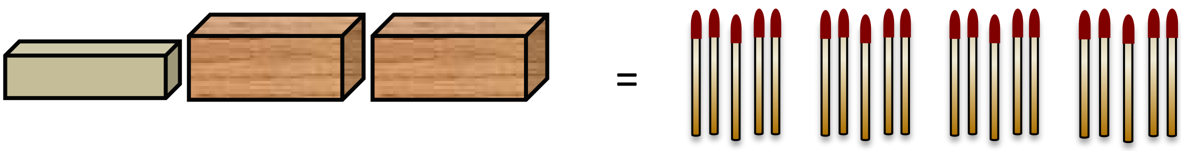
☐ D – Von 11 t Sand wurden 2 Lkw-Ladungen abgefahren. Übrig sind noch eine Lkw-Ladung und 2 t Sand.

- Gib zu der falschen Aussage eine passende Gleichung an.

Aufgabe 2

a) In den Schachteln gleicher Größe sollen gleich viele Hölzer sein. In einer kleinen Schachtel sollen weniger sein als in einer großen.

- Gib verschiedene Möglichkeiten an.



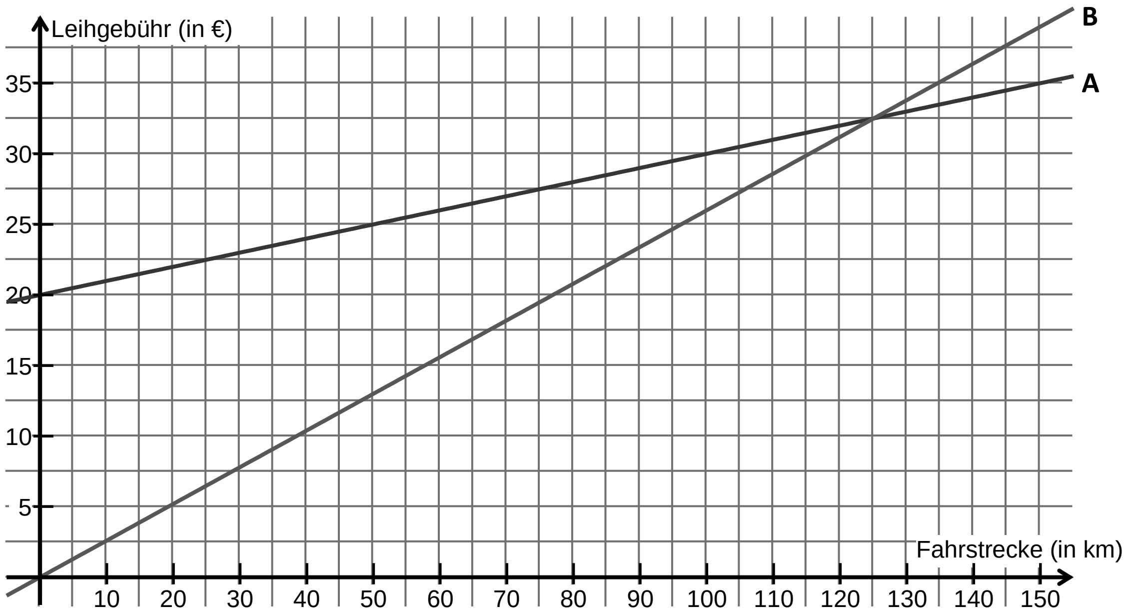
b) In einem Autoverleih (A) wird die Leihgebühr für einen Transporter so berechnet:

$$L = 20 + 0{,}10 \cdot x$$

Im Baumarkt (B) wird die Leihgebühr für einen Transporter anders ermittelt:

$$L = 0{,}26 \cdot x$$

Die Abbildung zeigt den Zusammenhang zwischen gefahrener Strecke und Leihgebühr für beide Anbieter.



- Wie weit ist ein Fahrzeug des Autoverleihs (A) gefahren, wenn 25,00 € bezahlt wurden? Lies aus der Abbildung ab.

____

Marie möchte berechnen, bei welcher Strecke die Kosten beider Anbieter gleich sind. Sie will deshalb die Gleichung $20 + 0{,}10 \cdot x = 0{,}26 \cdot x$ lösen.

Tom sagt: Die Lösung lässt sich aus der Abbildung ablesen.

- Erkläre Toms Vorgehen.
  Gib das Ergebnis an.

c) $5 \cdot (x + 1) = 12$

- Löse die Gleichung.
- Notiere deinen Lösungsweg.

Aufgabe 3

a) Prüfe, welche der drei Zahlen –1, +1 und +5 die folgende Gleichung lösen: $\mathbf{x^2 - 4x = 5}$.

b) Das Produkt zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist 210.

Dazu stellt Jan folgende Gleichung auf: **n · (n + 1) = 210**

Diese Gleichung hat die Lösungen 14 und –15.

- Wie heißen die beiden gesuchten Zahlen?
- Begründe.

Leitidee Gleichungen und Funktionen (G) – Diagnoseaufgaben zu Gleichungen

Aufgabe 1

a) Herr Neumann kauft 100 Schrauben und 200 Muttern zu einem Gesamtpreis von 26,00 €.
Herr Althaus kauft von derselben Art 50 Schrauben und 50 Muttern und bezahlt 12,00 €.

- Stelle ein Gleichungssystem auf, mit dem man die Einzelpreise der Schrauben und Muttern berechnen kann.

b) Welche der folgenden Aussagen passen zur Gleichung **$x \cdot (x - 1) = 30$** ?

- Kreuze passende Beschreibungen an.

  ☐ A – Das Produkt aus einer Zahl und ihrem Vorgänger ist 30.

  ☐ B – Bei einem Rechteck ist eine Seite um 1 cm kürzer als die andere Seite. Der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt 30 cm².

  ☐ C – Das Produkt einer Zahl mit sich selbst wird um 1 vermindert, das Ergebnis ist 30.

  ☐ D – Die Differenz aus dem Quadrat einer Zahl und der Zahl selbst ist 30.

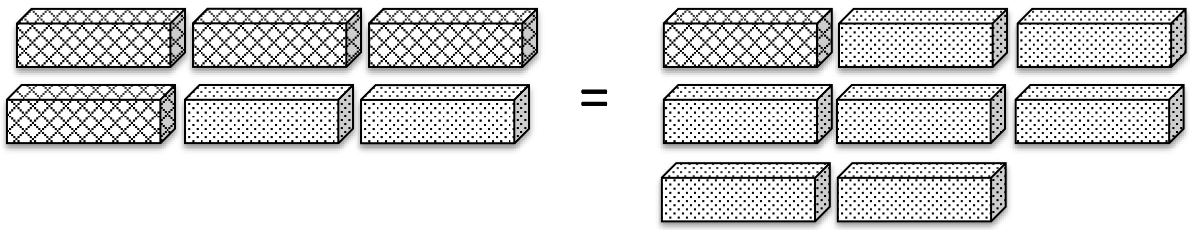
- Gib zu den anderen Beschreibungen eine passende Gleichung an.

Leitidee Gleichungen und Funktionen (G) – Diagnoseaufgaben zu Gleichungen

Aufgabe 2

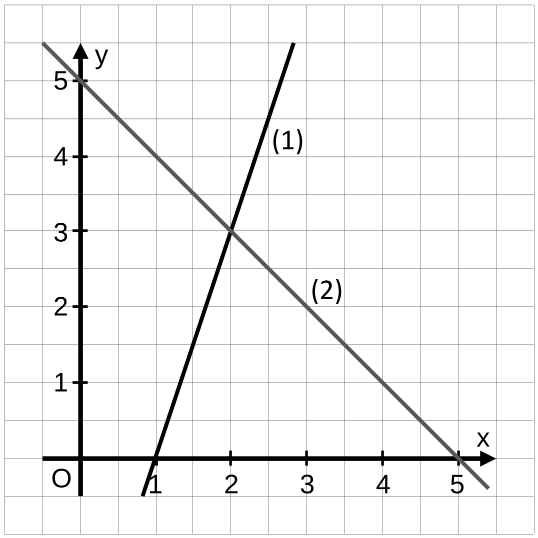
a) In den Streichholzschachteln mit gleichem Muster sollen jeweils gleich viele Hölzer enthalten sein. Auf beiden Seiten befinden sich insgesamt gleich viele Streichhölzer.

- Gib mindestens eine Möglichkeit an, wie viele Hölzer jeweils in den Schachteln sind.



b) Gegeben sind die folgenden Gleichungen: (1) $\mathbf{y = 3x - 3}$ und (2) $\mathbf{y = -x + 5}$.

Die zugehörigen Geraden sind im Koordinatensystem dargestellt.



- Lies im Koordinatensystem zwei verschiedene Wertepaare ab, die Lösung von Gleichung (1), nicht aber Lösung von Gleichung (2) sind.

____

____

- Lies im Koordinatensystem ein Wertepaar ab, das Lösung von beiden Gleichungen ist.

____

c) $\mathbf{5 \cdot x - 8 = 3 \cdot (x + 4) - 1}$

- Löse die Gleichung.
- Notiere deinen Lösungsweg.

Aufgabe 3

a) Überprüfe, ob das Wertepaar (3|–5) Lösung des linearen Gleichungssystems ist.

$$\left| \begin{array}{c} \mathbf{3x - y = 14} \\ \mathbf{2y + 7x = 11} \end{array} \right|$$

b) Zwei Geraden können mit den Gleichungen $\mathbf{y = 2 \cdot x + 5}$ und $\mathbf{y = 2 \cdot x - 3}$ beschrieben werden.

Christina rechnet:

$$\begin{aligned} 2 \cdot x + 5 &= 2 \cdot x - 3 \qquad | - 2x \\ 5 &= -3 \\ \\ \mathcal{L} &= \ldots \end{aligned}$$

- Gib die Lösungsmenge der Gleichung an.
- Beschreibe, welche Bedeutung diese Lösung in Bezug auf die zwei Geraden hat.

Leitidee Gleichungen und Funktionen (B) – Diagnoseaufgaben zu Funktionen

Aufgabe 1

a) Eine Gruppe, die aus verschiedenen Figuren besteht, wiederholt sich immer.

- Kreise die Gruppe ein.

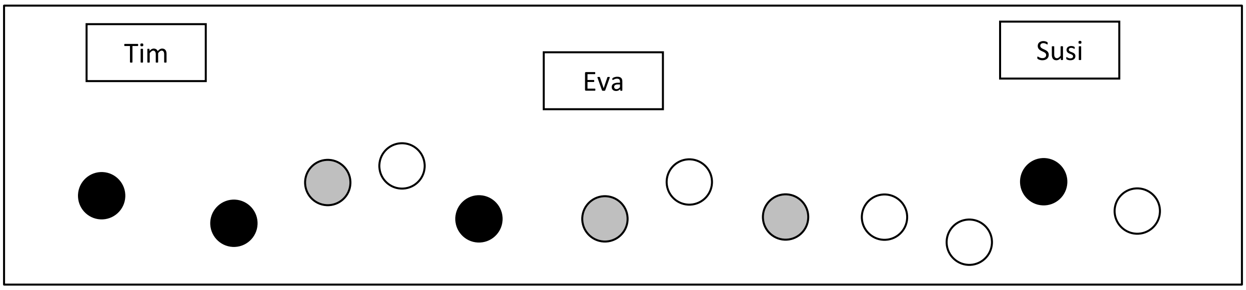
- Beschreibe das Bild.

____

____

b) Tim bekommt -Plättchen, Eva bekommt -Plättchen und Susi bekommt -Plättchen.

- Verbinde jedes Kind mit seinen Plättchen.
  Verwende für jedes Kind eine andere Farbe.



- Wie viele Plättchen bekommt jedes Kind? Ergänze.

Tim bekommt _____ .   Eva bekommt _____ .   Susi bekommt _____ .

Aufgabe 2

a) Hier siehst du eine Zahlenfolge.   20 24 28 32 36 ___ ___

- Setze die Zahlenfolge fort und ergänze den Satz.

Ich finde die nächste Zahl, wenn ich ____

b) Setze das Päckchen fort und rechne aus. Ergänze die Sätze.

20	+	10	=	____
21	+	12	=	____
22	+	14	=	____
23	+	16	=	____
____	+	____	=	____
____	+	____	=	____

wird immer ________________________

wird immer ________________________

wird immer ________________________

Leitidee Gleichungen und Funktionen (B) – Diagnoseaufgaben zu Funktionen

Aufgabe 3

a) In der Tabelle stehen die Preise für Eiskugeln.

Anzahl der Eiskugeln	1	2	4	8
Preis	80 ct	1 € 60 ct	3 € 20 ct	6 € 40 ct

- Wie verändert sich der Preis? Ergänze den Satz.

  Je mehr Eiskugeln ich kaufe, desto ✏ ____.

b) Betrachte das Bild.
- Wie wurde der Mond verschoben? Beschreibe die einzelnen Schritte.

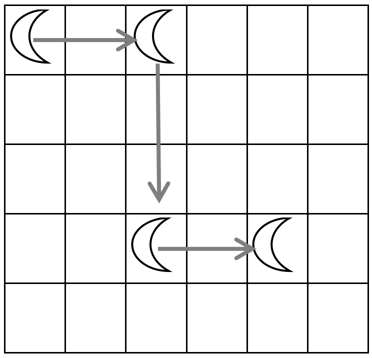
✏ ____

____

____

____

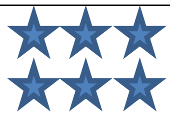
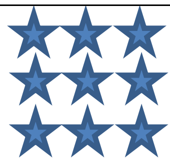
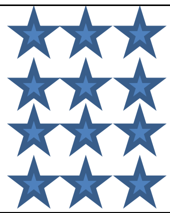
____



Leitidee Gleichungen und Funktionen (C) – Diagnoseaufgaben zu Funktionen

Aufgabe 1:

a) Schreibe die passenden Terme zu dieser Bilderfolge auf.

	Bild	Term
Bild 1		$1 \cdot 3$
Bild 2		
Bild 3		
Bild 4		

b)

Anzahl der Zeitschriften	1	2	3	4	10	30
Preis in €	3	6	9	12	30	90

- Lies aus der Tabelle ab und ergänze die folgenden Sätze.

  Für 3 Zeitschriften muss man _______ € bezahlen.

  Für 30 € kann man ______ Zeitschriften kaufen.

- Vervollständige den Satz:

  In der Tabelle wird der Anzahl der Zeitschriften ____________________ zugeordnet.

Aufgabe 2:

a) Setze die Zahlenfolge fort.

100 90 80 70 60 ____ ____

- Beschreibe, wie du die nächsten Zahlen gefunden hast.

____

____

b) Preistabelle für Eis.

Anzahl der Kugeln	1	2	4	5
Preis in Cent		120		

- Ergänze die Tabelle.
- Erkläre, wie du vorgegangen bist.

____

____

____

Aufgabe 3:

a) Welche Aussagen passen zu welcher Tabelle?

- Verbinde.

Je größer die eine Größe,
desto größer die andere Größe.

Je größer die eine Größe,
desto kleiner die andere Größe.

Wenn man eine Größe verdoppelt,
halbiert sich die andere Größe.

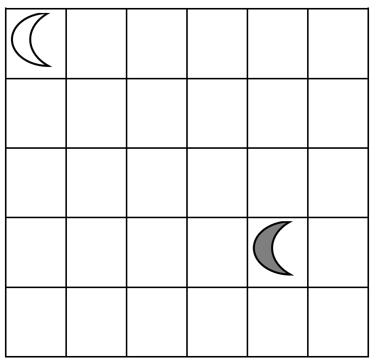
Wenn man eine Größe verdoppelt,
verdoppelt sich auch die andere Größe.

Rechtecklänge in cm	2	4	8	16	24
Rechteckbreite in cm	48	24	12	6	4

Masse in kg	3	5	6	10	15
Preis in €	9	15	18	30	45

b) Wie wurde der Mond verschoben?

- Zeichne einen Weg vom grauen Mond zum weißen Mond ein.
- Beschreibe deinen Weg.



____

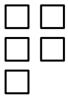
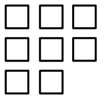
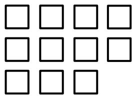
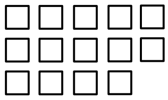
____

____

Leitidee Gleichungen und Funktionen (D) – Diagnoseaufgaben zu Funktionen

Aufgabe 1

a) ● Schreibe die passenden Terme für die Bilderfolge auf.

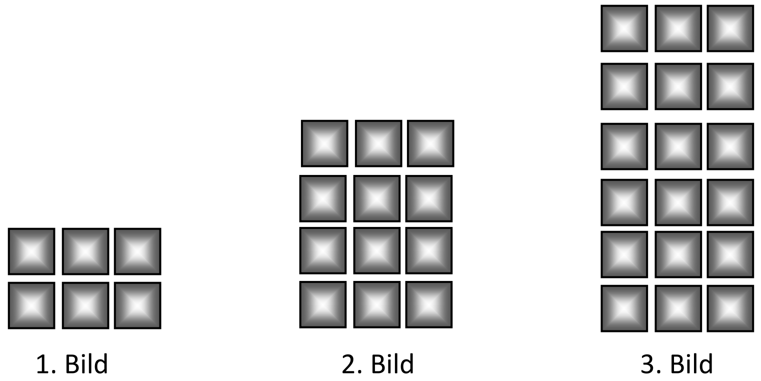
	Bild	Term
Bild 1		$1 \cdot 3 + 2$
Bild 2		
Bild 3		
Bild 4		

b) ● Stelle diese Zuordnung in einem Koordinatensystem dar.

Zeit in Stunden	2	4	8
zurückgelegter Weg in km	8	16	32

Aufgabe 2

a) Das ist der Ausschnitt aus einer Bilderfolge.



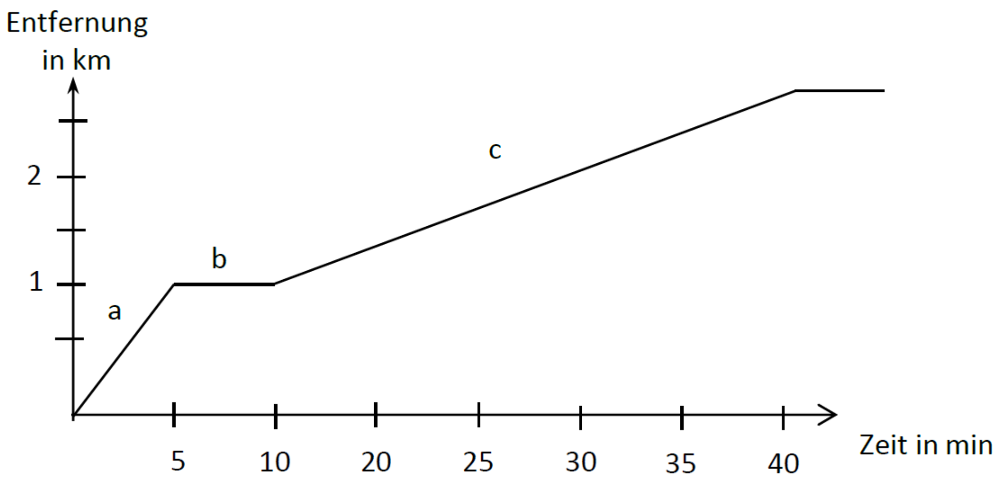
- Markiere die Veränderung von Bild zu Bild.

- Wie viele Quadrate hat das 10. Bild?

✎ ____

b) Paul fährt mit dem Fahrrad zu seiner Oma.

- Beschreibe mithilfe der Darstellung seinen Weg.



✎ ____

____

____

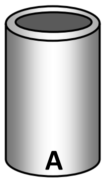
____

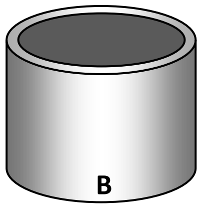
____

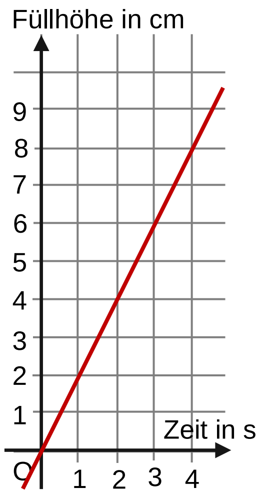
Aufgabe 3

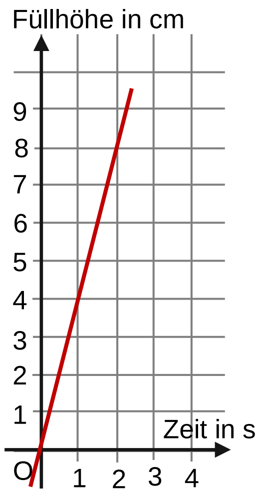
a) Die Gefäße A und B werden mit dem gleichen Wasserstrahl gefüllt.
Für die Zuordnung „Zeit → Füllhöhe“ wurden Diagramme erstellt.

- Verbinde jedes Gefäß mit dem passenden Diagramm.



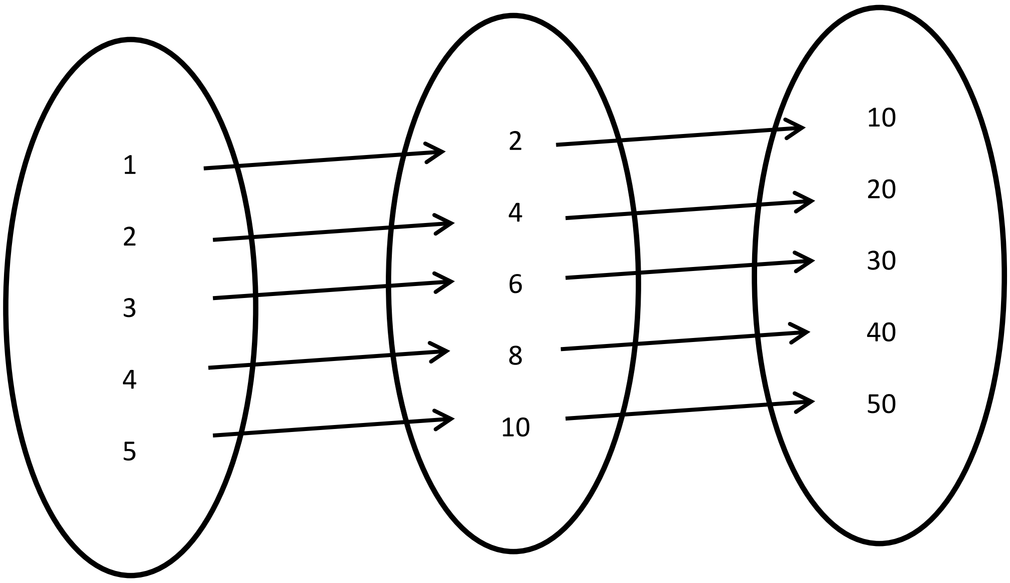






- Begründe deine Entscheidung.

b) Menge 1 Menge 2 Menge 3



- Beschreibe die Zuordnung der Menge 1 zur Menge 2.

✎ ____

- Beschreibe die Zuordnung der Menge 2 zur Menge 3.

✎ ____

- Beschreibe die Zuordnung der Menge 1 zur Menge 3.

✎ ____

Leitidee Gleichungen und Funktionen (E) – Diagnoseaufgaben zu Funktionen

Aufgabe 1

a) Gegeben ist eine Folge von Zahlen: 7 ; 11 ; 15 ; 19 ; 23 ; …

- Übertrage die Zahlen in die Tabelle.
- Notiere passende Terme, aus denen man erkennt, wie die Zahlenfolge gebildet wird.

Nummer der Zahl	Zahl	Term
1.	7	$1 \cdot 4 + 3$
2.	11	
3.		
4.		
5.		

- Beschreibe mit Worten, wie eine Zahl mit der Nummer x berechnet werden kann.

- Schreibe einen Term auf, mit dem die x-te Zahl berechnet werden kann.

b) Es gilt die Zuordnungsvorschrift: *„Einer Zahl wird ihr Doppeltes zugeordnet.“*

- Kreuze alle Darstellungen an, die zu dieser Zuordnung gehören.
- Begründe deine Entscheidungen.

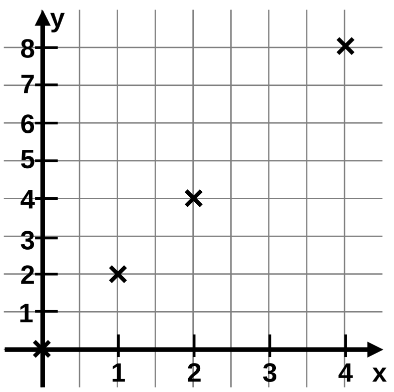
☐ **A)** (4|8), (5|15), (10|20)

☐ **B)**

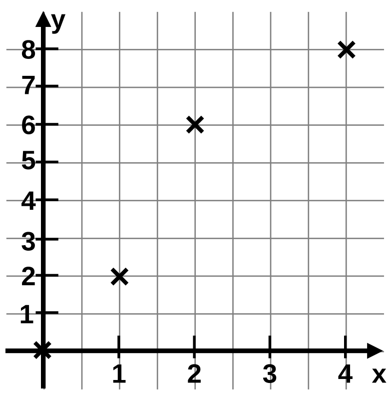
x	2,5	3,3	5
y	5	6,6	10

☐ **C)** $y = \underline{x} + 2$

☐ **D)**



☐ **E)**



Aufgabe 2

a)

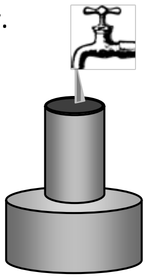
- Setze die Zahlenfolgen fort: **53 ; 47 ; 41 ; 35 ; 29 ; __ ; __ ; __**

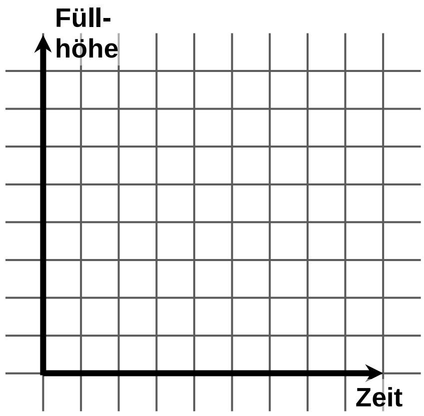
  7 ; 9 ; 13 ; 19 ; 27 ; __ ; __ ; __

- Beschreibe, was du dabei überlegt hast.

b) Ein gleichmäßiger Wasserstrahl füllt das gezeigte Gefäß.

- Stelle diesen Vorgang im Diagramm dar.
- Erkläre deine Darstellung.





Aufgabe 3

In einem Zoo wird ein Okapi (Waldgiraffe) geboren. Seine Größe wird monatlich gemessen.

Alter in Monaten	2	3	4	5
Größe in cm	100	115	130	145

- Untersuche die Zuordnung und kreuze an.

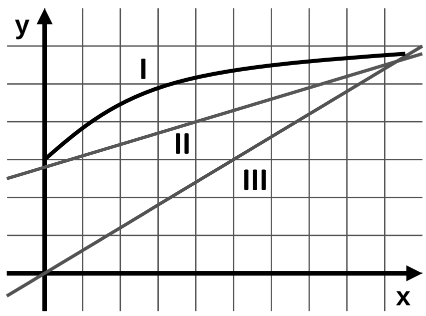
  Die Zuordnung ist ☐ direkt proportional ☐ indirekt proportional ☐ keins von beiden.

- Begründe deine Entscheidung.

  Begründung:

- Welcher Graph passt zu deiner Entscheidung?

  ☐ I ☐ II ☐ III



- Begründe, warum die zwei anderen <u>nicht</u> zutreffen können.

Leitidee Gleichungen und Funktionen (F) – Diagnoseaufgaben zu Funktionen

Aufgabe 1

a) Eine Folge von Zahlen lässt sich mit dem Term $\mathbf{5 \cdot a + 4}$ beschreiben.
a ist dabei die Nummer der Zahl, durchläuft alle natürlichen Zahlen und startet bei a = 1.

- Schreibe die ersten sechs Zahlen dieser Folge auf.

____

Mit den zwei Tabellen sind zwei Zahlenfolgen gegeben. Darunter stehen 4 Terme.

Nummer der Zahl	1	2	3	4	5
Zahl	10	17	24	31	48

Nummer der Zahl	1	2	3	4	5
Zahl	55	49	43	37	31

$\boxed{\mathbf{3 \cdot a + 7}}$ $\boxed{\mathbf{7 \cdot a + 3}}$ $\boxed{\mathbf{6 \cdot a - 61}}$ $\boxed{\mathbf{61 - 6 \cdot a}}$

- Verbinde die Zahlenfolgen mit den richtigen Termen.
- Begründe deine Entscheidung.

b) Vanessa hat sich eine Bambuspflanze gekauft, die schon 10 cm hoch ist.
Der Verkäufer versicherte, dass diese Pflanze in der nächsten Zeit täglich um 2 cm wächst.
Die Höhe der Pflanze lässt sich mit der Gleichung y = 2 · x + 10 beschreiben.

- Formuliere die inhaltliche Bedeutung von x und y in diesem Zusammenhang.

  x : ____

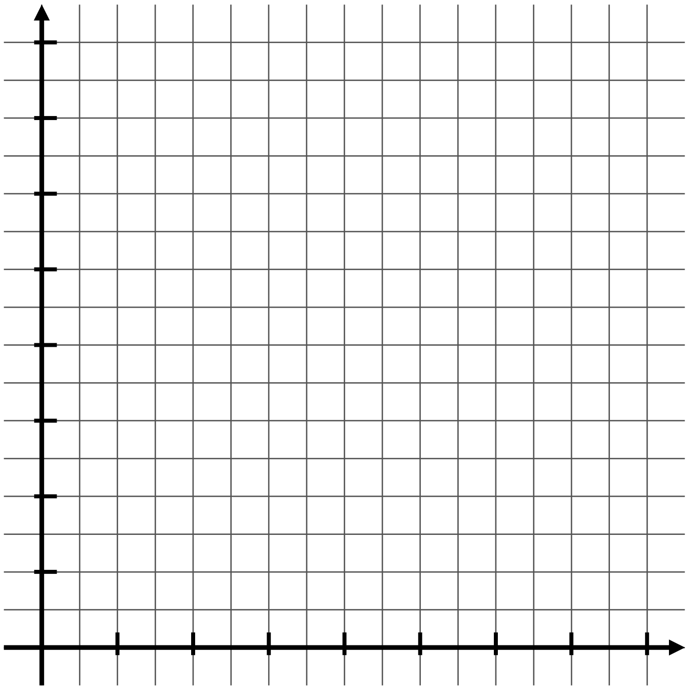
  y : ____

- Wie hoch müsste die Pflanze nach 20 Tagen sein?
  Schreibe deinen Lösungsweg auf.

- Nach wie vielen Tagen erreicht die Pflanze eine Höhe von 75 cm?
  Schreibe deinen Lösungsweg auf.

- $y = 2 \cdot x + 10$ ist die Gleichung einer Funktion.

  Zeichne den Graphen dieser Funktion im Koordinatensystem.



Aufgabe 2

a) Gegeben ist eine Zahlenfolge: 3 ; 6 ; 11 ; 18 ; 27 ; 38 ; . . . ; . . . .

Die Abstände benachbarter Zahlen bilden eine neue Folge.

- Schreibe die ersten sechs Zahlen dieser Folge auf.
  Ergänze die ursprüngliche Folge um zwei weitere Zahlen.

____

b) Eine bereits 40 cm hohe Pflanze wächst täglich um 1,5 cm.
Die Höhe der Pflanze am Tag x lässt sich mit der Gleichung $y = 1{,}5 \cdot x + 40$ beschreiben.

- Wie viele Tage benötigt die Pflanze, um 60 cm zu wachsen?

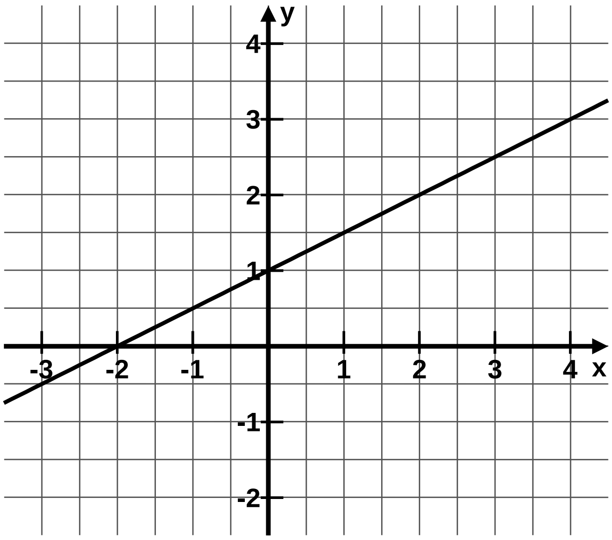
- Vom 4. Mai bis zum 16. Mai wächst diese Pflanze um 18 cm. Gib einen anderen Zeitraum an, in dem die Pflanze auch um 18 cm wächst.

- Gib eine Gleichung an für den Fall, dass die Pflanze langsamer wächst.

Begründe deine Gleichung.

Aufgabe 3

a) Dargestellt ist der Graph der Funktion $y = 0{,}5 \cdot x + 1$.



- Beschreibe, wie sich der Verlauf des Graphen ändert, wenn die Gleichung zu $y = 0{,}5 \cdot x + 2$ verändert wird.

____

____

____

____

- Beschreibe, wie sich der Verlauf des Graphen ändert, wenn die Gleichung zu $y = 2 \cdot x + 1$ verändert wird.

b) Der Graph der dargestellten Funktion wird an der y-Achse gespiegelt.

- Zeichne den Graphen der neuen Funktion in das Koordinatensystem ein.

- Gib die dazugehörige Funktionsgleichung an.

____

Leitidee Gleichungen und Funktionen (G) – Diagnoseaufgaben zu Funktionen

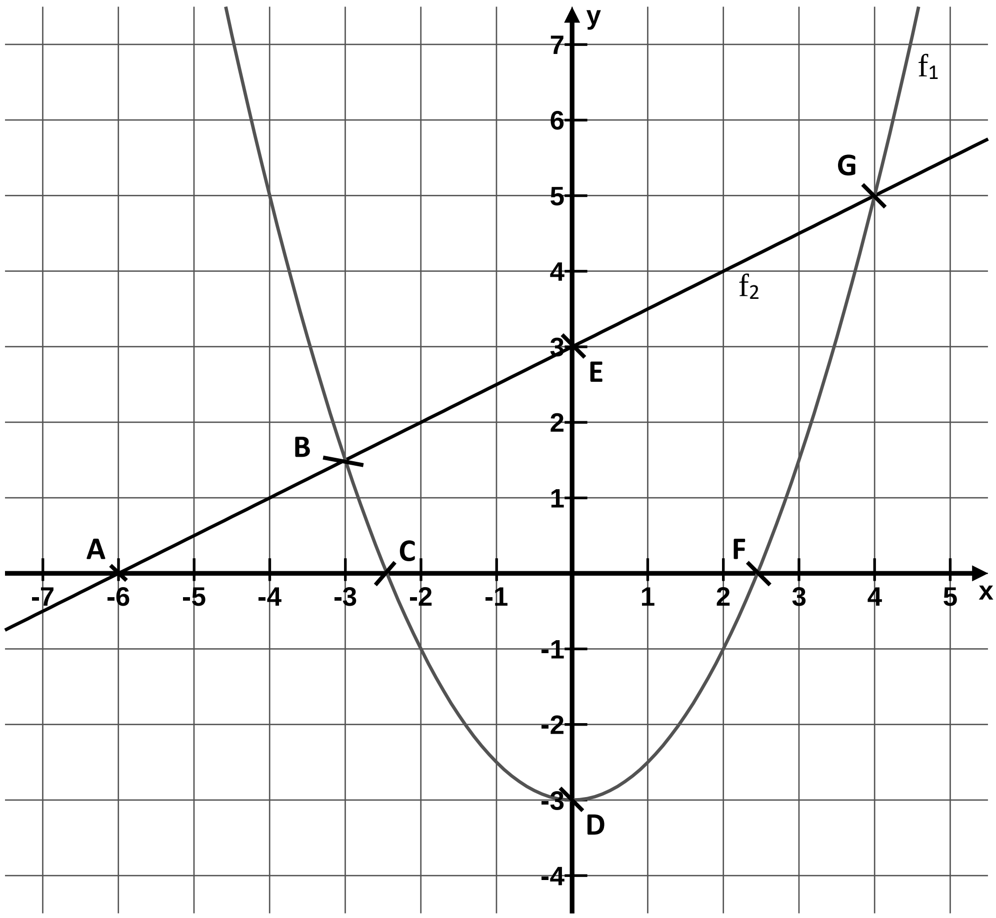
Aufgabe 1

a) Eine Folge von Zahlen lässt sich mit dem Term $\mathbf{a}^2 + 3\mathbf{a}$ beschreiben.

- Schreibe die ersten sechs Zahlen dieser Folge auf.

___

b) In der Abbildung sind die Graphen der Funktionen f_1 und f_2 dargestellt.



- Nenne die Funktionsgleichung für die Funktion f_2.

___

- Welche der Punkte A–G sind gemeinsame Punkte der Graphen beider Funktionen?

  Nenne sie. ___

  Gib ihre Koordinaten an. ___

- Erkläre, was es für die Funktionen bedeutet, wenn die Graphen gemeinsame Punkte haben.

Leitidee Gleichungen und Funktionen (G) – Diagnoseaufgaben zu Funktionen

Aufgabe 2

a) Die Zahlen einer Zahlenfolge werden stets nach folgender Vorschrift gebildet:
Die nächste Zahl in der Folge ergibt sich immer aus dem Doppelten der vorhergehenden Zahl vermindert um 3.

Die Folge beginnt mit der Zahl 4.

- Gib die nächsten sechs Zahlen dieser Folge an: 4 ; ________________________________

Eine zweite Folge ist 2 ; 1 ; –1 ; –5 ; –13 ; –29 ; …

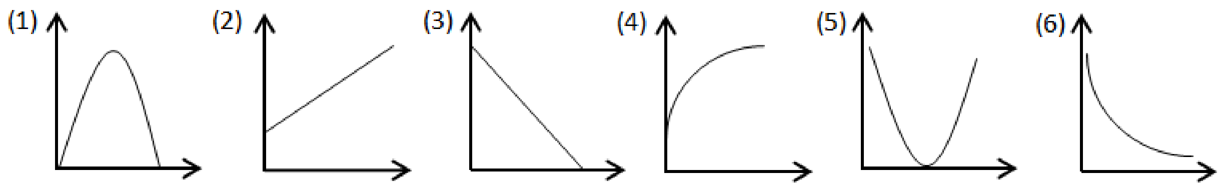
- Prüfe, ob diese Folge der oben genannten Bildungsvorschrift genügt.

☐ ja ☐ nein

- Begründe deine Antwort durch Berechnungen.

- Zwischen benachbarten Zahlen der zweiten Folge gibt es immer eine Differenz.
  Wie verändern sich diese Differenzen?

b) Ordne jeder Situation einen der Graphen zu. Übertrage dazu eine Skizze des Graphen in die Tabelle.
Beschrifte jeweils die Achsen und begründe deine Entscheidung.

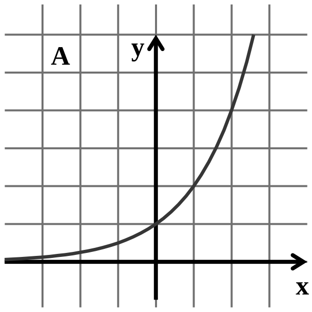


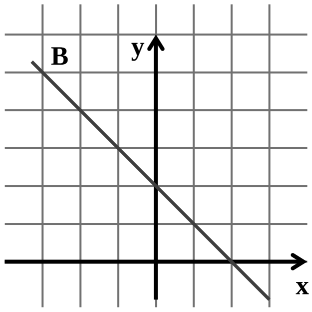
	Situation	Graph	Begründung
1	Je kleiner die Kisten, desto mehr von ihnen passen in den Transporter.		
2	Ein Taucher holt einen Stein vom Meeresboden an die Oberfläche.		

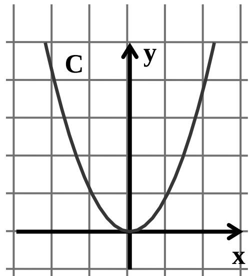
Aufgabe 3

a) Ordne jedem Graphen eine der folgenden Funktionsgleichungen zu:

$y = 2 \cdot x$ $\qquad$ $y = x^2$ $\qquad$ $y = 2^x$ $\qquad$ $y = -x + 2$ $\qquad$ $y = -x^2$







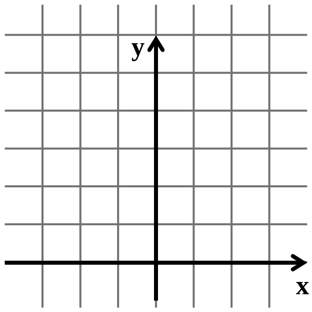
Erläutere, warum die übrig gebliebenen Gleichungen auf keinen der Graphen zutreffen können.

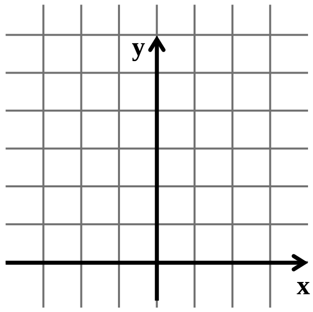
____

____

____

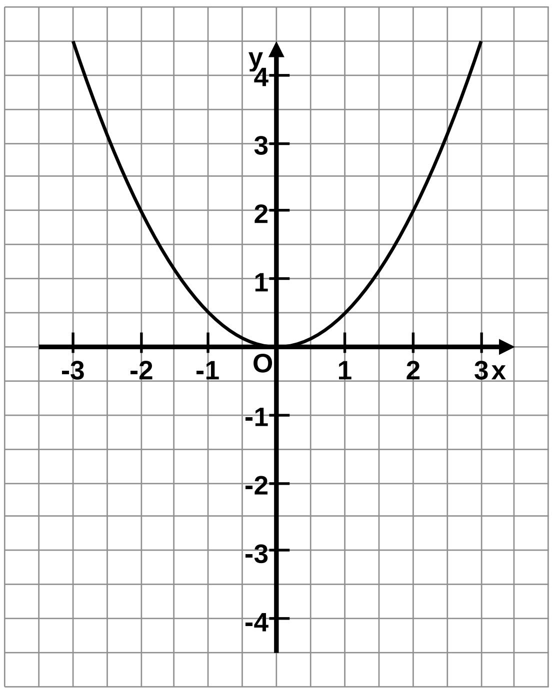
Skizziere die Graphen zu den übrig gebliebenen Funktionsgleichungen.





b) Dargestellt ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = 0{,}5 \cdot x^2$.

- Zeichne den Verlauf des Graphen der Funktion g mit $g(x) = f(x) - 2$.
- Zeichne den Verlauf des Graphen der Funktion h mit $h(x) = f(x + 1)$.
- Beschrifte die Graphen.



LISUM Landesinstitut für Schule und Medien Berlin-Brandenburg

Zuordnung der Diagnoseaufgaben zum inhaltlichen Konzept

Idee der Variable als Platzhalter, Unbekannte, Unbestimmte, Veränderliche	Idee der Operation als Beschreibung von Veränderungen

Idee der Terme

Aufstellen und Interpretieren von Termen

- 1a Strukturieren und Beschreiben von Mustern und Bildern mit Worten
- 1b Beschreiben von Mustern, Bildern und Sachzusammenhängen mit Termen
- 1c Entwickeln von Mustern, Bildern und Sachzusammenhängen zu Termen
- 1d Identifizieren, Interpretieren und Substituieren von Teiltermen
- 1e Interpretieren von Termen mit Variablen als Operatoren

Vergleichen von Termen

- 2a Erkennen und Finden von gleichwertigen Termen in Mustern, Bildern und Sachzusammenhängen
- 2b Erkennen von Termen mit gleichem Termwert durch Einsetzen
- 2c Untersuchen von Termbeziehungen unter Nutzung von Rechenregeln, Rechengesetzen und Umkehroperationen
- 2d Herstellen von äquivalenten Termen durch Umformen

Idee der Gleichungen

Aufstellen und Interpretieren von Gleichungen

- 1a Aufstellen von Gleichungen zu Bildern und Sachzusammenhängen
- 1b Zeichnen von Bildern, Erstellen von Zahlenrätseln und Finden von Sachzusammenhängen zu Gleichungen

Lösen von Gleichungen

- 2a Finden von Lösungen in informellen Formaten durch systematisches Probieren und Rückwärtsarbeiten
- 2b Bestimmen der Lösungsmengen von Gleichungen durch systematisches Probieren, Rückwärtsarbeiten und mithilfe grafischer Darstellungen
- 2c Bestimmen der Lösungsmengen von Gleichungen durch Äquivalenzumformungen

Validieren und Interpretieren von Lösungen

- 3a Überprüfen des Wahrheitsgehalts der Gleichung
- 3b Überprüfen der Lösung im Sachzusammenhang bzw. Ziehen von Schlussfolgerungen aus Lösungen

Idee der funktionalen Zusammenhänge

Zuordnungsvorstellung

- 1a Erfassen, Strukturieren und Beschreiben von Bilder- und Zahlenfolgen mit Worten und
- 1b Betrachten, Beschreiben und Darstellen der Zuordnung einer Größe zu einer anderen

Veränderungsvorstellung

- 2a Fortsetzen von Bilder- und Zahlenfolgen
- 2b Untersuchen und Beschreiben der Art der Abhängigkeit zweier Größen (wie sich zwei Größen miteinander verändern)

Objektvorstellung

- 3a Untersuchen und Beschreiben von Eigenschaften zur Klassifizierung von Funktionen
- 3b Untersuchen von Verknüpfungen von Funktionen

Darum geht es

Sinnvolle Zusammensetzungen aus Zahlen, Größen und Variablen, die mithilfe von Rechenzeichen und Klammern gebildet werden, heißen Terme. Sie sind eine ökonomische Darstellung von allgemeinen Zusammenhängen, Mustern und Folgen. Terme haben keinen Wahrheitsgehalt. Schwerpunkte im Unterricht liegen auf dem Aufstellen, Interpretieren und Umformen von Termen.

Enthalten die **Terme keine Variablen**, sondern nur Zahlen bzw. Größen, die mit Rechenzeichen und Klammern verbunden werden, so spricht man von Zahlentermen oder Rechenausdrücken. Diese sind für Schülerinnen und Schüler leichter zu erfassen als Terme mit Variablen und bilden die Grundlage für den Aufbau von Termvorstellungen. Der Aufbau von Termvorstellungen ist mit dem Aufbau von Zahl- und Operationsvorstellungen eng verbunden. Somit beginnt algebraisches Denken nicht mit dem Umformen von Termen, sondern zunächst beim Beobachten von Strukturen an geometrischen Gebilden (z. B. beim Erkennen von Figurenfolgen) und dann auch an arithmetischen Gebilden. Zunehmend sollen die Strukturen auch mit Termen beschrieben werden (z. B. Beschreiben von Punktemustern). Eine wesentliche Grundlage für das Erfassen von Umformungsregeln ist ein Verständnis der Rechengesetze für natürliche Zahlen, da die Umformungsregeln auf den Rechengesetzen basieren.

Terme mit Variablen sind abstrakter als reine Rechenausdrücke. Der Schritt zu diesem abstrakten Denken ist ein wesentlicher Entwicklungsschritt, der von der Lehrkraft sorgfältig begleitet und unterstützt werden muss. Eine Anbahnung der Idee der Variablen erfolgt schon in den ersten Grundschuljahren durch den Einsatz von Platzhaltern in Form von Kästchen, Bildern usw. Schrittweise werden diese Symbole durch Buchstaben ersetzt. Durch Terme mit Variablen werden Situationen, Muster und Modelle beschrieben und verallgemeinert.

Für den Begriff der **Variablen** werden die folgenden drei Grundkonzepte unterschieden, die im Verlauf der Schulzeit entwickelt werden müssen: die Variable als *Unbekannte*, die Variable als *unbestimmte, allgemeine Zahl* und die Variable als *Veränderliche*.

Die Variable als Unbekannte zu betrachten, entspricht zum Beispiel ihrer Funktion in Zahlenrätseln und Gleichungen. Dabei geht es um eine zu ermittelnde gesuchte oder gedachte Zahl.

Die Variable als unbestimmte, allgemeine Zahl wird zum Beispiel verwendet, um Rechengesetze und Formeln auszudrücken. Bei diesem Konzept dient die Variable dazu, allgemeine Aussagen zu formulieren und Zahlen nicht näher einzugrenzen. Diese Aussage, dieses Rechengesetz oder diese Formel gilt dann für alle Zahlen aus einem bestimmten Zahlbereich.

Beim Konzept der Variablen als Veränderliche durchlaufen die Werte systematisch einen bestimmten Zahlenraum. Es werden verschiedene Werte eingesetzt, so dass eine funktionale Beziehung zwischen den eingesetzten Werten und den ermittelten Termwerten entsteht. Diese Vorstellung mündet in der Idee der funktionalen Zusammenhänge.

Die Variable als Unbekannte:
Wie heißt die Zahl?
„Das Dreifache einer Zahl vermindert um 10 ergibt 8.“

Die Variable als unbestimmte, allgemeine Zahl:
„Das Kommutativgesetz:

a + b = b + a“

Die Variable als Veränderliche:

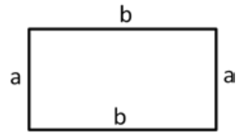
$x \rightarrow 3 \cdot x + 2$

x	0	1	2	3	4
y	2	5	8	11	14

Neben dem Begriff der Variablen ist im Umgang mit Termen der Begriff der *Gleichwertigkeit* von wesentlicher Bedeutung. Es werden folgende Aspekte der Gleichwertigkeit von Termen unterschieden: Beschreibungsgleichheit, Einsetzungsgleichheit und Umformungsgleichheit von Termen.

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Beschreibungsgleichheit



Der Umfang kann durch folgende Terme angegeben werden:

$a + b + a + b = 2 \cdot a + 2 \cdot b$
$= 2 \cdot (a + b)$

Einsetzungsgleichheit

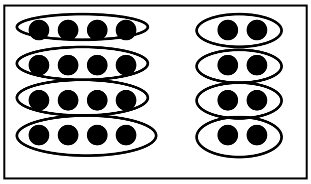
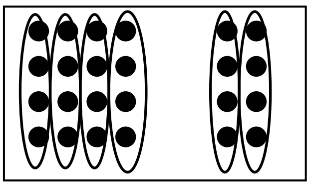
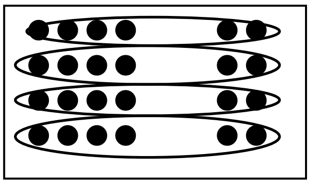
Term 1: $(a + 5)^2$
Term 2: $a^2 + 10a + 25$
Die Terme sind einsetzungsgleich. Setzt man in beide für a jeweils die gleiche Zahl ein, dann sind ihre Termwerte gleich.

Umformungsgleichheit

Term 1: $2 \cdot (x + 1)$
Term 2: $2 \cdot x + 2$

Term 1 lässt sich durch Auflösen der Klammern nach Distributivgesetz in Term 2 „verwandeln"

Schülerinnen und Schüler lernen das Konzept der Beschreibungsgleichheit von Termen ohne Variable schon sehr früh kennen. Die Beschreibungsgleichheit ist die Gleichwertigkeit zweier Terme, wenn diese denselben Sachverhalt oder dieselbe Figur auf unterschiedliche Weise beschreiben. Bereits in den ersten Jahrgangsstufen der Grundschule erfahren die Lernenden, dass 5 + 7 das Gleiche ist wie 7 + 5 oder aber 2 + 2 + 2 das Gleiche ist wie 3 · 2. Dass Terme ganz unterschiedlich aussehen können und trotzdem das Gleiche beschreiben, erfahren sie auch an geeigneten geometrischen Fragestellungen.
In den höheren Jahrgangstufen werden die Lernenden mit Termen mit Variablen vertraut gemacht. Im Zuge dessen lernen sie auch die Einsetzungsgleichheit kennen, wenn sie zum Beispiel aufgefordert werden, in verschiedene Terme gleiche Zahlen einzusetzen und so ihre Gleichwertigkeit zu prüfen. Einsetzungsgleich sind 2 Terme mit Variablen dann, wenn beide Terme für alle einsetzbaren Zahlen jeweils denselben Termwert ergeben.
Umformungsgleichheit spielt besonders in der Sekundarstufe I eine Rolle, wenn Variablen als Zeichen angesehen werden, mit denen – auch ohne Deutung im Sachkontext – nach bestimmten Regeln gearbeitet werden kann. Bevor der Übergang zum Kalkül erfolgt, müssen aber Vorstellungen an konkreten Inhalten entwickelt werden. Ein Bezug zwischen der inhaltlichen Vorstellung und dem Kalkül sollte auch in höheren Jahrgangsstufen immer wieder hergestellt werden. Das Umformen von Termen darf kein automatisiertes bzw. eingeübtes Anwenden von scheinbar willkürlich vorgegebenen Umformungsregeln sein. Dies wird vermieden, indem die Lernenden zunächst ein Verständnis von beschreibungs- und einsetzungsgleichen Termen entwickeln.
Im Umgang mit Termen ist es notwendig, zwischen symbolisch-algebraischer, grafischer, verbaler und numerischer Darstellung zu wechseln und diese zu vernetzen.

<table>
<tr><th>Grafische Darstellung</th><th>Tabellarisch</th><th>symbolisch</th><th>Verbale Darstellung</th></tr>
<tr><td></td><td><table><tr><td>1. Spalte</td><td>2. Spalte</td><td>Ganze Zeile</td></tr><tr><td>4</td><td>2</td><td>4 + 2</td></tr><tr><td>4</td><td>2</td><td>4 + 2</td></tr><tr><td>4</td><td>2</td><td>4 + 2</td></tr><tr><td>4</td><td>2</td><td>4 + 2</td></tr><tr><td>4 · 4</td><td>4 · 2</td><td>4 · (4 + 2)</td></tr></table></td><td>4 · (4 + 2)</td><td>Beispiele:
Es sind vier Zeilen.
In jeder Zeile sind erst vier Punkte und dann noch zwei Punkte.</td></tr>
<tr><td></td><td><table><tr><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td></td><td>4</td><td>4</td></tr><tr><td colspan="7">6 · 4</td></tr></table></td><td>6 · 4</td><td>Es sind sechs Spalten mit jeweils vier Punkten.</td></tr>
<tr><td></td><td><table><tr><td>6</td><td rowspan="4">4 · 6</td></tr><tr><td>6</td></tr><tr><td>6</td></tr><tr><td>6</td></tr></table></td><td>4 · 6</td><td>Es sind vier Zeilen mit jeweils sechs Punkten.</td></tr>
</table>

LISUM Landesinstitut für Schule und Medien Berlin-Brandenburg

Förderaufgaben

Idee der Terme

Grundschule

Übersicht über die Förderempfehlungen

1. Strukturieren und Beschreiben von Würfelgebäuden mit Worten
2. Strukturieren und Beschreiben von Streifenbildern mit Worten
3. Bauen und Beschreiben von Würfelgebäuden mit Worten
4. Finden von weiteren Beschreibungen zu Bildern
5. Beschreiben der Umwandlung eines Musters in eine Buchstabenfolge
6. Bilden einer Buchstabenfolge und einer Zahlenfolge aus einer Zeichenfolge
7. Finden von Fehlern beim Nachlegen eines Musters
8. Finden von gleichen Mustern
9. Finden von verschiedenen Beschreibungen zu Bildern
10. Abgrenzen des Termbegriffs zu den Begriffen Gleichung und Ungleichung
11. Erkennen von Termen
12. Zuordnen von Termen zu Sachverhalten auf der Grundlage von Operationsvorstellungen
13. Zuordnen von Termen zu Punktebildern
14. Aufstellen eines Terms zu einem Sachverhalt mithilfe von Kärtchen
15. Aufstellen von Termen zu Rechengeschichten
16. Beschreiben von Streifenbildern mit Termen
17. Zuordnen von Termen (mit und ohne Variablen) zu Streifenbildern
18. Aufstellen von Termen zu Streifenbildern
19. Legen von Streifenbildern und Aufstellen von passenden Termen
20. Erfassen von Sachverhalten durch Ergänzen des Platzhalters
21. Ergänzen von Lückentexten zu Sachverhalten auch mit Veränderlichen
22. Erklären der Bedeutung von Platzhaltern in Termen
23. Zuordnen von Termen mit Platzhaltern zu Zahlenrätseln
24. Anwenden der Kommutativität der Addition bei Termen mit Platzhaltern
25. Anwenden der Kommutativität der Multiplikation bei Termen mit Platzhaltern
26. Zuordnen von Termen mit Platzhaltern zu Sachzusammenhängen
27. Aufstellen von Termen zu Mustern und Verallgemeinern durch Nutzen von Platzhaltern
28. Auswählen passender Begriffe für einen Platzhalter im Text
29. Einsetzen passender Begriffe für einen Platzhalter im Text
30. Erfassen der Bedeutung von Variablen
31. Verwenden von Variablen und Termen in Beschreibungen
32. Zuordnen des passenden Terms mit einer Variablen zum Sachzusammenhang
33. Aufstellen von Termen mit Variablen passend zu Sachzusammenhängen
34. Entwickeln von Mustern zu Termen
35. Zuordnen von Rechengeschichten zu Termen
36. Schreiben von Rechengeschichten zu Termen
37. Zuordnen von Sachzusammenhängen zu Termen mit Variablen

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

38. Legen von Streifenbildern zu Termen mit Variablen
39. Zeichnen von Strecken zu Termen mit Variablen
40. Identifizieren von Teiltermen in Punktebildern
41. Darstellen von Teiltermen in Punktebildern
42. Ergänzen von Punktebildern auf der Grundlage von Teiltermen
43. Interpretieren eines Sachverhaltes durch Zuordnen von Teiltermen
44. Identifizieren von Teiltermen in einem Text
45. Interpretieren von Teiltermen auf der Grundlage eines Sachzusammenhangs
46. Identifizieren von Teiltermen als Beschreibung eines Bildes
47. Erkennen der Substitution von Teiltermen mithilfe von Streifenbildern
48. Identifizieren und Substituieren von Teiltermen
49. Interpretieren von Termen als Operationen
50. Erkennen der Nacheinanderausführung von Operationen
51. Nacheinanderausführen von als Term dargestellten Operationen
52. Auswählen eines passenden Terms zur Nacheinanderausführung von Operationen
53. Ermitteln von Zeichenfolgen (Termen) zur Nacheinanderausführung von Operationen
54. Erkennen von gleichwertigen Termen zu Würfelgebäuden
55. Erkennen von gleichwertigen Termen zum Punktbild
56. Ermitteln von gleichwertigen Termen zu Bildern
57. Aufstellen von gleichwertigen Termen zu komplexen Bildern
58. Ermitteln von gleichwertigen Termen durch das Umlegen von Streifenbildern
59. Ermitteln von gleichwertigen Termen durch das Legen von Streifenbildern
60. Erkennen von Termen mit gleichem Termwert durch Einsetzen von vorgegebenen Zahlen
61. Überprüfen der Gleichwertigkeit von Termen nach Einsetzen von Zahlen
62. Erkennen von Termen mit gleichem Termwert nach Einsetzen einer Zahl
63. Erkennen der Kommutativität der Addition
64. Erkennen der Kommutativität der Multiplikation
65. Begründen der Nichtkommutativität der Subtraktion und Division
66. Untersuchen der Rechenregel *Punkt- vor Strichrechnung* mit einem Bild
67. Beschreiben von Rechenregeln zum Herstellen gleichwertiger Terme
68. Ermitteln gleichwertiger Terme durch Nutzen von Rechenregeln und Rechengesetzen
69. Darstellen von Rechenregeln und Rechengesetzen mit Streifenbildern
70. Ermitteln eines Terms zu einem Streifenbild und Erkennen gleichwertiger Terme
71. Herstellen von gleichwertigen Termen durch Umformen
72. Herstellen von gleichwertigen Termen durch Zusammenfassen und Umformen
73. Beschreiben von Termumformungen

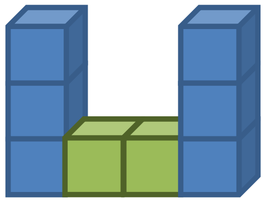
Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen Grundschule	X+Y	**Idee der Terme** Aufstellen und Interpretieren von Termen

Strukturieren und Beschreiben von Würfelgebäuden mit Worten	**1**

Die Kinder beschreiben das Würfelgebäude.

- Zeige im Bild, dass die Aussagen stimmen.



Ich sehe 6 blaue und 2 grüne Würfel.

Ich sehe 3 blaue, 2 grüne und nochmal 3 blaue Würfel.

Ich sehe dreimal 2 blaue Würfel und einmal 2 grüne Würfel.

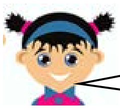
Ich sehe zweimal 3 blaue Würfel und zweimal einen grünen Würfel.

Bild 1: „Mädchen Zöpfe", pixabay.com, CC0 Bild 2: „Mädchen Hut", pixabay.com, CC0 Bild 3: „Junge braun", pixabay.com, CC0 Bild 4: „Junge blond", pixabay.com, CC0

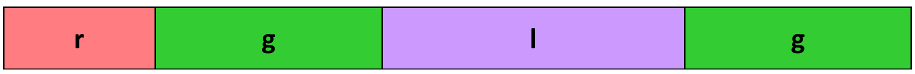
Gleichungen und Funktionen Grundschule	X+Y	**Idee der Terme** Aufstellen und Interpretieren von Termen

Strukturieren und Beschreiben von Streifenbildern mit Worten	**2**

***Material:** farbige Streifen (siehe Vorlage)*
Maxi legt aus farbigen Streifen verschiedene Streckenlängen.



Die Strecke besteht aus zwei Streifen. Der blaue Streifen liegt links vom lila Streifen. Der lila Streifen ist kürzer als der blaue Streifen.



- Beschreibe die zweite Strecke mit Worten. Benutze auch die Formulierungen:

„…liegt links von…"

„…gleich lang…"

„…länger als…"

„…kürzer als…"

„…liegt rechts von…"

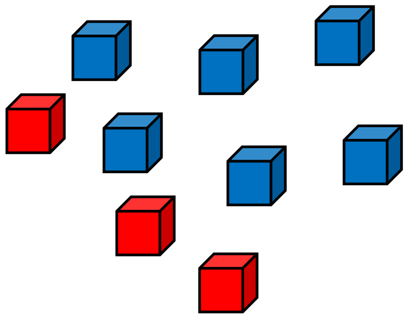
„…liegt neben…"

Bild 5: „Mädchen Hut", pixabay.com, CC0

Gleichungen und Funktionen Grundschule	X+Y	Idee der Terme Aufstellen und Interpretieren von Termen
Bauen und Beschreiben von Würfelgebäuden mit Worten		3

Material: *blaue und rote Steckwürfel*

- Baue aus sechs blauen und drei roten Würfeln verschiedene Würfelgebäude.
- Beschreibe deine Gebäude.



Gleichungen und Funktionen Grundschule	X+Y	Idee der Terme Aufstellen und Interpretieren von Termen
Finden von weiteren Beschreibungen zu Bildern		4

Lisa, Max und Tarim haben die Bilder passend beschrieben.

- Was siehst du auf den Bildern?
  Finde zu jedem Bild noch eine andere Beschreibung.

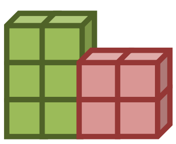
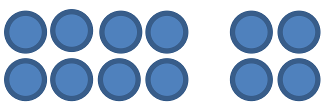
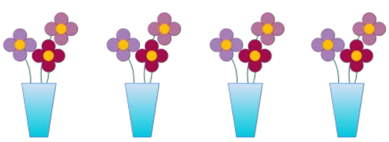
Bild 1 	Lisa sagt: „Ich sehe 10 Würfel. Sie sind grün oder rot.“ Ich sehe …
Bild 2 	Max sagt: „Ich sehe 8 blaue Plättchen und nochmal 4 blaue Plättchen.“ Ich sehe …
Bild 3 	Tarim sagt: „Ich sehe 4 Vasen und 12 Blumen.“ Ich sehe …

Bild 6 “Blumenvase“, pixabay.com, CC0

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

X+Y

Idee der Terme
Aufstellen und Interpretieren von Termen

Beschreiben der Umwandlung eines Musters in eine Buchstabenfolge	**5**

Sina legt ein Muster: ☆ ✙ ☆ ✙ ☆ ✙

Ali wandelt das Muster so um: A B A B A B

- Beschreibe, was Ali gemacht hat.
- Ergänze: ☆ → ____

  ✙ → ____

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

X+Y

Idee der Terme
Aufstellen und Interpretieren von Termen

Bilden einer Buchstabenfolge und einer Zahlenfolge aus einer Zeichenfolge	**6**

Sina legt ein Muster:

○ △ ○ □ ○ ○ △ ○ □ ○ ○ △ ○ □ ○

Ersetze:

△ → X

○ → Y

□ → Z

- Schreibe das neue Muster auf.

  ____

- Schreibe das gleiche Muster mit den Ziffern 4, 5 und 7.

  ____

Sina hat ein Muster gelegt:

☺ ✡ ✡ ✡ ☺ ✡ ✡ ✡ ☺

Tom, Pia und Ole haben das Muster mit anderen Symbolen umgewandelt.

Tom legt: 1 2 2 2 1 2 2 2 1

Pia legt: R S S S R S S R S

Ole legt: △ ✚ ✚ ✚ △ ✚ ✚ ✚ △

- Wer hat einen Fehler gemacht?
  Begründe.

- Finde gleiche Muster.
  Kreise sie mit derselben Farbe ein.

△ ○ ○ □

A B B A

5 7 7 9

A B B C

5 5 7 7

A A B B

◇ ◇ ✡ ✡

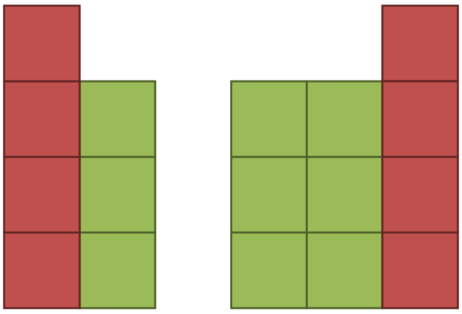
Gleichungen und Funktionen
Grundschule

X+Y

Idee der Terme
Aufstellen und Interpretieren von Termen

Finden von verschiedenen Beschreibungen zu Bildern | **9**

- Finde drei verschiedene Beschreibungen für das Bild.



Ich sehe …

Bild 7: „Junge Haare orange", pixabay.com, CC0

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

X+Y

Idee der Terme
Aufstellen und Interpretieren von Termen

Abgrenzen des Termbegriffs zu den Begriffen Gleichung und Ungleichung | **10**

Leyla sagt:

Schreibe ich eine Zahl, eine Größe oder eine Aufgabe auf, dann ist das ein **Term**.

Leyla nennt verschiedene Beispiele für **Terme**.

45	2 + 3	9 kg	70 – 15 : 5

Erik antwortet: „Dann sind $24 + 13 = 37$ oder $15 < 10 \cdot 3$ keine Terme."

- Warum hat Erik Recht?
- Begründe deine Meinung.

Bild 8: „Mädchen Brille", pixabay.com, CC0

Erkennen von Termen **11**

- Kreise alle Terme ein.

10 – 7	3 · 4 < 15	13
7 cm	3 h = 180 min	100 : 4 + 20

- Erkläre, warum die anderen Kästen deiner Meinung nach keine Terme sind.

Gleichungen und Funktionen
Grundschule
X+Y
Idee der Terme
Aufstellen und Interpretieren von Termen

Zuordnen von Termen zu Sachverhalten auf der Grundlage von Operationsvorstellungen **12**

- Welcher Term passt zu dem Text? Verbinde.

Luisa kauft 21 Luftballons. Drei Luftballons pustet sie auf und lässt sie fliegen.	21 : 3
In der Schule gibt es drei erste Klassen. In jeder Klasse sind 21 Kinder.	21 · 3
21 Bonbons werden gerecht auf drei Kinder verteilt.	21 – 3
Im Regal stehen 21 Bücher. Ina stellt drei Bücher dazu.	21 + 3

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

X+Y

Idee der Terme
Aufstellen und Interpretieren von Termen

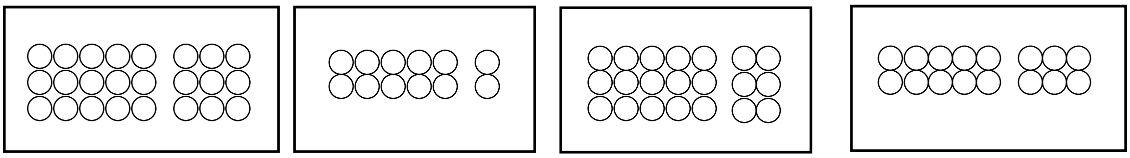
Zuordnen von Termen zu Punktebildern **13**

- Verbinde jeden der drei Terme mit einem passenden Bild.

$2 \cdot 5 + 2 \cdot 3$

$15 + 3 \cdot 2$

$2 \cdot 5 + 2$



Gleichungen und Funktionen
Grundschule

X+Y

Idee der Terme
Aufstellen und Interpretieren von Termen

Aufstellen eines Terms zu einem Sachverhalt mithilfe von Kärtchen **14**

Material: *Kärtchen, wie angegeben*

- Ordne die Karten so an, dass der entstandene Term zum Text passt.

Susi färbt zu Ostern 12 Eier.
Tim bringt noch 3 farbige Eier mit.
Gemeinsam essen sie 2 Eier auf.

3

2

−

12

+

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

X+Y

Idee der Terme
Aufstellen und Interpretieren von Termen

Aufstellen von Termen zu Rechengeschichten

15

- Schreibe zu den Rechengeschichten einen passenden Term auf.

Emir geht fünfmal in die Küche und holt immer 2 Flaschen Wasser.

Amira verteilt 25 Bonbons auf 5 Tüten.

Bo hat 10 € und gibt davon 6 € für ein Spiel aus.

In der Aula stehen 2 Reihen mit jeweils 25 Stühlen und 7 Reihen mit jeweils 10 Stühlen.

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

X+Y

Idee der Terme
Aufstellen und Interpretieren von Termen

Beschreiben von Streifenbildern mit Termen

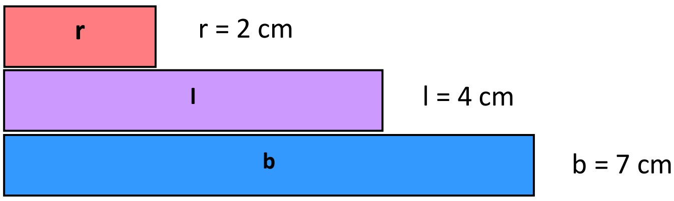
16

Material: *farbige Streifen (siehe Vorlage)*

r ist die Länge des roten Streifens.

l ist die Länge des lila Streifens.

b ist die Länge des blauen Streifens.



Lisa und Hannes legen aus den Streifen eine Streckenlänge.

Maxim beschreibt:

Der Term zu dem Bild ist **2 cm + 4 cm + 7 cm**.

Maxi sagt:

Die Länge der Strecke kann man auch mit dem Term **r + l + b** *angeben*.

Beide haben Recht. Erkläre.

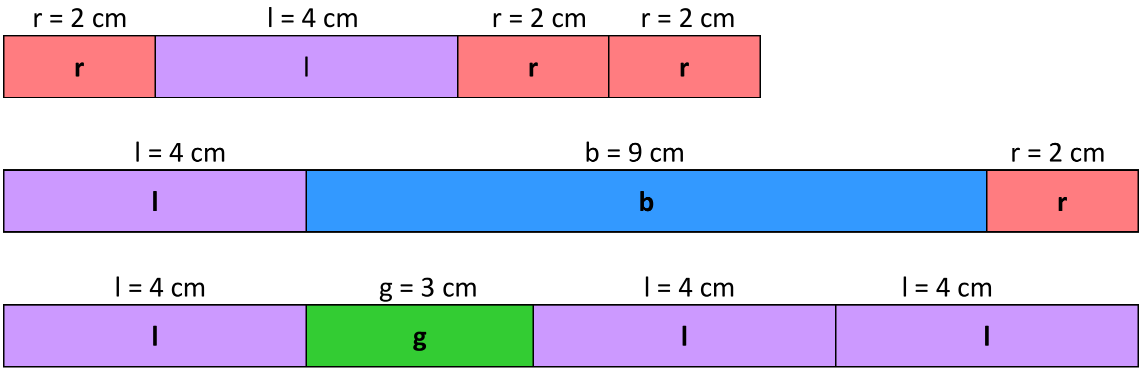
Gleichungen und Funktionen
Grundschule

X+Y

Idee der Terme
Aufstellen und Interpretieren von Termen

Zuordnen von Termen (mit und ohne Variablen) zu Streifenbildern **17**

Selma legt drei Strecken aus farbigen Streifen.



- Ordne den drei Strecken die passenden Terme zu.

2 cm + 4 cm + 2 cm + 2 cm	l + g + l + l
l + b + r	
4 cm + 3 cm + 4 cm + 4 cm	r + l + r + r

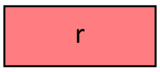
Gleichungen und Funktionen
Grundschule

X+Y

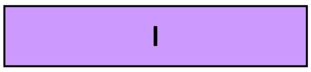
Idee der Terme
Aufstellen und Interpretieren von Termen

Aufstellen von Termen zu Streifenbildern **18**

***Material:** farbige Streifen (siehe Vorlage)*

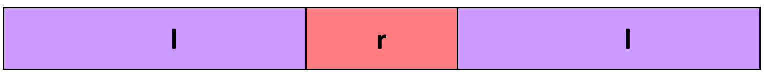


r = 2 cm
r ist die Länge eines roten Streifens.



l = 4 cm
l ist die Länge eines lila Streifens.

Selma legt aus den Streifen eine Strecke.



- Gib einen Term an, mit dem man die Länge der Strecke ausrechnen kann.
- Lege die Streifen um und finde weitere Terme.

Legen von Streifenbildern und Aufstellen von passenden Termen **19**

Material: *farbige Streifen (siehe Vorlage)*

Anni legt mit farbigen Streifen eine Strecke:

Ganz links legt sie einen lila Streifen.
Rechts davon legt sie einen roten Streifen an.
Rechts von dem roten Streifen legt sie dann noch zwei grüne Streifen an.

- Lege die Strecke nach.
- Finde einen passenden Term zu der Strecke.

Nun nimmt Anni die beiden grünen Streifen weg.
Dafür legt sie einen lila Streifen.

- Verändere deine Strecke so wie Anni.
- Finde einen passenden Term zu der neuen Strecke.

Erfassen von Sachverhalten durch Ergänzen des Platzhalters **20**

- Ordne alle Kärtchen passend in die Lücken ein.

Am ______________________ feiern wir Silvester.

___________________ ist die Hauptstadt von Deutschland.

Viele Kinder kommen morgens mit dem ____________________ zur Schule.

Fahrrad	Berlin	31. Dezember

Ergänzen von Lückentexten zu Sachverhalten auch mit Veränderlichen | **21**

- Ergänze die Sätze mit passenden Wörtern.

Elif nimmt ___________________________________ mit ins Kino.

Ich habe am ____________________ Geburtstag.

In der _________________________ lerne ich Lesen, Schreiben und Rechnen.

Im Sommer fahren wir mit der ganzen Familie nach ___________________________.

- Hast du bei einigen Sätzen an mehrere Möglichkeiten gedacht? Bei welchen? Begründe.

Bild 12: „Lernendes Kind", cc by nc 4.0, erstellt mit dem © Worksheet Crafter – www.worksheetcrafter.com

Erklären der Bedeutung von Platzhaltern in Termen | **22**

- Lies jeden Satz genau.
- Wofür steht das leere Kästchen $\square$?

Katja denkt sich eine Zahl und subtrahiert davon die Zahl 5.

Sie schreibt den Term $\boxed{\square - 5}$

Zu einer gedachten Zahl wird 5 addiert.

Onur schreibt den Term: $\boxed{\square + 5}$

Tom multipliziert die Zahl 15 mit 3 und danach wird das Produkt durch eine unbekannte Zahl dividiert.

Er schreibt den Term: $\boxed{(15 \cdot 3) : \square}$

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

X+Y

Idee der Terme
Aufstellen und Interpretieren von Termen

Zuordnen von Termen mit Platzhaltern zu Zahlenrätseln | **23**

- Welcher Term passt? Kreise ein.

Bilde das Zehnfache einer unbekannten Zahl.

$10 + \square$ $10 - \square$ $10 \cdot \square$ $10 : \square$

Vom Fünffachen einer unbekannten Zahl werden 8 weggenommen.

$4 + \square - 8$ $5 \cdot \square - 8$ $5 - \square \cdot 8$ $5 \cdot \square + 8$

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

X+Y

Idee der Terme
Aufstellen und Interpretieren von Termen

Anwenden der Kommutativität der Addition bei Termen mit Platzhaltern | **24**

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Zu einer unbekannten Zahl werden 3 dazugegeben.

Alif schreibt: $\square + 3$ Ming schreibt: $3 + \square$

- Warum passen beide Aufgaben? Erkläre.

Von einer unbekannten Zahl werden 2 weggenommen.

Alif schreibt: $\square - 2$ Ming schreibt: $2 - \square$

- Warum passt nur eine der beiden Aufgaben? Erkläre.
- Schreibe selbst ein Zahlenrätsel für die Aufgabe, die nicht passt.

Anwenden der Kommutativität der Multiplikation bei Termen mit Platzhaltern | **25**

Bilde das Dreifache einer unbekannten Zahl.

Tim schreibt: ☐ · 3 Susi schreibt: 3 · ☐

- Warum passen beide Aufgaben? Erkläre.

Eine unbekannte Zahl wird durch 3 geteilt.

Tim schreibt: ☐ : 3 Susi schreibt: 3 : ☐

- Warum passt nur eine Aufgabe? Erkläre.
- Schreibe selbst ein Zahlenrätsel für die Aufgabe, die nicht passt.

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

X+Y

Idee der Terme
Aufstellen und Interpretieren von Termen

Zuordnen von Termen mit Platzhaltern zu Sachzusammenhängen | **26**

Welcher Term passt zum Text?

- Verbinde.

Ayla kauft sich mehrere Kugeln Eis. Jede Kugel kostet 1 Euro. Für die Früchte und die Soße bezahlt sie zusätzlich 2 Euro.	☐ · 2 €
Für das Grillfest werden pro Person Würstchen zu je 1 Euro und Getränke zu je 2 Euro gekauft.	☐ · 1 €
Für die Kinder der Klasse werden Kerzen für je 1 Euro gekauft.	☐ · 1 € + 2 €
	☐ · 1 € + ☐ · 2 €

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der Terme
Aufstellen und Interpretieren von Termen

Aufstellen von Termen zu Mustern und Verallgemeinern durch Nutzen von Platzhaltern **27**

Dan hat ein Muster aus Dreiecken gelegt.

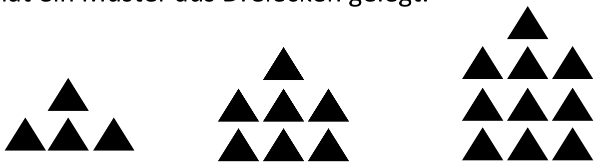


Bild 1 Bild 2 Bild 3

- Ergänze die Tabelle.

Bild	Anzahl der Dreiecke	Term
1	4	**1** · 3 + 1
2	7	**2** · 3 + 1
3		
4		

Man kann die Anzahl der Dreiecke mit dem Term $\square$ · 3 + 1 berechnen.

- Wofür steht das $\square$?

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der Terme
Aufstellen und Interpretieren von Termen

Auswählen passender Begriffe für einen Platzhalter im Text **28**

Für x können verschiedene Kärtchen eingesetzt werden.

- Wähle passende Kärtchen für x aus und kreise sie ein.

Katrin nimmt **x** mit in den Mathematikunterricht.

die Federtasche	das Haus	das Mathematikbuch	den Englischhefter
das Surfbrett	die Schwimmsachen	das Computerspiel	den Zirkel
das Fahrrad	das Hausaufgabenheft		

- Lies jeden vollständigen Satz vor.

Einsetzen passender Begriffe für einen Platzhalter im Text

29

Was kannst du für y einsetzen?

- Schreibe sinnvolle Sätze auf.

Pia geht in den Zoo. Sie nimmt **y** mit.

____

Im **y** fahren wir in den Urlaub.

____

Wenn ich nach der Schule nach Hause komme, gehe ich erstmal zu **y**.

____

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

X+Y

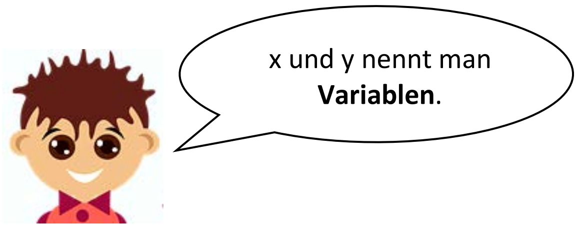
Idee der Terme
Aufstellen und Interpretieren von Termen

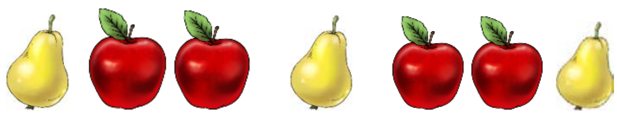
Erfassen der Bedeutung von Variablen

30

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Erik sagt:





x Äpfel und y Birnen

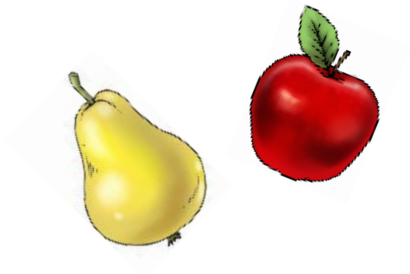
- Wofür steht die **Variable** x?
- Wofür steht die **Variable** y?

Verwenden von Variablen und Termen in Beschreibungen **31**

Im Korb liegen 10 Äpfel und einige Birnen.

Tina sagt:„10 Äpfel und x Birnen.“

- Wofür steht x?



Tina schreibt den Term: 10 + x.

- Wofür steht 10?
- Wofür steht x?

Bild 16: „Birne“ und Bild 17: „Apfel“, cc by nc 4.0, erstellt mit dem © Worksheet Crafter – www.worksheetcrafter.com

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

X+Y

Idee der Terme
Aufstellen und Interpretieren von Termen

Zuordnen des passenden Terms mit einer Variablen zum Sachzusammenhang **32**

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Paul trägt 100 Zeitungen aus und erhält für jede Zeitung Geld.
Oma gibt ihm noch 20 Euro dazu.

Lisa möchte herausbekommen, wie viel Geld Paul insgesamt bekommt.
Sie sagt: „Da ich nicht weiß, wie viel Geld Paul für eine Zeitung bekommt, schreibe ich im Term dafür die Variable x.“

Welcher Term passt zu dieser Situation?

- Kreise ein und begründe.

$100 \cdot x \cdot 20$ $\quad$ $100 \cdot x + 20$ $\quad$ $20 \cdot x + 100$

Aufstellen von Termen mit Variablen passend zu Sachzusammenhängen **33**

- Markiere in jeder Aussage die Personen oder die Dinge, deren Anzahl unbekannt ist.
- Wähle eine Variable aus, die für die unbekannte Anzahl steht. Schreibe sie in die Tabelle.
- Finde nun zu jeder Situation einen passenden Term. Verwende deine gewählte Variable.

Aussage	meine Variable	passender Term zur Aussage
Jedes Kind der Klasse soll 5 Euro für den Wandertag bezahlen.		
Emir teilt 12 Kuchenstücke auf seine Gäste auf.		
In die Klasse 5a mit 26 Schülern kommen einige Kindergartenkinder zu Besuch.		
Von 100 Bonbons in einem Bonbonglas wurden schon viele Bonbons gegessen.		

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

X+Y

Idee der Terme
Aufstellen und Interpretieren von Termen

Entwickeln von Mustern zu Termen **34**

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Material: *rote und blaue Plättchen*

- Lege jede Aufgabe mit Plättchen.
- Zeichne anschließend das Bild dazu auf.

$6 + 3$	Mein Bild
$6 - 3$	Mein Bild
$6 \cdot 3$	Mein Bild
$6 : 3$	Mein Bild

Zuordnen von Rechengeschichten zu Termen

35

Welche Rechengeschichte passt zum Term $\boxed{2 \cdot 5 + 1}$?

- Kreuze an.

  ☐ Amira bekommt zum Geburtstag von ihren Eltern zwei Geschenke, von ihren 5 Freundinnen jeweils ein Geschenk und von ihrer Oma ein Geschenk.

  ☐ Ayla hat zweimal 5 Bonbons auf den Tisch gelegt. Susi legt noch ein Bonbon dazu.

  ☐ Yang verschenkt 5 Bonbons an ein Kind und gibt dann Tom zwei Bonbons.

  ☐ Tino bekommt zweimal 5 € und kauft sich für einen Euro ein Eis.

- Warum passen die anderen Rechengeschichten nicht?

Schreiben von Rechengeschichten zu Termen

36

- Schreibe zu jedem Term eine eigene Rechengeschichte auf.
  Woher weißt du, welche Rechengeschichte passt? Begründe.

$6 \cdot 3$	____________________
$6 + 3$	____________________
$6 - 3$	____________________
$6 : 3$	____________________
$(6 + 2) : 4$	____________________

Zuordnen von Sachzusammenhängen zu Termen mit Variablen **37**

- Verbinde jeden Term mit der passenden Situation.
- Woher weißt du, dass der Term zur Situation passt? Begründe.

$12 \cdot x + 4$

$12 : y - 4$

$12 + a + 4$

$12 \cdot b \cdot 4$

Eine unbekannte Zahl wird mit 12 multipliziert und dann werden 4 addiert.

Die Zahl 12 wird durch eine unbekannte Zahl geteilt und dann werden 4 weggenommen.

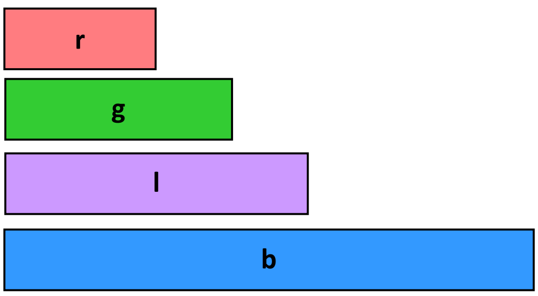
Zur Zahl 12 werden eine unbekannte Zahl und 4 dazugegeben.

Das Zwölffache einer unbekannten Zahl wird mit 4 multipliziert.

Zum Zwölffachen einer unbekannten Zahl werden 4 dazugegeben.

Legen von Streifenbildern zu Termen mit Variablen **38**

Material: *farbige Streifen (siehe Vorlage)*



r ist 2 cm lang.

g ist 3 cm lang.

l ist 4 cm lang.

b ist 7 cm lang.

Lege die Gesamtstrecke aus den farbigen Streifen passend zu den Termen:

- $r + g + l + b$
- $b + g + b + g$
- $r + r + g$
- $2 \cdot l + r$

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

X+Y

Idee der Terme
Aufstellen und Interpretieren von Termen

Zeichnen von Strecken zu Termen mit Variablen

39

 b = 2 cm — Die blaue Strecke ist 2 cm lang.

 r = 3 cm — Die rote Strecke ist 3 cm lang.

 g = 4 cm — Die grüne Strecke ist 4 cm lang.

Merve zeichnet zu dem Term g + r + b die Strecke:

Zeichne zu den folgenden Termen die Strecken auf.

- b + r + b + r
- g + g + r + b
- g + r + g + b + g
- 3 · r + b

Bild 18: „Mädchen Zöpfe“, cc by nc 4.0, erstellt mit dem © Worksheet Crafter – www.worksheetcrafter.com

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

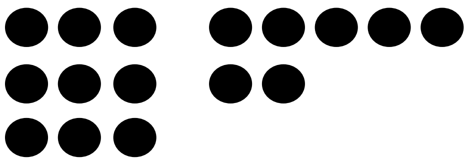
X+Y

Idee der Terme
Aufstellen und Interpretieren von Termen

Identifizieren von Teiltermen in Punktebildern

40

Ina legt die Aufgabe **3 · 3 + 7** mit Plättchen.



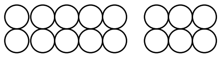
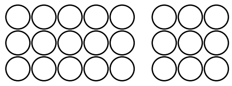
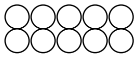
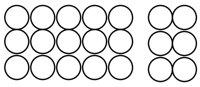
Wo findest du **3 · 3** im Bild?

- Kreise ein.

Wo findest du **+ 7** im Bild?

- Kreise mit einer anderen Farbe ein.

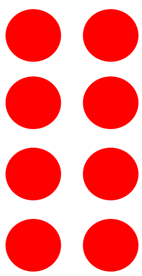
- Färbe die Plättchen im Bild passend zum Term blau oder rot.

10 + 6	
3 · 5 + 3 · 3	
2 + 2 · 5	
15 + 3 · 2	

Material: *rote und blaue Plättchen*

Der erste Teil der Aufgabe **4 · 2 + 5 · 3** wurde bereits mit Plättchen gelegt.

- Ergänze den zweiten Teil der Aufgabe mit blauen Plättchen.



Interpretieren eines Sachverhalts durch Zuordnen von Teiltermen **43**

In Katjas Spardose befinden sich 15 Euro.
In diesem Jahr bekommt sie in jedem Monat 5 Euro Taschengeld.
Oma schenkt ihr zum Geburtstag 50 Euro.

Katja schreibt: $\boxed{12 \cdot 5 + 15 + 50}$

- Ordne die Karten passend zu.

$12 \cdot 5$	Geld von Oma
15	Taschengeld im Jahr
50	Geld in der Spardose

- Was kann Katja mit diesem Term berechnen?

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

X+Y

Idee der Terme
Aufstellen und Interpretieren von Termen

Identifizieren von Teiltermen in einem Text **44**

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Ming nimmt an einem Schwimmkurs teil.

Für den Kurs haben seine Eltern ihm eine Badehose für 15 Euro, Badelatschen für 7 Euro und eine Schwimmbrille für 5 Euro gekauft.

Einmal pro Woche findet eine Schwimmstunde statt.
Für jede Schwimmstunde bezahlt die Familie 12 Euro.

Nach 3 Monaten ist der Kurs beendet.

Welche Kosten entstehen für die Familie nur einmal?
- Unterstreiche die Angaben rot.

Welche Kosten entstehen für die Familie in jeder Woche?
- Unterstreiche die Angaben grün.

Interpretieren von Teiltermen auf der Grundlage eines Sachzusammenhangs **45**

Max, Amira, Saskia und Dan gehen ins Kino.
Für den Eintritt bezahlen sie insgesamt 36 Euro.
Jeder kauft sich ein Getränk für 3 Euro und zwei Schokoriegel für je 1 Euro.

Max überlegt, wie viel Geld er bezahlen muss.

Max scheibt: $\boxed{36 : 4 + 2 \cdot 1 + 3}$

Was bedeuten die einzelnen Teile im Term?

- Schreibe auf.

$\boxed{36 : 4}$ ______________________________

$\boxed{2 \cdot 1}$ ______________________________

$\boxed{+ 3}$ ______________________________

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

X+Y

Idee der Terme
Aufstellen und Interpretieren von Termen

Identifizieren von Teiltermen als Beschreibung eines Bildes **46**

Material: farbige Streifen (siehe Vorlage)

w — w ist die Länge des weißen Streifens

r — r ist die Länge des roten Streifens

g — g ist die Länge des grünen Streifens

g	**r**	**r**	**w**	**w**	**r**	**r**	**w**

- Lege die Strecke nach.
- Kannst du in deiner Strecke den Teilterm **r + r + w** entdecken? Zeige ihn.

Erkennen der Substitution von Teiltermen mithilfe von Streifenbildern

Material: *farbige Streifen (siehe Vorlage)*

w	w ist die Länge des weißen Streifens
r	r ist die Länge des roten Streifens
g	g ist die Länge des grünen Streifens

r	g	r	r	w	w

Yusuf schreibt zur Strecke den Term **r + g + r + r + w + r**.

- Lege die Strecke nach.

Elias schreibt zur Strecke den Term **r + g + r + g + r.**

- Lege den Term von Elias mit neuen Streifen nach.
- Vergleiche beide Strecken. Was hat Elias gemacht? Beschreibe.

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

X+Y

Idee der Terme
Aufstellen und Interpretieren von Termen

Identifizieren und Substituieren von Teiltermen

Material: *farbige Streifen (siehe Vorlage)*

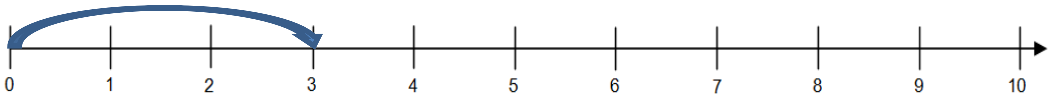
w	w ist die Länge des weißen Streifens
r	r ist die Länge des roten Streifens
g	g ist die Länge des grünen Streifens

g	**w**	**r**	**r**	**g**	**r**	**w**

- Lege die Strecke nach.
- Kannst du die Teilterme **w + r** entdecken? Zeige sie.
- Nimm die Streifen weg, aus denen die Teilterme **w + r** gelegt sind.
- Ersetze w + r durch einen anderen Streifen, ohne die Länge der gesamten Strecke zu verändern.
- Schreibe den neuen Teilterm auf.

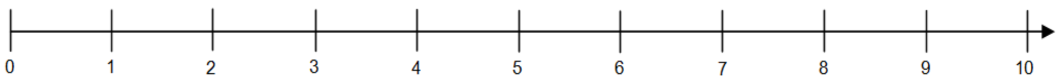
Das Zeichen ☺ bedeutet: Immer drei Schritte nach rechts.

Ayla zeichnet:



Das Zeichen ☾ bedeutet: Immer 5 Schritte nach rechts.

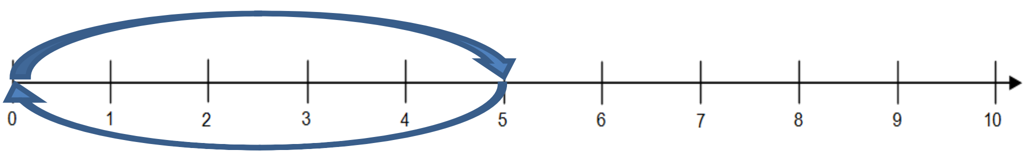
- Zeichne ☾ am Zahlenstrahl ein. Beginne bei 0.

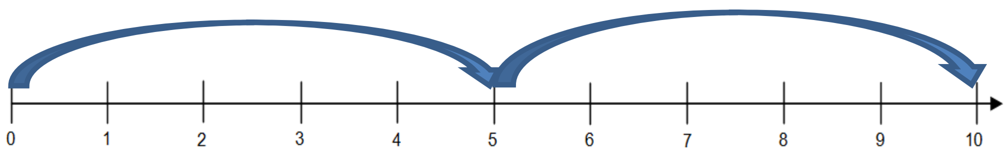


Das Zeichen ☾ bedeutet: Immer 5 Schritte nach rechts.

Welcher Zahlenstrahl passt zu 2 · ☾ ?

- Begründe deine Entscheidung.





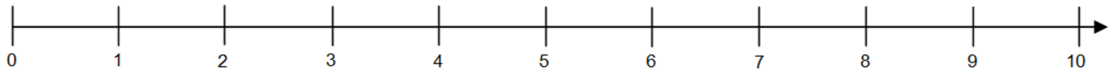
Nacheinanderausführen von als Term dargestellten Operationen

51

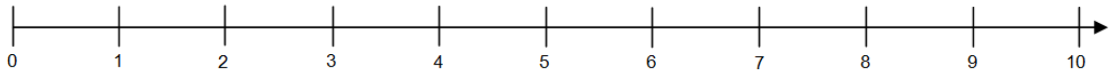
Das Zeichen ⇨ bedeutet: zwei Schritte nach rechts.

Das Zeichen ⇦ bedeutet: zwei Schritte nach links.

- Zeichne ⇨ ⇨ ⇨ in den Zahlenstrahl ein.



- Zeichne ⇨ ⇨ ⇨ ⇦ in den Zahlenstrahl ein.



Auswählen eines passenden Terms zur Nacheinanderausführung von Operationen

52

Das Zeichen ☾ bedeutet: 25 Schritte nach rechts.

Das Zeichen ⇨ bedeutet: 10 Schritte nach rechts.

Das Zeichen ⇦ bedeutet: 10 Schritte nach links.

Ich starte bei 0. Mit welchen Zeichenfolgen lande ich bei 30?

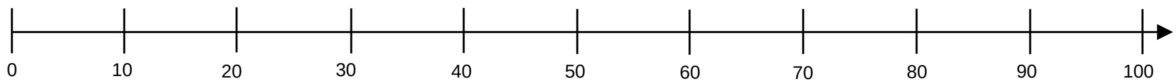
- Kreuze an.

☐ ☾ ⇨

☐ ☾☾ ⇦ ⇦

☐ ☾☾ ⇨ ⇨

☐ ⇨ ⇨ ⇨



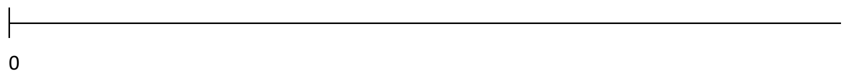
Ermitteln von Zeichenfolgen (Termen) zur Nacheinanderausführung von Operationen | **53**

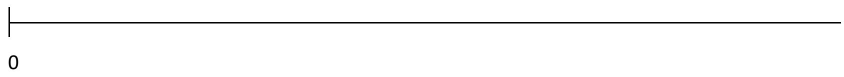
Das Zeichen ☾ bedeutet: 25 Schritte nach rechts.

Das Zeichen ⇨ bedeutet: 10 Schritte nach rechts.

Das Zeichen ⇦ bedeutet: 10 Schritte nach links.

- Du startest bei 0. Finde zwei verschiedene Zeichenfolgen, mit denen du bei 50 landest.





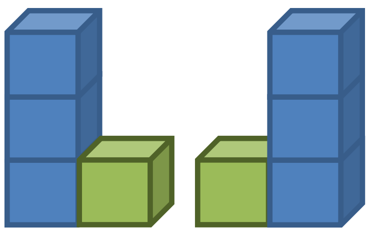
Erkennen von gleichwertigen Termen zu Würfelgebäuden | **54**

Alle Terme passen zum Bild.

- Zeige die Terme im Bild.

$3 + 1 + 1 + 3$

$2 \cdot 3 + 2 \cdot 1$

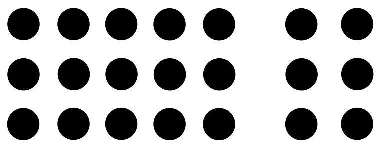


$2 \cdot (3 + 1)$

$6 + 2$

Erkennen von gleichwertigen Termen zum Punktbild

55



Ich sehe in diesem Bild $\boxed{3 \cdot 5 + 3 \cdot 2}$

Welche Terme passen noch zum Bild?

- Kreuze an und zeige im Bild.

☐ $5 + 2$	☐ $5 \cdot 3$
☐ $3 \cdot 5 + 3 \cdot 1$	☐ $3 + 3 + 3 + 3 + 1$
☐ $7 \cdot 3$	☐ $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$
☐ $15 + 6$	

Ermitteln von gleichwertigen Termen zu Bildern

56

- Finde verschiedene Terme zu diesem Bild.
- Zeige jeden Term am Bild.

Aufstellen von gleichwertigen Termen zu komplexen Bildern

57

- Finde verschiedene Terme zu diesem Bild.
- Zeige jeden Term am Bild.

Bild 21: „Stühle“, cc by nc 4.0, erstellt mit dem © Worksheet Crafter – www.worksheetcrafter.com

Ermitteln von gleichwertigen Termen durch das Umlegen von Streifenbildern

58

Material: farbige Streifen (siehe Vorlage)

g = 3 cm
r = 2 cm
l = 4 cm

- Lege die Strecke mit den farbigen Streifen nach.
- Schreibe einen passenden Term zur Strecke auf.

- Ordne die Streifen anders an.
- Finde einen passenden Term, der zu deiner Strecke passt.

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

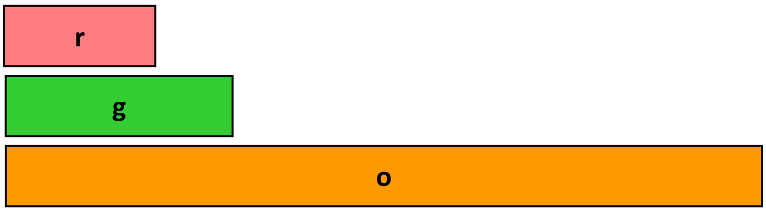
X+Y

Idee der Terme
Vergleichen von Termen

Ermitteln von gleichwertigen Termen durch das Legen von Streifenbildern

59

Material: farbige Streifen (siehe Vorlage)



- Lege mit grünen und roten Streifen eine Strecke, die genauso lang ist wie orange.
- Schreibe zu deiner Strecke einen Term.

- Finde eine weitere Möglichkeit, mit grün und rot diese Strecke zu legen.
- Schreibe auch hier den Term auf.

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

X+Y

Idee der Terme
Vergleichen von Termen

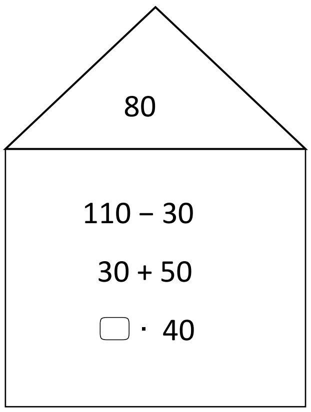
Erkennen von Termen mit gleichem Termwert durch Einsetzen von vorgegebenen Zahlen

60

Das Ergebnis jeder Aufgabe soll 80 sein.
In der letzten Aufgabe fehlt eine Zahl.

- Setze nacheinander für ▢ die Zahlen ein.
  Welche dieser Zahlen passt?

0	1	2	3



Gleichungen und Funktionen Grundschule	X+Y	Idee der Terme Vergleichen von Termen

Überprüfen der Gleichwertigkeit von Termen nach Einsetzen von Zahlen	61

Zwei Aufgaben sollen immer das gleiche Ergebnis haben.
Elias und Vivien haben die fehlenden Zahlen eingesetzt.

- Überprüfe, ob sie richtig eingesetzt haben und kreuze an.
- Begründe deine Entscheidung.

$4 \cdot 9$	und	$\underline{3} \cdot 12$	☐ richtig	☐ falsch
$100 : 5 + \underline{5}$	und	$18 + 12$	☐ richtig	☐ falsch

Gleichungen und Funktionen Grundschule	X+Y	Idee der Terme Vergleichen von Termen

Erkennen von Termen mit gleichem Termwert nach Einsetzen einer Zahl	62

Setze die Zahl 4 in jeden Term ein.

- Welche Aufgaben haben nun das gleiche Ergebnis?
- Markiere sie in der gleichen Farbe.

$100 + \square : 2$

$\square + 96$

$50 \cdot (\square - 2)$

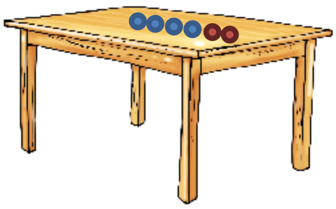
$106 - \square$

$(190 - \square) - (\square + 80)$

Material: rote und blaue Plättchen

Lege auf den Tisch rote und blaue Kugeln wie im Bild.

- Wie heißt der Term, den du siehst?



Geh auf die gegenüberliegende Seite des Tisches.

- Welchen Term siehst du jetzt?
- Was stellst du fest?

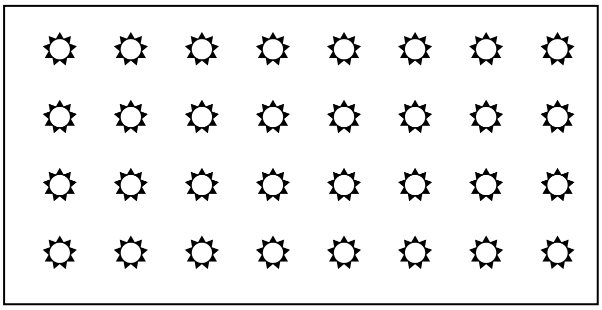
Bild 22: „Tisch“, cc by nc 4.0, erstellt mit dem © Worksheet Crafter – www.worksheetcrafter.com

Maria sieht im Bild die Aufgabe $\boxed{8 \cdot 4}$

- Zeige die Aufgabe im Bild.

Erik sieht im Bild die Tauschaufgabe $\boxed{4 \cdot 8}$

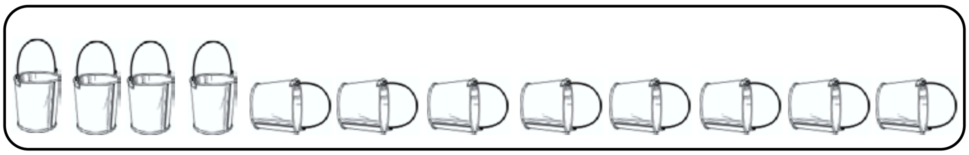
- Zeige ebenfalls im Bild.



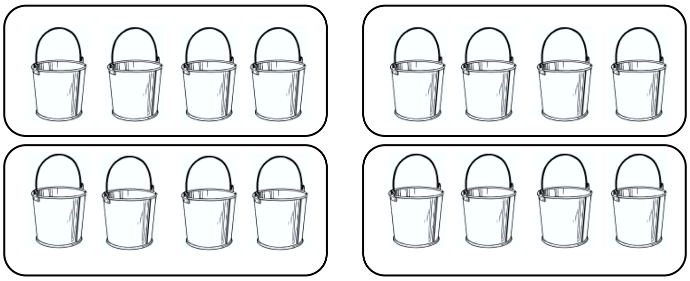
Begründen der Nichtkommutativität der Subtraktion und Division

Zu den Aufgaben wurde ein passendes Bild gezeichnet.

12 − 8



16 : 4



- Warum kann man zu den Aufgaben keine Tauschaufgaben bilden?

Bild 23: „Eimer“, cc by nc 4.0, erstellt mit dem © Worksheet Crafter – www.worksheetcrafter.com

Untersuchen der Rechenregel *Punkt- vor Strichrechnung* mit einem Bild

Der Term $\boxed{8 + 5 \cdot 3}$ passt zum Bild.

- Zeige den Term im Bild.

Max sagt:

Ich kann den Term auch zusammenfassen und **13 · 3** schreiben.

Inga rechnet so:

Wenn ich den Term zusammenfasse, erhalte ich **8 + 15**.

Wer hat Recht?

- Zeige am Bild.

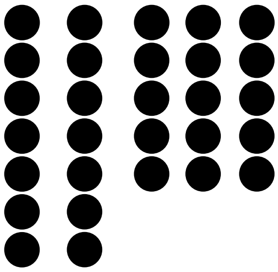
Bild 24: „Junge Haare orange“, pixabay.com, CC0 *Bild 25: „Mädchen Schleife“, pixabay.com, CC0*

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der Terme
Vergleichen von Termen

Beschreiben von Rechenregeln zum Herstellen gleichwertiger Terme **67**

Bild



passende Aufgabe

$7 + 7 + 5 + 5 + 5$

Ali und Alina schreiben die Aufgabe kürzer.

Ali schreibt: $2 \cdot 7 + 3 \cdot 5$

Alina fasst zusammen: $14 + 15$

- Beschreibe, was Erik und Alina gemacht haben.
- Zeige auch am Bild.

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der Terme
Vergleichen von Termen

Ermitteln gleichwertiger Terme durch Nutzen von Rechenregeln und Rechengesetzen **68**

Immer 3 Aufgaben gehören zusammen, weil sie das gleiche Ergebnis haben.

- Verbinde sie miteinander.

$\boxed{10 + (15 : 3)}$

$\boxed{10 + (15 - 5)}$

$\boxed{3 \cdot 5}$

$\boxed{10 \cdot (5 - 3)}$

$\boxed{3 \cdot 10 - 10}$

$\boxed{3 \cdot 15 - 3 \cdot 10}$

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

X+Y

Idee der Terme
Vergleichen von Termen

Darstellen von Rechenregeln und Rechengesetzen mit Streifenbildern | **69**

Material: farbige Streifen (siehe Vorlage)

r	**r**	**g**	**g**	**r**	**g**

r = 2 cm
g = 3 cm

Elias schreibt: r + r + g + g + r + g
Tara schreibt kürzer: 3 · r + 3 · g
Stella schreibt noch kürzer: 3 · (r + g)

- Lege die Strecke aus den farbigen Streifen nach. Zeige Elias Term.
- Lege die Streifen so um, dass du auch Taras und Stellas Term sehen kannst.
- Beschreibe, was Tara und Stella mit dem Term von Elias gemacht haben.

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

X+Y

Idee der Terme
Vergleichen von Termen

Ermitteln eines Terms zu einem Streifenbild und Erkennen gleichwertiger Terme | **70**

Material: farbige Streifen (siehe Vorlage)

r	**g**	**r**	**g**

r = 2 cm
g = 3 cm

Lege die Strecke mit den farbigen Streifen nach.
Schreibe einen passenden Term zu der Strecke auf.

Kreise die Terme ein, die auch zu der Streckenlänge passen.

2 · r + 2 · g	(r + g) + (r + g)
r + g + r + g + r	3 · r + 4 · g
2 · (r + g)	

Herstellen von gleichwertigen Termen durch Umformen **71**

- Schreibe die beiden Terme kürzer und ergänze die Lücken.

6 + 6 + 6 + 6 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3	7 + 7 + 7 + 2 + 2 + 2
↓ ↓	↓
4 · 6 + ______	
↓ ↓	↓
24 + ______	

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

X+Y

Idee der Terme
Vergleichen von Termen

Herstellen von gleichwertigen Termen durch Zusammenfassen und Umformen **72**

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

- Schreibe den Term kürzer.
- Finde eine weitere Möglichkeit.

3 + 4 + 3 + 3 + 4 + 3	3 + 4 + 3 + 3 + 4 + 3
↓	↓
↓	↓

Beschreiben von Termumformungen

Der Term $\boxed{2 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1}$ soll kürzer geschrieben werden.

Lan schreibt: $3 \cdot (2 + 1)$

- Was hat Lan gemacht? Beschreibe.
- Finde zwei weitere passende Terme.

____

____

Streifenvorlagen

weiße Streifen (w = 1 cm)

w	w	w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	w	w	w	w	w	w	w	w

rote Streifen (r = 2 cm)

r	r	r	r	r	r	r
r	r	r	r	r	r	r

grüne Streifen (g = 3 cm)

g	g	g	g	g
g	g	g	g	g
g	g	g	g	g

lila Streifen (l = 4 cm)

l	l	l	l
l	l	l	l
l	l	l	l
l	l	l	l

blaue Streifen (b = 7 cm)

b	b
b	b
b	b
b	b
b	b

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

orangene Streifen (o = 10 cm)

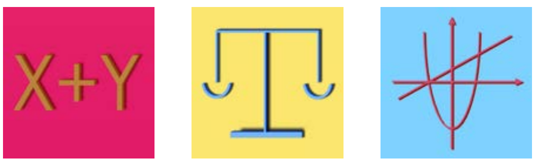
o
o
o
o
o
o
o
o
o
o

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Förderaufgaben

Idee der Terme

Sekundarstufe I



Übersicht über die Förderempfehlungen: Aufgaben 1, 2 — E, F, G

Förderschritte zu den Diagnoseaufgaben

1. Beschreiben von Sachzusammenhängen mit Termen
2. Legen und Beschreiben von Streifenbildern mit Worten
3. Beschreiben des Aufbaus eines Kartenhauses mit Worten
4. Beschreiben von Streifenbildern mit Worten
5. Beschreiben von Streifenbildern mit Termen
6. Beschreiben von Streifenbildern mit Termen
7. Zuordnen von Termen zu Streifenbildern
8. Beschreiben des Umfangs einer sechseckigen Figur mit Termen
9. Beschreiben des Flächeninhalts eines Rechtecks mit Termen
10. Zuordnen von Termen zur Länge einer zusammengesetzten Figur
11. Beschreiben des Umfangs von Streifenbildern mit Termen
12. Abändern von Termen zu gegebenen Sachzusammenhängen
13. Beschreiben von Sachzusammenhängen mit komplexen Termen
14. Entwickeln von Streifenbildern zu Termen
15. Entwickeln von Sachzusammenhängen zu Termen
16. Identifizieren von Teiltermen und deren Interpretation im Sachzusammenhang
17. Identifizieren von Teiltermen und deren Interpretation im Sachzusammenhang
18. Identifizieren und Zuordnen von Teiltermen
19. Schrittweises Interpretieren von Teiltermen
20. Färben von Flächeninhalten zu gegebenen Teiltermen
21. Identifizieren von Teiltermen bei einer zusammengesetzten Figur
22. Substituieren von Teiltermen mithilfe von Streifenbildern
23. Substituieren von Teiltermen mithilfe von Streifenbildern
24. Substituieren von Teiltermen (Winkel)
25. Substituieren von Teiltermen (Umfang eines Dreiecks)
26. Schrittweises Substituieren von Teiltermen
27. Substituieren von Teiltermen
28. Substituieren von Teiltermen
29. Interpretieren von Termen mit Variablen als Operatoren mithilfe von Bildern
30. Verbinden von einfachen Termen und Wortvorschriften
31. Verbinden von komplexeren Termen und Wortvorschriften
32. Formulieren von Wortvorschriften zu komplexen Termen
33. Interpretieren von Termen (mit Variablen) als Operatoren
34. Interpretieren von Termen mit Variablen als Operatoren (Wurzel und Quadrat)
35. Erkennen von gleichwertigen Termen mithilfe von Streifenbildern
36. Erkennen von gleichwertigen Termen mithilfe von Streifenbildern
37. Finden und Überprüfen von gleichwertigen Termen mithilfe von Streifenbildern
38. Finden von gleichwertigen Termen in Streifenbildern
39. Finden und Erklären von gleichwertigen Termen in Streifenbildern
40. Aufstellen von gleichwertigen Termen für zusammengesetzte Figuren
41. Aufstellen von gleichwertigen Termen zur Flächeninhaltsberechnung
42. Finden und Begründen gleichwertiger Terme (Umfang geometrischer Figuren)
43. Finden von gleichwertigen Termen in Sachzusammenhängen
44. Erkennen von gleichwertigen Termen durch Einsetzen
45. Herstellen von äquivalenten Termen durch Umformen
46. Erkennen von Termen mit gleichem Termwert durch Einsetzen
47. Erkennen von Termen mit gleichem Termwert durch Einsetzen
48. Untersuchen von Termbeziehungen unter Nutzung von Rechenregeln
49. Untersuchen von Termbeziehungen unter Nutzung von Umkehroperationen
50. Untersuchen von Termbeziehungen unter Nutzung von Umkehroperationen
51. Untersuchen von Termbeziehungen unter Nutzung von Umkehroperationen

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

52. Herstellen von äquivalenten Termen durch Umformen
53. Herstellen von äquivalenten Termen durch Umformen – Kommutativgesetz
54. Herstellen von äquivalenten Termen durch Umformen – Kommutativgesetz
55. Herstellen von äquivalenten Termen durch Umformen – Assoziativgesetz
56. Herstellen von äquivalenten Termen durch Umformen – Assoziativgesetz
57. Herstellen von äquivalenten Termen durch Umformen – Distributivgesetz
58. Herstellen von äquivalenten Termen durch Umformen – Distributivgesetz
59. Herstellen von äquivalenten Termen durch Umformen – Distributivgesetz (Ausklammern)
60. Herstellen von äquivalenten Termen durch Umformen – Zusammenfassen
61. Erkennen nicht zusammenfassbarer Summanden
62. Herstellen von äquivalenten Termen durch Zusammenfassen
63. Erkennen nicht zusammenfassbarer Summanden
64. Erkennen nicht zusammenfassbarer Summanden im Sachkontext
65. Herstellen von äquivalenten Termen durch Umformen – Distributivgesetz (2 Summen)
66. Herstellen von äquivalenten Termen durch Umformen – Distributivgesetz (2 Summen)
67. Herstellen von äquivalenten Termen durch Umformen – Binome (Schreibweisen)
68. Quadrieren von Summen mithilfe des Distributivgesetzes
69. Quadrieren von Differenzen mithilfe des Distributivgesetzes
70. Erkennen von Mustern beim Ausmultiplizieren identischer Binome
71. Untersuchungen von Lösungen auf Fehler bei der Anwendung binomischer Formeln

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der Terme
Aufstellen und Interpretieren von Termen

Beschreiben von Sachzusammenhängen mit Termen **1**

Lisa geht mit ihrer Schwester zum Eislaufen. Lisa bezahlt für beide.
Der Eintritt kostet 3 € pro Stunde und Person. Jedes Mädchen leiht sich Schlittschuhe für 5 € aus.

- Beschreibe, wie Lisa die Kosten ausrechnen kann, wenn beide Mädchen …
  - eine Stunde bleiben,
  - zwei Stunden bleiben,
  - fünf Stunden bleiben.

- Beschreibe, wie Lisa die Gesamtkosten für eine beliebige Anzahl an Stunden berechnen kann.

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der Terme
Aufstellen und Interpretieren von Termen

Legen und Beschreiben von Streifenbildern mit Worten **2**

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Material: *blaue, gelbe und rote Streifen*

Mit den Streifen lassen sich unterschiedliche Strecken legen.

Beispiel:

Die Strecke besteht aus 2 roten, 2 gelben und 5 blauen Streifen.

- Lege aus den Streifen selbst verschiedene Strecken.
- Beschreibe jeweils die Strecke.

Beschreiben des Aufbaus eines Kartenhauses mit Worten | 3

Emil baut ein Kartenhaus.

Die Karten zwischen den Etagen werden nicht gezählt!

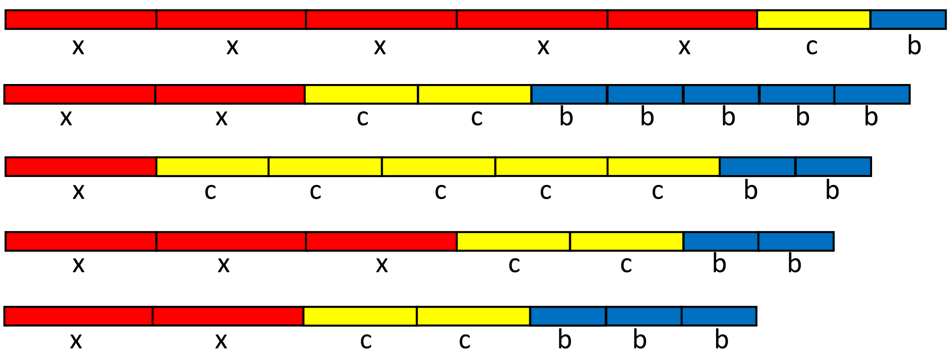
- Beschreibe, wie viele Karten in jeder Etage hinzukommen. Beginne in der obersten Reihe.
- Beschreibe, wie er die Anzahl der Karten in der untersten Etage herausbekommen kann, wenn es 5 Etagen gibt.
- Beschreibe, wie Emil die Anzahl aller Karten eines Kartenhauses mit 5 Etagen bestimmen kann.

Bild 1: „Kartenhaus", © Pixabay-Lizenz, https://pixabay.com/photos/house-of-cards-fragile-patience-763246/ (letzter Zugriff 20.12.17)

Beschreiben von Streifenbildern mit Worten | 4

Material: *blaue, gelbe und rote Streifen*

- Lege die Strecken nach und beschreibe sie.

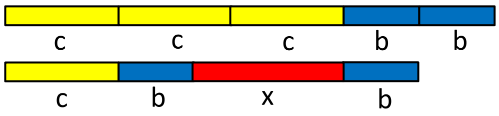


Beschreiben von Streifenbildern mit Termen **5**

Material: *blaue, gelbe und rote Streifen*

Die Papierstreifen gleicher Farbe sind gleich lang.

(blauer Streifen 5 cm; gelber Streifen 7,5 cm; roter Streifen 10 cm)



- Lege die Bilder nach.
- Gib jeweils einen Term an, mit dem du die Länge der aus Papierstreifen gebauten Strecke berechnen kannst.
- Berechne die Länge in cm.

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

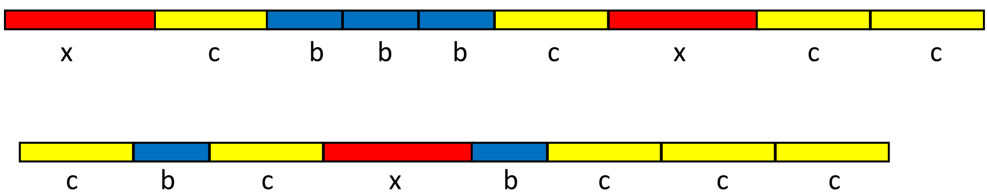
X+Y

Idee der Terme
Aufstellen und Interpretieren von Termen

Beschreiben von Streifenbildern mit Termen **6**

Material: *blaue, gelbe und rote Streifen*

Die Papierstreifen gleicher Farbe sind gleich lang.



- Lege die Bilder nach.
- Gib jeweils einen Term an, mit dem du die Länge der aus Papierstreifen gebauten Strecke berechnen kannst.
- Sortiere die Streifen um und gib neue Terme zur Berechnung der Länge an.

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

X+Y

Idee der Terme
Aufstellen und Interpretieren von Termen

Zuordnen von Termen zu Streifenbildern **7**

- Ordne die Terme den Strecken zu.

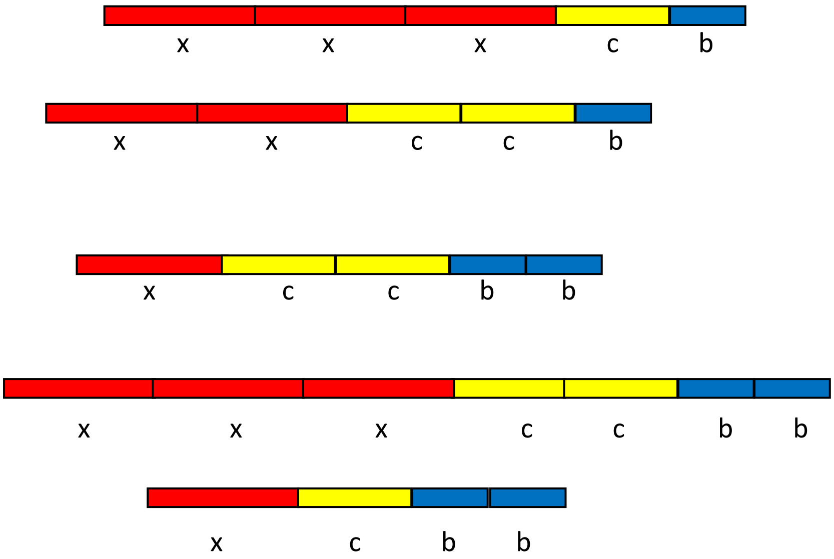
x + c + c + 2 · b

2 · x + 2 · c + b

x + x + x + 2 · c + 2 · b

x + x + x + c + b

x + c + b + b



Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

X+Y

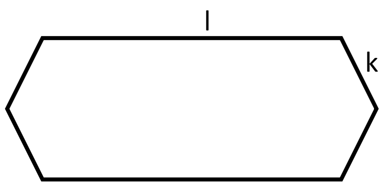
Idee der Terme
Aufstellen und Interpretieren von Termen

Beschreiben des Umfangs einer sechseckigen Figur mit Termen **8**

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Die Schüler bauen zur Gestaltung des Klassenraums aus Leisten sechseckige Bilderrahmen. Sie schneiden dazu eine Leiste in Stücke. Die langen Seiten des Rahmens sind 8 cm lang. Die kürzeren Seiten sind 4 cm lang.

- Wie lang muss eine Leiste sein, damit sie daraus einen Rahmen bauen können?



Die Schüler wollen solche Rahmen auch in anderen Größen bauen und probieren einiges aus.

- Beschreibe, wie man die Länge der jeweils benötigten Leiste berechnen kann.
- Gib dafür einen Term an.

Bild 2: „Sechseck", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

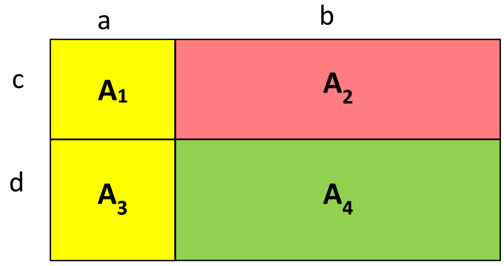
X+Y

Idee der Terme
Aufstellen und Interpretieren von Termen

Beschreiben des Flächeninhalts eines Rechtecks mit Termen | **9**

Der Flächeninhalt der Fläche A_1 kann mit dem Term **a · c** berechnet werden.

- Gib jeweils einen Term an, mit dem man die Flächeninhalte der Flächen A_2, A_3, A_4 berechnen kann.



- Schreibe einen Term auf, mit dem man den Flächeninhalt der gesamten gelben Fläche berechnen kann.

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

X+Y

Idee der Terme
Aufstellen und Interpretieren von Termen

Zuordnen von Termen zur Länge einer zusammengesetzten Figur | **10**

Mara zerschneidet eine Leiste in fünf Stücke und baut daraus einen Untersetzer.
Das Stück in der Mitte ist ein Quadrat.

Welche Terme beschreiben die Gesamtlänge der Leiste?

- Kreise passende Terme ein.
- Begründe deine Entscheidung.

a + 2 · a + 2 · a + 2 · a + 2 · a

2 · a + a

5 · a

a + 4 · 2 · a

9 · a

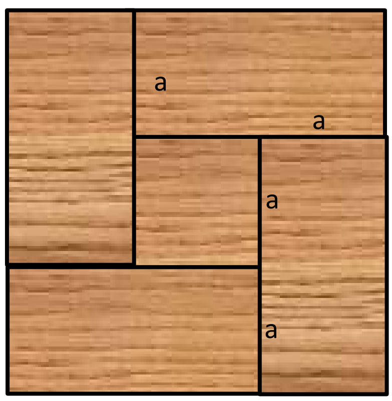


Bild 3: „Untersetzer“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

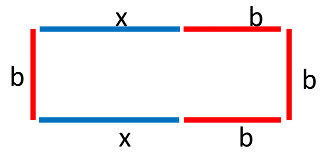
Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der Terme
Aufstellen und Interpretieren von Termen

Beschreiben des Umfangs von Streifenbildern mit Termen | 11

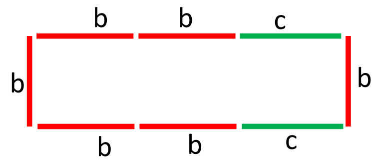
Die Länge einer Seite des gezeigten Rechtecks lässt sich durch den Term **x + b** beschreiben.

- Erstelle einen Term zur Berechnung des Umfangs dieses Vierecks.



Bei einem weiteren Rechteck lässt sich die Länge einer Seite mit dem Term **2b + c** beschreiben.

- Lege das Viereck mit Streifen nach.



- Erstelle einen Term zur Berechnung des Umfangs dieses Vierecks.

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der Terme
Aufstellen und Interpretieren von Termen

Abändern von Termen zu gegebenen Sachzusammenhängen | 12

Die Jungenmannschaft des Fußballvereins fährt mit 36 Spielern ins Trainingslager. Sie schlafen in 4-Bett-Zimmern. Die vier Trainer erhalten Einzelzimmer.

Mit dem Term $\boxed{36 : 4 + 4}$ kann man die Anzahl der Zimmer berechnen.

- Erkläre den Term.
- Wie muss der Term geändert werden, wenn die Jungen in 3-Bett-Zimmern schlafen?
- Wie muss der Term geändert werden, wenn vier Jungen weniger mitfahren?
- Wie muss der Term geändert werden, wenn die Trainer in Doppelzimmern schlafen?

In einer anderen Mannschaft fahren 42 Jungen zum Trainingslager. Sie schlafen in 3-Bett-Zimmern. Die vier Trainer erhalten Einzelzimmer.

- Erstelle einen Term zur Berechnung der Anzahl der Zimmer.

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

X+Y

Idee der Terme
Aufstellen und Interpretieren von Termen

Beschreiben von Sachzusammenhängen mit komplexen Termen **13**

Die Schule veranstaltet einen Spendenlauf, bei dem ein Sponsor für jede gelaufene Runde einen festen Geldbetrag zahlt.

- Malik erstellt schrittweise einen Term, mit dem der gespendete Betrag berechnet werden kann. Sieh dir die Tabelle an und erkläre jeweils den Term:

	Situation	**Term**
(1)	Die Jugendlichen sind insgesamt eine bestimmte Anzahl von Runden gelaufen.	x
(2)	Das Lehrerkollegium verpflichtet sich, insgesamt 20 Runden zu laufen.	x + 20
(3)	Pro Runde erhält die Schule 0,50 € von ihrem Sponsor.	(x + 20) · 0,5
(4)	Die Sparkasse spendet zusätzlich noch einen Festbetrag von 100 €.	(x + 20) · 0,5 + 100

Im nächsten Jahr zahlt der Sponsor 0,65 € für jede Runde, das Lehrerkollegium läuft insgesamt 30 Runden, die Sparkasse spendet leider nichts und der Sportplatzbetreiber möchte eine Nutzungsgebühr von 20 €.

- Schreibe einen neuen Term auf, mit dem der gespendete Betrag berechnet werden kann.

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

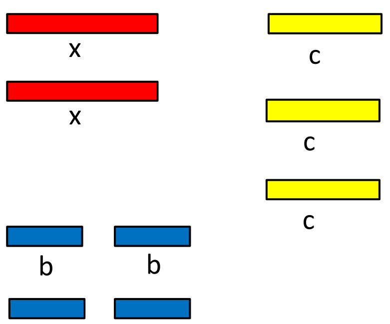
X+Y

Idee der Terme
Aufstellen und Interpretieren von Termen

Entwickeln von Streifenbildern zu Termen **14**

Material: *blaue, gelbe und rote Streifen*

- Lege die Papierstreifen so aneinander, dass sie zu den Termen passen.



2 · x + 3 · c + 4 · b

x + 2 · c + b

x + x + c + c + b + b + b

x + c + c + c + 2 · b

2 · x + c + b + b

Entwickeln von Sachzusammenhängen zu Termen **15**

- Gib zu dem Term einen passenden Sachverhalt an. Erkläre die Bedeutung der Variablen x.

Term	**Sachverhalt**	**Bedeutung der Variablen x**
$x \cdot 0{,}5$	Marlon verkauft Figuren für 0,50 € pro Stück.	Anzahl der verkauften Figuren
$x + 5$		
$2 \cdot x$		
$x \cdot 2 + 3$		

Identifizieren von Teiltermen und deren Interpretation im Sachzusammenhang **16**

Kaugummi 1,35 € / Packung
Saft 2,20 € / Flasche

Anais kauft ein. Sie überlegt, wie viel sie bezahlen muss: $\boxed{5 \cdot 1{,}35\ €}$

Welches Produkt hat Anais gekauft?
Wie oft hat sie dieses Produkt gekauft?

- Beschreibe, woran du das erkennst.

Bruno berechnet für seinen Einkauf: $\boxed{8 \cdot 2{,}20\ €}$

Was hat Bruno gekauft?
Wie viel hat er davon gekauft?

- Beschreibe, woran du das erkennst.

Identifizieren von Teiltermen und deren Interpretation im Sachzusammenhang

17

Kaugummi 1,35 € / Packung
Saft 2,20 € / Flasche

Cedric kauft Kaugummi und mehrere Flaschen Saft.
Er überlegt, wie viel er bezahlen muss:

$5 \cdot 2{,}20\text{ €} + 3 \cdot 1{,}35\text{ €}$

- Unterstreiche im Term den Gesamtpreis für Kaugummi rot.
- Unterstreiche im Term den Gesamtpreis für Saft blau.
- Gib an, wie viel er wovon gekauft hat.

Identifizieren und Zuordnen von Teiltermen

18

- Ordne den Termen den richtigen Sachverhalt zu.

Felix kauft zwei Brote, vier helle und sechs dunkle Brötchen.	$5 \cdot 0{,}35 + 3 \cdot 0{,}50$
Delia kauft fünf helle und drei dunkle Brötchen.	$8 \cdot 0{,}35 + 2{,}60$
Emil kauft ein Brot und acht helle Brötchen.	$4 \cdot 0{,}35 + 2 \cdot 2{,}60 + 6 \cdot 0{,}50$

Beim Bäcker

Brot
2,60 €

helle Brötchen
0,35 €

dunkle Brötchen
0,50 €

Gregor bezahlt $15 \cdot 0{,}35 + 12 \cdot 0{,}50$.

- Beschreibe, was Gregor beim Bäcker gekauft hat.

Schrittweises Interpretieren von Termen

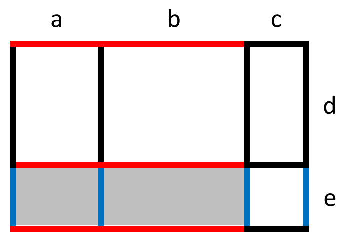
Ergänze den Sachverhalt in der Tabelle. Unterstreiche immer den Teil des Terms, um den der vorhergehende Term ergänzt wurde.

Eintritt		**Imbissangebot**	
Kinder	3,50 €	Bratwurst	2,25 €
Erwachsene	5,50 €	Limo	1,75 €
		Eis	1,50 €

Lena feiert im Schwimmbad Geburtstag.	
k	Sie weiß noch nicht, wie viele Kinder kommen.
$3{,}50 \cdot k$	
$3{,}50 \cdot k + 5{,}50$	
$3{,}50 \cdot k + 5{,}50 + 1{,}50 \cdot e$	
$3{,}50 \cdot k + 5{,}50 + 1{,}50 \cdot e + 2{,}25 \cdot b$	
$3{,}50 \cdot k + 5{,}50 + 1{,}50 \cdot e + 2{,}25 \cdot b + 1{,}75 \cdot k$	

Färben von Flächeninhalten zu gegebenen Teiltermen

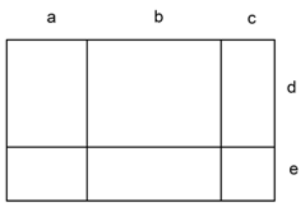
Der Term $(a + b) \cdot e$ beschreibt in der Figur den Flächeninhalt der grauen Fläche.



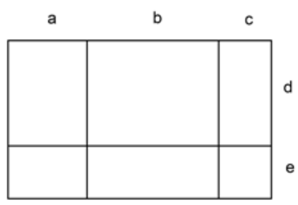
- Zeige in der Figur, wie dieser Term entstanden ist.

- Färbe jeweils diejenigen Flächen, deren Inhalt so beschrieben werden kann:

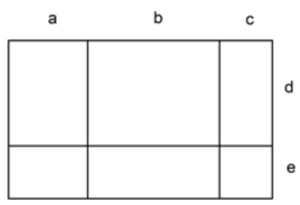
$(b + c) \cdot e$



$b \cdot (d + e)$

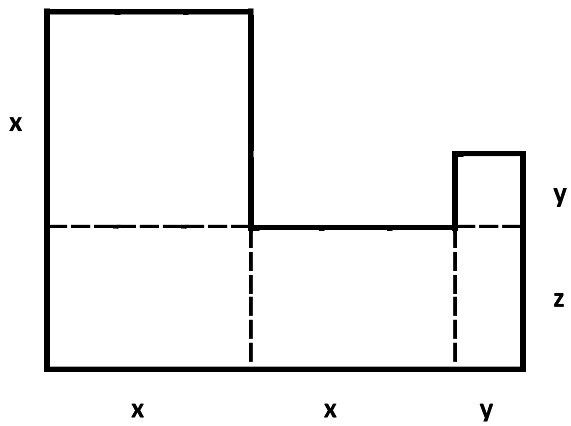


$a \cdot d + b \cdot e$



Identifizieren von Teiltermen bei einer zusammengesetzten Figur

21



Gero stellt für den Flächeninhalt der Figur einen Term auf:

$$A = x \cdot x + x \cdot z + x \cdot z + y \cdot z + y \cdot y$$

- Unterstreiche jeden Teilterm mit einer anderen Farbe.
- Färbe in der Figur die einzelnen Flächen jeweils mit der entsprechenden Farbe.

Bild 4: „Figur“, Wagner, LISUM, CC-0

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

X+Y

Idee der Terme
Aufstellen und Interpretieren von Termen

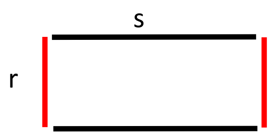
Substituieren von Teiltermen mithilfe von Streifenbildern

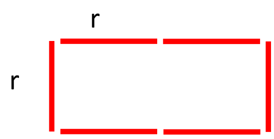
22

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Mia legt ein Rechteck aus 2 roten und 2 schwarzen Stäben.

Der Term **2 · r + 2 · s** beschreibt den Umfang des Rechtecks.



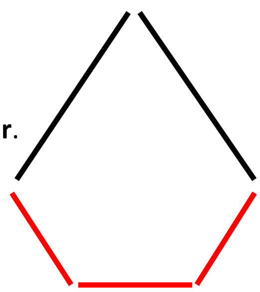


Ein schwarzer Stab ist doppelt so lang wie ein roter.

Das Rechteck kann auch nur mit roten Stäben gelegt werden.

- Erkläre und vervollständige die folgende Rechnung:

  $2 \cdot r + 2 \cdot s = 2 \cdot r + 2 \cdot 2 \cdot r =$ .... $= 6 \cdot r$



Ein Fünfeck aus 2 schwarzen und 3 roten Stäben hat den Umfang **2 · s + 3 · r**.

- Schreibe einen Term für den Umfang desselben Fünfecks auf, wenn wieder nur rote Stäbe verwendet werden.

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der Terme
Aufstellen und Interpretieren von Termen

Substituieren von Teiltermen mithilfe von Streifenbildern **23**

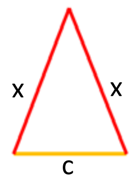
Material: *rote, blaue und gelbe Stäbe oder ähnliches*

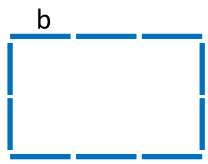
b ist die Länge eines blauen Stabes, b = 5 cm.

c ist die Länge eines gelben Stabes, c = 7,5 cm.

x ist die Länge eines roten Stabes, x = 10 cm.

- Lege ein Dreieck aus zwei roten Stäben und einem gelben Stab.
  Sein Umfang beträgt x + x + c.
- Lege nun aus Stäben ein Dreieck gleicher Form und Größe, aber ohne rote Stäbe.
- Gib einen Term für den Umfang des neuen Dreiecks an.





- Lege das gezeigte Rechteck nur aus blauen Stäben.
- Lege nun nur aus gelben und roten Streifen das gleiche Rechteck.
- Gib jeweils einen Term für den Umfang der beiden Rechtecke an.
- Begründe, warum sich der Gesamtumfang nicht geändert hat.

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der Terme
Aufstellen und Interpretieren von Termen

Substituieren von Teiltermen (Winkel) **24**

In einem Dreieck ist der Winkel β doppelt so groß wie α und der Winkel γ ist um 20° größer als α.

Gesucht ist ein Term, der die Innenwinkelsumme in diesem Dreieck beschreibt und nur die Variable α enthält.

- Ergänze:

	Schreibe
β ist doppelt so groß wie α.	$\beta = 2 \cdot \alpha$
γ ist um 20° größer als α.	$\gamma =$

- Ersetze β und γ durch die Terme mit α.

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_$$

Substituieren von Teiltermen (Umfang eines Dreiecks) — 25

Für ein Dreieck mit den Seiten a, b und c gilt:

- b ist halb so groß wie a,
- c ist 3 cm kleiner als das Doppelte von a.

Gesucht ist ein Term für den Umfang des Dreiecks, der nur die Variable a enthält.

- Schreibe für b und c Terme mit a.

  b =

  c =

- Ersetze b und c im Term für den Umfang.

  a + b + c =

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der Terme
Aufstellen und Interpretieren von Termen

Schrittweises Substituieren von Teiltermen — 26

	Hedda schreibt:
In ein Glas passen 0,3 Liter Wasser.	g = 0,3 ℓ
Aus einer Flasche kann man genau 4 Gläser füllen.	f = 4 · g
Ein Getränkekasten enthält 12 Flaschen.	k = 12 · f
Auf einer Palette stehen 36 Kästen.	p = 36 · k

- Stelle schrittweise einen Term auf, mit dem berechnet werden kann, wie viel Liter Wasser sich insgesamt auf der Palette befindet.

p = **36** · **k**

p = **36** · **12** · **f**

p =

p =

Substituieren von Teiltermen

Der Term $(x + 5)^2 - 3 \cdot (x + 5) + 8$ kann anders geschrieben werden:

$$(x + 5)^2 - 3 \cdot (x + 5) + 8$$
$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$
$$a^2 \quad - 3 \cdot a \quad + 8$$

Dabei wurde x + 5 durch a ersetzt.

- Ersetze in den folgenden Termen wie angegeben.

Term		neuer Term
$(3 + a) \cdot (3 + a) - 7 \cdot (3 + a)$	$(3 + a) = x$	
$x + 2 \cdot y$	$y = 8 + x$	
$x^4 + 3 \cdot x^2 - 5$	$x^2 = z$	

Substituieren von Teiltermen

Der Term $12 \cdot x^2 - 5 \cdot x$ hat dieselbe Struktur wie $12 \cdot (3 - z)^2 - 5 \cdot (3 - z)$.

Hier wurde x durch 3 – z ersetzt.

$$12 \cdot x^2 - 5 \cdot x$$
$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$
$$12 \cdot (3 - z)^2 - 5 \cdot (3 - z)$$

In den folgenden Termen ist ebenfalls versucht worden, Variablen durch Terme zu ersetzen. Leider ist dabei etwas schief gegangen.

- Finde die Fehler und erkläre, wie man richtig vorgeht.

Term		neuer Term
$3 \cdot x + x^2$	$x = 5 - y$	$3 \cdot 5 - y \ + 5 - y^2$
$2 \cdot a + 11$	$a = \sqrt{b}$	$2 \cdot a \cdot \sqrt{b} + 11$
$b^2 + b - 3$	$b = c^2$	$c^2 + c^2 - 3$

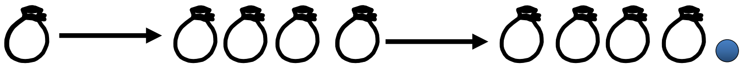
Interpretieren von Termen mit Variablen als Operatoren mithilfe von Bildern

29

Terme beschreiben, wie mit einer unbekannten Zahl x gerechnet werden soll.

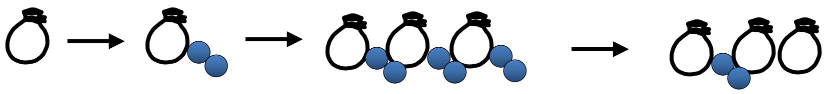
Beispiele:

4 · x + 1



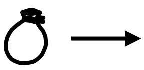
x ⟶ **4 · x** ⟶ **4 · x + 1**

(x + 2) · 3 – 4



x ⟶ **x + 2** ⟶ ____________ ⟶ ______________

- Veranschauliche wie in den Beispielen mit Bildern, was der Term **(x + 5) · 2 + 1** bedeutet.



Verbinden von einfachen Termen und Wortvorschriften

30

Es wird mit einer unbekannten Zahl x gerechnet. Die Rechnung wird mit einem Term dargestellt.

- Verbinde passend.

Zu einer unbekannten Zahl wird 4 addiert.

x : 4

Eine unbekannte Zahl wird vervierfacht.

4 – x

Eine unbekannte Zahl wird geviertelt.

4 + x

Von 4 wird eine unbekannte Zahl subtrahiert.

x · 4

Eine unbekannte Zahl wird um 4 vermindert.

x – 4

Eine unbekannte Zahl wird von der Zahl 4 subtrahiert.

Verbinden von komplexeren Termen und Wortvorschriften **31**

Marvin beschreibt den Term 3 · (x + 2). „Zu einer unbekannten Zahl wird 2 addiert und die Summe anschließend mit 3 multipliziert.“

- Ordne den Termen die richtige Beschreibung zu.

4 · x + 2

2 · x – 4

(x + 2) · 4

4 + x – 2

4 + (x – 2)

Eine unbekannte Zahl wird zur 4 addiert und anschließend wird 2 subtrahiert.

Die Summe aus einer unbekannten Zahl und 2 wird mit 4 multipliziert.

Von der unbekannten Zahl wird 2 subtrahiert und zum Ergebnis dann 4 addiert.

Vom Doppelten einer unbekannten Zahl wird 4 subtrahiert.

Zum Vierfachen einer Zahl wird 2 addiert.

Formulieren von Wortvorschriften zu komplexen Termen **32**

Es wird mit einer unbekannten Zahl x gerechnet. Die Rechnung wird mit einem Term dargestellt. Beispiele:

Term	in Worten
(x + 2) · 3	Zur Zahl x wird 2 addiert. Danach wird das Ergebnis mit 3 multipliziert.
5 · x – 1	Erst wird das Fünffache der Zahl gebildet. Dann wird davon 1 subtrahiert.

- Fülle die Lücken aus.

Term	in Worten
x · 2 + 5	
	Erst wird das Produkt einer unbekannten Zahl und 4 gebildet. Dann wird das Ergebnis mit 3 addiert.
(3 + x) · 4	
	Erst wird eine unbekannte Zahl durch 4 dividiert. Anschließend wird der Quotient mit 11 addiert.
4 : (x – 7)	
	Eine unbekannte Zahl wird mit sich selbst multipliziert. Danach wird von dem Produkt das Vierzehnfache der unbekannten Zahl subtrahiert.

Interpretieren von Termen (mit Variablen) als Operatoren **33**

Der Preis **p** ist der Preis für ein Computerspiel und wird verändert.
Der Term **(p : 2) + 3** beschreibt den neuen Preis.
Das bedeutet: Der Preis wurde erst halbiert und anschließend wieder um 3 € erhöht.

Andere Preise wurden auch geändert.

	alter Preis	neuer Preis (in €)
Turnschuhe	t	t – 19
Kopfhörer	k	(k + 5) : 2
Jeans-Hose	h	h · 0,75 - 2

- Beschreibe, wie sich die Preise verändert haben.

Interpretieren von Termen mit Variablen als Operatoren (Wurzeln und Quadrat) **34**

Der Term $x^2 + 4$ beschreibt, dass die unbekannte Zahl x erst quadriert wird und anschließend zum Ergebnis 4 addiert wird.

Der Term $(x + 4)^2$ bedeutet, dass erst zur unbekannten Zahl x die 4 addiert wird und danach das Ergebnis quadriert wird.

- Beschreibe die folgenden Terme wie in den obigen Beispielen mit Worten.

$\boxed{2 + \sqrt{x}}$

$\boxed{\sqrt{2 + x}}$

$\boxed{2 - x^2}$

$\boxed{x \cdot x + 4}$

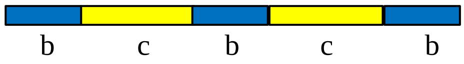
$\boxed{(2 - x)^2}$

$\boxed{x \cdot (x + 4)}$

Erkennen von gleichwertigen Termen mithilfe von Streifenbildern

35

Material: *9 blaue Streifen, 6 gelbe Streifen*



Streckenzug

b ist die Länge eines blauen Streifens, b = 5 cm.

c ist die Länge eines gelben Streifens, c = 7,5 cm.

- Der Term b + c + b + c + b lässt sich als Streckenzug aus Streifen darstellen.
  Du siehst ihn im Bild oben.

  Lege folgende Streckenzüge:
  A) c + b + c + b + b **B)** c + c + b + b + b **C)** c + 2·b + c + b **D)** c + b + 2·b + c
- Begründe: Alle diese Terme lassen sich zu 3·b + 2·c zusammenfassen.
- Bestimme durch Messen oder Rechnen die Länge s der Streckenzüge zu diesen Termen.
  Was kannst du feststellen?

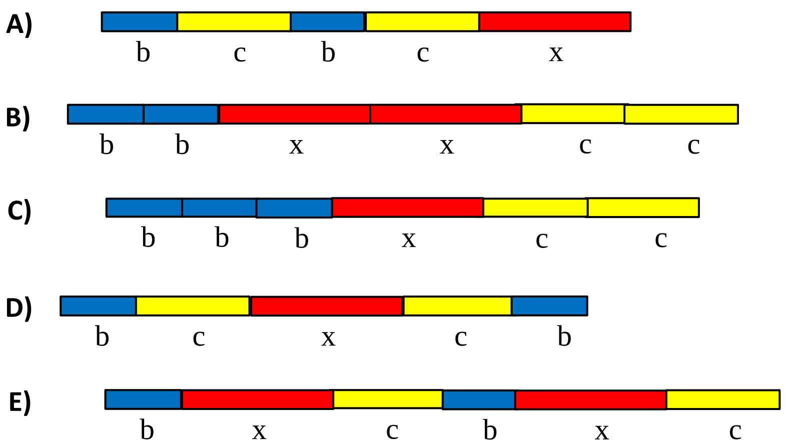
Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

X+Y

Idee der Terme
Vergleichen von Termen

Erkennen von gleichwertigen Termen mithilfe von Streifenbildern

36



b ist die Länge des blauen Streifens, b = 5 cm.

c ist die Länge des gelben Streifens, c = 7,5 cm.

x ist die Länge des roten Streifens, x = 10 cm.

Oben sind die Streckenzüge A bis E dargestellt. Die Streckenzüge können durch Terme beschrieben werden, z. B.: A) b + c + b + c + x.

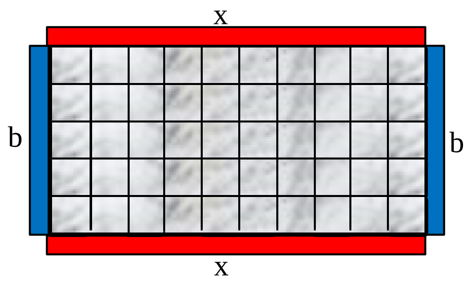
- Gib zu jedem Streckenzug B bis E einen passenden Term an.
- Vereinfache, wenn möglich, deine Terme durch Zusammenfassen.
- Welche Terme sind gleichwertig? Begründe.
- Zu welchem Bild passt der Term 2·(b + x + c)? Zeige und erkläre.

Finden und Überprüfen von gleichwertigen Termen mithilfe von Streifenbildern **37**

Material: *blaue Streifen, rote Streifen, Papier mit Quadratraster (1 cm x 1 cm)*

b ist die Länge eines blauen Streifens, b = 5 cm.

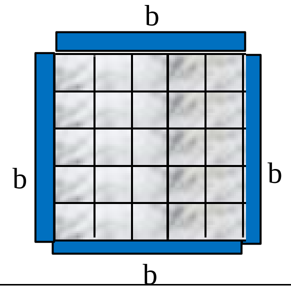
x ist die Länge eines roten Streifens, x = 10 cm.



Der Flächeninhalt eines Rechteckes berechnet sich immer als Produkt aus Länge und Breite.
Du kannst das oben abgebildete Rechteck mithilfe von Streifen legen.
Wenn du es auf Rasterpapier legst, kannst du die Flächeneinheiten auszählen.

- Beschreibe den Flächeninhalt des oben abgebildeten Rechteckes mithilfe eines Terms.

Rechts ist ein Quadrat dargestellt.

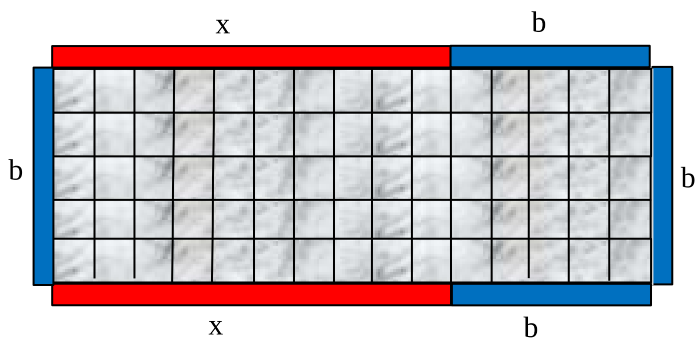


- Beschreibe seinen Flächeninhalt durch zwei verschiedene Terme.
  Prüfe durch Rechnung, ob beide Terme denselben Wert liefern.

Bild 5: „Kacheln Rechteck", LISUM, CC-0 *Bild 6: „Kacheln Quadrat", LISUM, CC-0*

Finden von gleichwertigen Termen in Streifenbildern **38**

Material: *blaue Streifen, rote Streifen, Papier mit Quadratraster (1 cm x 1 cm)*



b ist die Länge des blauen Streifens, b = 5 cm.

x ist die Länge des roten Streifens, x = 10 cm.

Du kannst das oben abgebildete Rechteck mithilfe von Streifen legen.
Wenn du es auf Rasterpapier legst, kannst du die Flächeneinheiten auszählen.

- Gib zwei Terme an, mit denen man den Flächeninhalt des abgebildeten Rechtecks berechnen kann.

Bild 7: „Kacheln", LISUM, CC-0

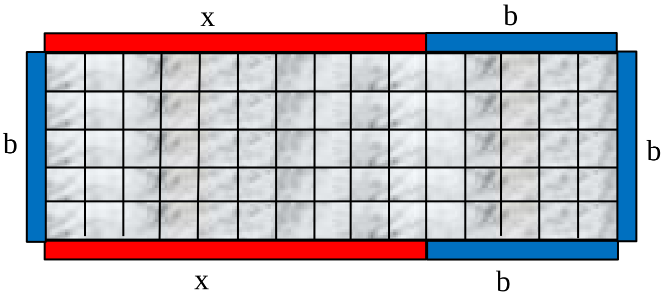
Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

X+Y

Idee der Terme
Vergleichen von Termen

Finden und Erklären von gleichwertigen Termen in Streifenbildern | **39**

Material: *8 blaue Streifen, 2 rote Streifen, Papier mit Quadratraster (1 cm x 1 cm)*



b ist die Länge des blauen Streifens, b = 5 cm.

x ist die Länge des roten Streifens, x = 10 cm.

- Erkläre an dieser Figur, warum der Flächeninhalt dieses Rechteckes sowohl durch den Term $(x + b) \cdot b$ als auch durch den Term $x \cdot b + b^2$ berechnet werden kann.
  - Berechne den Flächeninhalt.

- Lege oder zeichne ein Rechteck, bei dem die zwei langen Seiten aus je 3 blauen Streifen der Länge b bestehen und die zwei kurzen Seiten aus je 1 blauen Streifen der Länge b.
  - Beschreibe den Flächeninhalt durch einen Term.
  - Berechne damit den Flächeninhalt.

- Erkläre am Bild und am Term, warum die Flächeninhalte beider Rechtecke gleich sein müssen.

Bild 8: „Kacheln", LISUM, CC-0

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

X+Y

Idee der Terme
Vergleichen von Termen

Aufstellen von gleichwertigen Termen für zusammengesetzte Figuren | **40**

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

- Beschreibe den Flächeninhalt der Figur durch zwei verschiedene Terme.

- Erkläre deine zwei Terme an der Zeichnung.

Hinweis: Du kannst auch Hilfslinien einzeichnen.

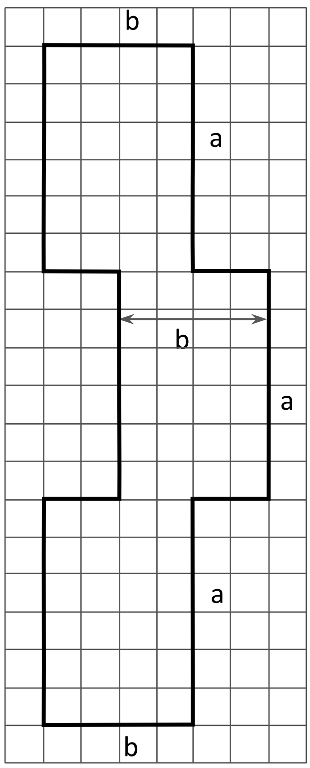


Bild 9: „Vieleck", LISUM, CC-0

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

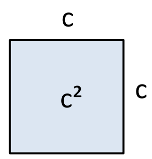
X+Y

Idee der Terme
Vergleichen von Termen

Aufstellen von gleichwertigen Termen zur Flächeninhaltsberechnung

41

Das abgebildete kleine Quadrat hat die Seitenlänge c.
Sein Flächeninhalt beträgt somit: $A = c \cdot c = c^2$.



Das abgebildete große Quadrat ist aus mehreren kleinen Quadraten zusammengesetzt.

- Gib zwei verschiedene Terme an, mit denen man den Flächeninhalt des großen Quadrates berechnen kann.

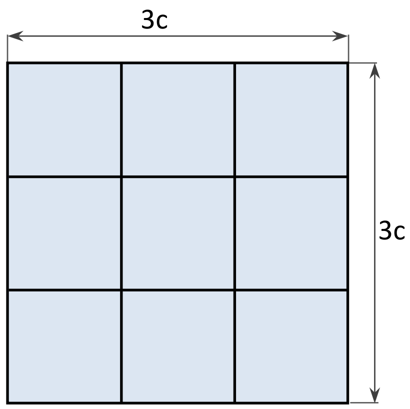


Bild 10: „Quadrat", LISUM, CC-0

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

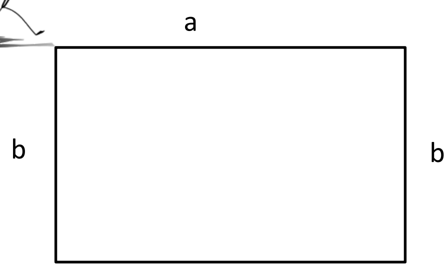
X+Y

Idee der Terme
Vergleichen von Termen

Finden und Begründen gleichwertiger Terme (Umfang geometrischer Figuren)

42

Der Umfang eines Rechtecks ist die Strecke, die man zurücklegt, wenn man die Außenlinie des Rechtecks einmal abläuft.



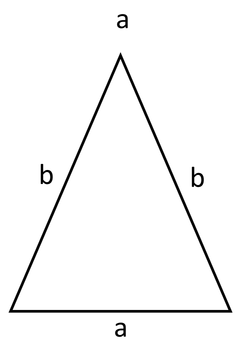
In dem abgebildeten Rechteck mit den Seitenlängen a und b soll dieser Umfang durch einen Term beschrieben werden.

Lars sagt: „Ich rechne $a + b + a + b$."

Mara sagt: „Ich rechne lieber $2a + 2b$."

Nick meint: „Man kann auch $2 \cdot (a + b)$ rechnen."

- Begründe an der Abbildung, warum alle drei Terme richtig sind.



- Gib zwei verschiedene Terme für den Umfang des abgebildeten Dreiecks an.

Bild 11: „Strichmänchent", © Pixabay-Lizenz, : https://pixabay.com/de/vectors/schreitenden-laufen-joggen-wandern-151823/ (Zugriff: 29.12.2017)

Finden von gleichwertigen Termen in Sachzusammenhängen

43

In der Abbildung ist ein Feriengrundstück dargestellt.

Man kann die Fläche eines solchen Feriengrundstücks durch einen Term beschreiben.

Herr Merten rechnet: $2x \cdot x + x \cdot x$

- Zeige an der Abbildung, wie diese Rechnung aufgestellt wurde.

- Gib einen anderen Term für die Fläche an und erkläre ihn an der Abbildung.

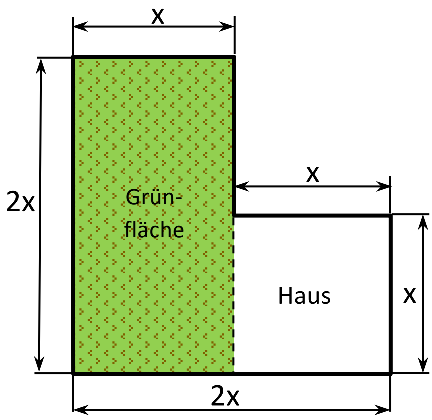


Bild 12: „Feriengrundstück", LISUM, CC-0

Erkennen von gleichwertigen Termen durch Einsetzen

44

Material: *12 blaue, 8 gelbe, 6 rote Streifen*

b ist die Länge eines blauen Streifens, b = 5 cm.

c ist die Länge eines gelben Streifens, c = 7,5 cm.

x ist die Länge eines roten Streifens, x = 10 cm.

A)

Der Term **A)** $b + c + b + c + x$ wurde im obigen Bild als Streckenzug dargestellt.

- Lege mit den Streifen den Term A und die folgenden Terme:

B) $b + x + b + x + 2 \cdot c$ **C)** $c + 2 \cdot x + 2 \cdot b + c$ **D)** $2 \cdot (b + c) + x$ **E)** $4 \cdot b + 2 \cdot c$

- Prüfe durch Einsetzen der Längen, welche Terme die gleiche Streckenlänge ergeben.

Jemand verwendet Streifen mit den gleichen Farben wie oben, aber mit anderen Längen.
Jetzt ist b = 6 cm, c = 8 cm und x = 10 cm.

- Prüfe, ob die Terme, die oben die gleiche Streckenlänge ergaben, auch jetzt noch die gleichen Werte liefern.
  Was stellst du fest?

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der Terme
Vergleichen von Termen

Herstellen von äquivalenten Termen durch Umformen

45

Bei der Darstellung von Termen sind für ein und denselben Term verschiedene Schreibweisen möglich.

Beispiele:

$5 \cdot x = 5x$ $\qquad$ $x \cdot x \cdot x = x^3$

$1 \cdot x = x$ $\qquad$ $\frac{1}{3} \cdot x = \frac{x}{3}$

$x \cdot 5 = 5x$ $\qquad$ $x \cdot \frac{2}{3} = \frac{2x}{3}$

$x \cdot x = x^2$ $\qquad$ $x : 4 = \frac{x}{4}$

- Schreibe die Terme in einer anderen Schreibweise.

$3 \cdot y =$ $\qquad$ $a \cdot 6 =$ $\qquad$ $b \cdot b =$

$1 \cdot y + a \cdot a =$ $\qquad$ $c : 5 =$ $\qquad$ $2 \cdot a : 3 =$

$\frac{3}{4} \cdot x =$ $\qquad$ $a \cdot a \cdot a =$ $\qquad$ $x \cdot \frac{1}{5} =$

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der Terme
Vergleichen von Termen

Erkennen von Termen mit gleichwertigem Termwert durch Einsetzen

46

- Vervollständige die folgende Tabelle, indem du in jeder Zeile die vorgegebenen Termwerte ausrechnest.

x	**2 · x**	**3 · x**	**2 · x + 3 · x**	**5 · x**	**5 + x**	**x · 5**
4	*8*	*12*	*20*			
5						
10						
0						
1						

- Welche Terme liefern in dieser Tabelle *immer* die gleichen Werte, wenn man für x eine Zahl einsetzt?

  Markiere die entsprechenden Spalten.

Erkennen von Termen mit gleichem Termwert durch Einsetzen **47**

- Vervollständige die folgende Tabelle, indem du in jeder Zeile die vorgegebenen Termwerte ausrechnest.

x	x^2	2x	3x	$2x \cdot 3x$	5x	6x	$6x^2$
3	9	6	9	54			
2							
10							
1							

- Prüfe, welche Terme in dieser Tabelle *immer* die gleichen Werte liefern, wenn man für x eine Zahl einsetzt.
  Markiere die entsprechenden Spalten.
- Finde Terme, die nur bei bestimmten Zahlen den gleichen Wert haben.
  Markiere entsprechende Zellen in der Tabelle.

Untersuchen von Termbeziehungen unter Nutzung von Rechenregeln **48**

Es gibt Terme, die sind gleichwertig, werden aber verschieden dargestellt.
Es gibt verschiedene Schreibweisen.
Auch mithilfe der Rechengesetze kann man entscheiden, ob zwei Terme gleichwertig sind.

Beispiele:
Es gilt: $3 + 5 = 5 + 3$. → $a + 3 = 3 + a$
Es gilt: $17 \cdot 2 \cdot 5 = 17 \cdot (2 \cdot 5) = 17 \cdot 10$ → $4 \cdot a \cdot 5 = 20 \cdot a = 20a$
Es gilt: $5 + 5 + 5 + 5 = 4 \cdot 5$ → $a + a + a + a = 4 \cdot a = 4a$
Es gilt: $8 \cdot (20 + 3) = 8 \cdot 20 + 8 \cdot 3$ → $8 \cdot (10 - 2a) = 8 \cdot 10 - 8 \cdot 2a = 80 - 16a$

- Welche der folgenden Terme (I – IV) sind jeweils gleichwertig? Unterstreiche und begründe.

a) I) $x + 5$ II) $x + x + x + x + x$ III) $5 + x$ IV) $2 + x + 3$

b) I) $6 \cdot x$ II) $x + x + x + x + x + x$ III) $6 + x$ IV) $2 \cdot 3x$

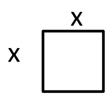
c) I) $16x^2$ II) $4 \cdot x \cdot 4 \cdot x$ III) $10 + 6x^2$ IV) $2 \cdot (5 + 3x^2)$

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

X+Y

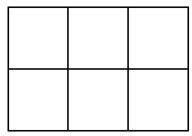
Idee der Terme
Vergleichen von Termen

Untersuchen von Termbeziehungen unter Nutzung von Umkehroperationen **49**

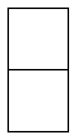


Die Fläche dieses Quadrates lässt sich mit dem Term x^2 beschreiben.

Die Fläche des abgebildeten Rechtecks wird durch $T_1 = 6 \cdot x^2$ beschrieben. →



- Beschreibe diese Fläche durch einen Term T_2. →



- Durch welche Rechenoperation wurde aus dem Term T_1 der Term T_2? Erkläre am Bild und am Term.

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

X+Y

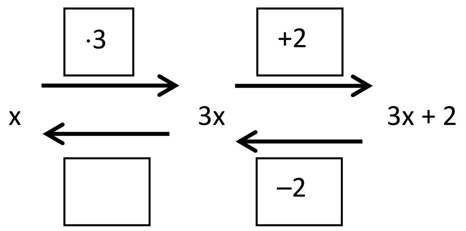
Idee der Terme
Vergleichen von Termen

Untersuchen von Termbeziehungen unter Nutzung von Umkehroperationen **50**

Tim nimmt die Variable x, multipliziert sie mit 3 und addiert anschließend 2.
Sarah möchte das nun wieder rückgängig machen.

- Hilf Sarah, indem du das freie Kästchen ausfüllst.

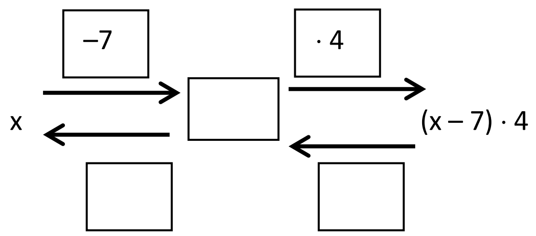
rückwärts:



Paula nimmt die Variable x, subtrahiert 7 und multipliziert anschließend mit 4.

- Mache Paulas Rechnung rückgängig, indem du die freien Kästchen ausfüllst.

rückwärts:



Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

X+Y

Idee der Terme
Vergleichen von Termen

Untersuchen von Termbeziehungen unter Nutzung von Umkehroperationen

51

Samuel nimmt eine Variable x, dividiert sie durch 2 und addiert anschließend 10.

$$x \xrightarrow{\boxed{}} x:2 \xrightarrow{\boxed{}} (x:2)+10$$

Justus macht alles rückgängig.

- Beschreibe seine Rechnungen in der richtigen Reihenfolge.

$$\boxed{} \xleftarrow{\boxed{}} \boxed{} \xleftarrow{\boxed{}} (x:2)+10$$

- Fülle die Lücken und die Kästchen aus.

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

X+Y

Idee der Terme
Vergleichen von Termen

Herstellen von äquivalenten Termen durch Umformen

52

Um den Flächeninhalt des abgebildeten Quadrates auszurechnen, benutzt Anne den Term $3 \cdot x \cdot 3 \cdot x$.

- Gib einen anderen Term für den Flächeninhalt an.
- Begründe mithilfe von Rechenregeln, dass dein Term gleichwertig ist.

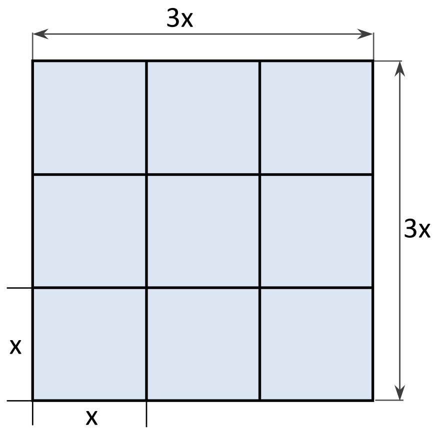


Bild 13: „Quadrat", LISUM, CC-0

Beim **Addieren** von Zahlen darf man die Summanden vertauschen **(Kommutativgesetz)**.

Beispiel: 13 + 8 = 8 + 13

Das gilt auch für Terme mit Variablen.

- Gib zu jedem der folgenden Terme einen anderen gleichwertigen Term an, indem du das Kommutativgesetz nutzt.

a) 3 + x **b)** 3 + x + 5 **c)** (–2) + a

d) 2b + 3a **e)** 3x + 2y + 4x **f)** 5a + (–2b) + (–3a)

Beim **Multiplizieren** von Zahlen darf man Faktoren vertauschen **(Kommutativgesetz)**.

Beispiel: 12 · 5 = 5 · 12

Das gilt auch für Terme mit Variablen.

- Gib zu jedem der folgenden Terme einen anderen gleichwertigen Term an, indem du das Kommutativgesetz nutzt.

a) x · 3 **b)** 3 · x · 5 **c)** a · (–2)

d) 2 · b · 3 · a **e)** x · 5 · x

Bei Termen mit mehreren Faktoren ist vereinbart, dass Zahlen am Anfang des Produktes stehen sollen und die nachfolgenden Faktoren alphabetisch sortiert werden.

Beispiel: *x* · 5 · a = 5ax

- Gib zu jedem der folgenden Terme einen anderen gleichwertigen Term an, der so sortiert ist.

f) c · p · 8 **g)** a · 3x · b **h)** o · m · a · 2

Gleichungen und Funktionen Sekundarstufe I	X+Y	**Idee der Terme** Vergleichen von Termen

Herstellen von äquivalenten Termen durch Umformen – Assoziativgesetz	**55**

Bei der **Addition** von mehr als zwei Zahlen kann man die Summanden beliebig zusammenfassen **(Assoziativgesetz)**. Damit kann man auch vorteilhaft rechnen.

Beispiele: $13 + 8 + 17 = (13 + 8) + 17 = 21 + 17$

$13 + 8 + 17 = 13 + (8 + 17) = 13 + 25$

$13 + 8 + 17 = (13 + 17) + 8 = 30 + 8$

Das gilt auch für Terme mit Variablen.

- Zu den folgenden Termen sollen gleichwertige Terme gebildet werden.
  Fasse die Terme so weit wie möglich zusammen. Nutze das Assoziativgesetz.

a) $5 + 7 + x$ **b)** $5 + x + 3$ **c)** $(a + 7) + 3$

d) $a + (-2) + 9$ **e)** $7 + 3 \cdot x + 4$ **f)** $-4 + a + 9$

g) $13 + x - 4$ **h)** $-4 + x - 2$

Gleichungen und Funktionen Sekundarstufe I	X+Y	**Idee der Terme** Vergleichen von Termen

Herstellen von äquivalenten Termen durch Umformen – Assoziativgesetz	**56**

Bei der **Multiplikation** von mehr als zwei Zahlen gilt, dass die Faktoren beliebig zusammengefasst werden dürfen **(Assoziativgesetz)**. Damit kann man auch vorteilhaft rechnen.

Beispiele: $2 \cdot 11 \cdot 5 = (2 \cdot 11) \cdot 5 = 22 \cdot 5$

$2 \cdot 11 \cdot 5 = 2 \cdot (11 \cdot 5) = 2 \cdot 55$

$2 \cdot 11 \cdot 5 = 11 \cdot (2 \cdot 5) = 11 \cdot 10$

Das gilt auch für Terme mit Variablen.

Bei Termen gibt es eine Besonderheit: Steht ein Zahlenfaktor vor einer Variablen, wird das Multiplikationszeichen oft nicht geschrieben.

Beispiel: $22 \cdot x = 22x$

- Zu den folgenden Termen sollen gleichwertige Terme gebildet werden.
  Fasse die Terme so weit wie möglich zusammen. Nutze das Assoziativgesetz.

a) $3 \cdot 5 \cdot x$ **b)** $2 \cdot x \cdot 5$ **c)** $a \cdot 7 \cdot a$

d) $11x \cdot 3$ **e)** $5x \cdot 3x$ **f)** $4x \cdot 2a \cdot 3x$

g) $(-2x) \cdot 3x \cdot (-3x)$ **h)** $-2x \cdot 3x \cdot (-3x)$ **i)** $(-2x) \cdot (-3x) \cdot (-3x)$

Wird beim Rechnen mit mehreren Zahlen addiert *und* multipliziert, kann das **Distributivgesetz** angewendet werden.

Es besagt, dass der Faktor vor oder hinter einer Klammer mit jedem Summanden in der Klammer multipliziert wird. Damit kann man auch vorteilhaft rechnen.

Beispiele: $\mathbf{7} \cdot (10 + 8) = \mathbf{7} \cdot 10 + \mathbf{7} \cdot 8$ oder auch: $(200 - 2) \cdot \mathbf{5} = 200 \cdot \mathbf{5} - 2 \cdot \mathbf{5}$

Das gilt auch für Terme mit Variablen.

- Gib zu jedem der folgenden Terme einen anderen gleichwertigen Term an, indem du das Distributivgesetz nutzt, wenn dies möglich ist.

a) $5 \cdot (7 + x)$ **b)** $5 \cdot (7 - x)$ **c)** $(a + 7) \cdot 3$

d) $5 \cdot 7 + x$ **e)** $(2x + 1) \cdot 4$ **f)** $x \cdot (a + 2)$

g) $2x \cdot (3x - 1)$ **h)** $(-2) \cdot (x + 5)$ **i)** $-2 \cdot (x + 5)$

Wird beim Rechnen mit mehreren Zahlen addiert *und* multipliziert, kann das **Distributivgesetz** angewendet werden.

Es besagt, dass der Faktor vor oder hinter einer Klammer mit jedem Summanden in der Klammer multipliziert wird.

Diese Regel gilt auch umgekehrt. Ein Faktor, der in jedem Summanden enthalten ist, kann vor eine gemeinsame Klammer gesetzt werden. Das nennt man auch **einen Faktor ausklammern.**

Beispiele: $\mathbf{13} \cdot 96 + \mathbf{13} \cdot 4 = \mathbf{13} \cdot (96 + 4) = 13 \cdot 100$

$\mathbf{8} \cdot 237 - \mathbf{8} \cdot 37 = \mathbf{8} \cdot (237 - 37) = 8 \cdot 200$

Das gilt auch für Terme mit Variablen.

- Gib zu jedem der folgenden Terme einen anderen gleichwertigen Term an, indem du einen gemeinsamen Faktor ausklammerst.

a) $5 \cdot 7 + 5 \cdot x$ **b)** $2 \cdot x + 2 \cdot y$ **c)** $3x + 3y + 3z$

d) $7 \cdot a + 7$ **e)** $5 \cdot 2 \cdot x - 5 \cdot y$ **f)** $12x - 6$

Herstellen von äquivalenten Termen durch Umformen – Distributivgesetz (Ausklammern) **59**

Das Distributivgesetz besagt, dass der Faktor vor oder hinter einer Klammer mit jedem Summanden in der Klammer multipliziert wird.

Beispiel: $a \cdot (x + 2) = ax + 2a$

Diese Regel gilt auch umgekehrt. Ein Faktor, der in jedem Summanden enthalten ist, kann vor eine gemeinsame Klammer gesetzt werden.

Beispiel: $5 \cdot 7 + 5 \cdot x = 5 \cdot (7 + x)$

Bei einigen Termen müssen solche Faktoren erst ermittelt werden.

Beispiele: $36xy + 48x^2 = 12 \cdot 3 \cdot x \cdot y + 12 \cdot 4 \cdot x \cdot x = 12x \cdot (3y + 4x)$

$36xy + 48x^2 = 6 \cdot 6xy + 6 \cdot 8x^2 = 6 \cdot (6xy + 8x^2)$

- Gib zu jedem der folgenden Terme einen anderen gleichwertigen Term an, indem du einen gemeinsamen Faktor ausklammerst.

a) $8xy + 6ay$ **b)** $24x^2 + 18xy$ **c)** $12ax - 6bx + 6x^2$

d) $10a^2x - 15ax^2 + 5ax$ **e)** $66x^3y - 44x^2y^3$ **f)** $5 \cdot (x + 1) + a \cdot (x + 1)$

j) $3 \cdot x + 5 \cdot x$ **k)** $7 \cdot a - 2 \cdot a$ **l)** $5x - 2x + 4x$

Herstellen von äquivalenten Termen durch Umformen – Zusammenfassen **60**

Werden Vielfache derselben Variablen addiert, können die Summanden zusammengefasst werden.

Beispiele: $3x + 5x = (3 + 5) \cdot x = 8x$ oder $5x - 2x + 4x = (5 - 2 + 4) \cdot x = 7x$

- Gib zu jedem der folgenden Terme einen gleichwertigen zusammengefassten Term an.

a) $5x + 2x$ **b)** $12x - 2x$

c) $13x + 6x - 11x$ **d)** $6xy + 9xy$

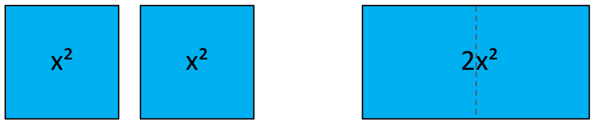
e) $14x^2 - 6x^2$ **f)** $3x \cdot x + 2x^2$

g) $5ab + 2ab$ **h)** $7ab - 3ba$

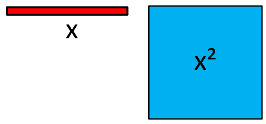
Erkennen nicht zusammenfassbarer Summanden

Der Term x + x lässt sich zusammenfassen: $x + x = 2 \cdot x$.

Der Term $x^2 + x^2$ lässt sich zusammenfassen: $x^2 + x^2 = 2 \cdot x^2$.



Der Term $x + x^2$ lässt sich **nicht** zusammenfassen.



- Erkläre die letzte Aussage anhand des Bildes.

Herstellen von äquivalenten Termen durch Zusammenfassen

Terme können durch Zusammenfassen kürzer geschrieben werden.
Dabei müssen die Rechengesetze beachtet werden.

Beispiel 1: $2x + 3x + 5x = 9x$

Beispiel 2: $2x \cdot 3x \cdot 5x = 30x^3$

Beispiel 3: $6a + 5x$
lässt sich nicht zusammenfassen

Beispiel 4: $6a \cdot 5x = 30ax$

Beispiel 5: $6x^2 + 5x$
lässt sich nicht zusammenfassen

Beispiel 6: $6x^2 \cdot 5x = 30x^3$

- Die nachfolgenden Termumformungen sind alle *falsch* ausgeführt.
  Erkläre, was falsch gemacht wurde und berichtige wenn möglich.

a) $4k + 2k = 6k^2$

b) $7x \cdot 3x = 10x^2$

c) $5a + 2b = 7ab$

d) $3x + 4x = 3 + 4 + x + x = 7 + 2x$

e) $5x \cdot 5x = 10x^2$

f) $4a^2 + 5a = 9a^3$

g) $12x : 3x = 4x$

h) $12x – 3x = 9$

Erkennen nicht zusammenfassbarer Summanden **63**

- Kennzeichne die Terme, die sich **nicht** zusammenfassen lassen. Begründe jeweils.

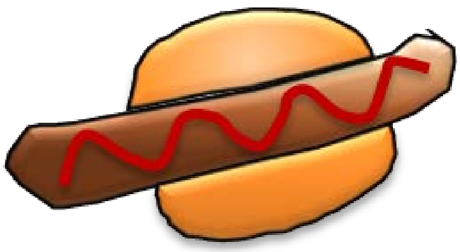
a) $14 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 2$ **b)** $3 \cdot a \cdot b - 2 \cdot b \cdot a + 4 \cdot a \cdot b$

c) $15 \cdot a^2 - 12 \cdot a \cdot a$ **d)** $3 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 - x^5$

e) $2x + 3y$ **f)** $4x^2 \cdot 3x$

g) $5 \cdot (x + 1) - 3 \cdot (x + 1)$

Erkennen nicht zusammenfassbarer Summanden im Sachkontext **64**



Ein Grillabend wird geplant. Alle Gäste bringen etwas mit. Es werden 8 Gäste sein.
Tobias soll Baguettes und Würste einkaufen. Er plant pro Gast 2 Würste und 1 Baguette, muss also 16 Würste und 8 Baguettes kaufen. Die Preise dafür kennt er noch nicht.

Wenn a der Preis für 1 Wurst ist und b der Preis für 1 Baguette, dann lässt sich der Preis für den gesamten Einkauf durch folgenden Term beschreiben: $16 \cdot a + 8 \cdot b$

Tobias fasst den Term so zusammen: $16 \cdot a + 8 \cdot b = 24 \cdot a \cdot b$

- Erkläre mithilfe des Beispiels, warum das falsch ist.

Herstellen von äquivalenten Termen durch Umformen – Distributivgesetz (2 Summen) **65**

Das Distributivgesetz besagt, dass der Faktor vor oder hinter einer Klammer mit jedem Summanden in der Klammer multipliziert wird.

Beispiel: $(3 + x) \cdot \mathbf{5} = 3 \cdot \mathbf{5} + x \cdot \mathbf{5}$

Ist der zweite Faktor auch eine Klammer, kann das Distributivgesetz zweimal angewendet werden.

Beispiel: $(3 + x) \cdot \mathbf{(5 + a)} = 3 \cdot \mathbf{(5 + a)} + x \cdot \mathbf{(5 + a)} = 3 \cdot 5 + 3 \cdot a + x \cdot 5 + x \cdot a$

Beide Schritte können zusammengefasst werden: Jeder Summand der einen Klammer wird mit jedem Summanden der anderen Klammer multipliziert und die Produkte werden addiert.

Beispiel: $(3 + x) \cdot (5 + a) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot a + x \cdot 5 + x \cdot a$

- Gib zu jedem der folgenden Terme einen gleichwertigen Term an, indem du diese Regel anwendest.

a) $(a + 2) \cdot (5 + x)$

b) $(3 + x) \cdot (x + 1)$

c) $(7 + a) \cdot (b + 1)$

d) $(2x + 5) \cdot (2 + 3x)$

e) $(x^2 + 4) \cdot (15 + 8x)$

f) $(2x + 7) \cdot (5 – x)$

Herstellen von äquivalenten Termen durch Umformen – Distributivgesetz (2 Summen) **66**

Ein Produkt von 2 Summen wird mithilfe von Klammern dargestellt.
Diese Klammern lassen sich unter Beachtung des Distributivgesetzes auflösen.

- Vervollständige die dargestellten Termumformungen.

a) $(x + 2) \cdot (3 + a) = 3x + ax + 6 +$ _____

b) $(a + 5) \cdot (b + 10) = ab +$ ____ $+ 5b +$ ____

c) $(a – 5) \cdot (b + 7) = ab +$ ____ $– 5b –$ _____

d) $(x + 10) \cdot (y +$ ____ $) = xy + 8x + 10y +$ ____

Herstellen von äquivalenten Termen durch Umformen – Binome (Schreibweise) **67**

Potenzen werden sowohl bei der Darstellung von Zahlen als auch in Termen genutzt.

Beispiel 1: $5 \cdot 5 = 5^2$

Beispiel 2: $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10$

Beispiel 3: $a \cdot a = a^2$

Beispiel 4: $x^3 = x \cdot x \cdot x$

Beispiel 5: $(a + 5)^2 = (a + 5) \cdot (a + 5)$

- Schreibe die folgenden Terme als Potenz.

  $(x + 3) \cdot (x + 3)$ $\quad$ $(a - b) \cdot (a - b)$ $\quad$ $(a + 1) \cdot (a + 1) \cdot (a + 1)$

- Schreibe die folgenden Terme als Produkt.

  $(6 + x)^2$ $\quad$ $(10 - x)^2$

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

X+Y

Idee der Terme
Vergleichen von Termen

Quadrieren von Summen mithilfe des Distributivgesetzes **68**

Beim Quadrieren einer Summe kann das Distributivgesetz verwendet werden:

Beispiel 1:

$$\begin{aligned}(2 + x)^2 &= (2 + x) \cdot (2 + x)\\ &= 2 \cdot (2 + x) + x \cdot (2 + x)\\ &= 2^2 + 2{\cdot}x + x{\cdot}2 + x^2\\ &= 4 + 4x + x^2\end{aligned}$$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned}(b + z)^2 &= (b + z) \cdot (b + z)\\ &= b \cdot (b + z) + z \cdot (b + z)\\ &= b^2 + b{\cdot}z + z{\cdot}b + z^2\\ &= b^2 + 2bz + z^2\end{aligned}$$

- Multipliziere aus und fasse so weit wie möglich zusammen.

  a) $(x + 3)^2$ $\quad$ **b)** $(4 + m)^2$

  c) $(x + a)^2$ $\quad$ **d)** $(-x + a)^2$

Quadrieren von Differenzen mithilfe des Distributivgesetzes **69**

Auch beim Quadrieren einer Differenz kann das Distributivgesetz verwendet werden:

Beispiel 1: $(2 - x)^2 = (2 - x) \cdot (2 - x)$
$= 2 \cdot (2 - x) - x \cdot (2 - x)$
$= 2^2 - 2 \cdot x - x \cdot 2 + (-x)^2$
$= 4 - 4x + x^2$

Beispiel 2: $(c - d)^2 = (c - d) \cdot (c - d)$
$= c \cdot (c - d) - d \cdot (c - d)$
$= c^2 - c \cdot d - d \cdot c + d^2$
$= c^2 - 2cd + d^2$

- Multipliziere aus und fasse so weit wie möglich zusammen.

a) $(x - 3)^2$ **b)** $(4 - m)^2$

c) $(x - a)^2$ **d)** $(-x - a)^2$

Erkennen von Mustern beim Ausmultiplizieren identischer Binome **70**

Malte soll drei Klammern auflösen. Er rechnet:

I. $(x + 5)^2 = (x + 5) \cdot (x + 5) = x^2 + \underline{5x} + \underline{5x} + 5^2 = x^2 + \underline{10x} + 25$

II. $(3 - a)^2 = 3^2 - \underline{3a} - \underline{3a} + (-a)^2 = 9 - \underline{6a} + a^2$

III. $(x - 4)^2 = x^2 - 4x - 4x + (-4)^2 = x^2 - 8x + 16$

In den Beispielen I und II wurden Termteile unterstrichen.

- Unterstreiche dementsprechend in Beispiel III.

Man erkennt, dass sich Terme, die die Form der Beispiele I – III haben, immer nach dem gleichen Muster umformen lassen.

- Erkläre am Beispiel I, was mit dem Termbestandteil x im Verlaufe der Umformung geschieht. Erkläre auch, was mit der 5 geschieht.

- Multipliziere nun ohne Zwischenschritt die folgenden Klammern aus.

a) $(r + 3)^2$ **b)** $(6 + u)^2$ **c)** $(k - 10)^2$ **d)** $(a + b)^2$ **e)** $(a - b)^2$

Untersuchen von Lösungen auf Fehler bei der Anwendung binomischer Formeln **71**

Rayk rechnet:

I. $(3 + g)^2 = 9 + 3g + g^2$

II. $(s - 4)^2 = s^2 - 8s - 16$

III. $(2r - x)^2 = 4r^2 - 4rx + x^2$

Albina sagt zu Rayk: „Du hast dich bei allen drei Aufgaben verrechnet!“ Hat Albina recht?

- Prüfe Rayks Rechnungen und erkläre gegebenenfalls seine Fehler.

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Rasterpapier, 1 cm x 1 cm

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Streifenvorlage für blaue Streifen, b = 5 cm (auf blauem Karton oder Papier drucken!)

b	b	b
b	b	b
b	b	b
b	b	b
b	b	b
b	b	b
b	b	b
b	b	b
b	b	b
b	b	b
b	b	b
b	b	b
b	b	b
b	b	b
b	b	b
b	b	b
b	b	b
b	b	b
b	b	b
b	b	b
b	b	b
b	b	b
b	b	b
b	b	b

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Streifenvorlage für gelbe Streifen, c = 7,55 cm (auf gelbem Karton oder Papier drucken!)

c	c
c	c
c	c
c	c
c	c
c	c
c	c
c	c
c	c
c	c
c	c
c	c
c	c
c	c
c	c
c	c
c	c
c	c
c	c
c	c
c	c
c	c
c	c
c	c

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Streifenvorlage für rote Streifen, x = 10 cm (auf rotem Karton oder Papier drucken!)

x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Darum geht es

Mit Gleichungen können Beziehungen zwischen mathematischen Objekten (beispielsweise Zahlen, Größen oder Funktionen) und deren Eigenschaften ausgedrückt werden. Sie dienen als Werkzeug zur Formulierung und zum Lösen von Problemen. Sie können aber auch selbst als mathematische Objekte aufgefasst werden.

Das Gleichheitszeichen hat in den ersten Schuljahren die Bedeutung eines Zuweisungszeichens bzw. Handlungszeichens („Rechne aus!“). In den nächsten Schuljahren muss diese Vorstellung zunehmend zum Vergleichszeichen (Beziehungszeichen) entwickelt werden. Die Lernenden entwickeln die Erkenntnis, dass die linke und die rechte Seite einer Gleichung vertauschbar sind.

Gleichungen ohne Variable stellen mathematische Aussagen dar, die wahr oder falsch sind (Beispiel: $2 + 3 = 5$).

Gleichungen mit Variablen stellen Aussageformen dar. Durch das Einsetzen von Werten entstehen mathematische Aussagen (Beispiel: $2 + x = 5$). Alle Zahlen, die für die Variable eingesetzt werden können, bilden die Grundmenge.

Die Schülerinnen und Schüler lernen im Verlauf ihrer Schulzeit verschiedene Aussageformen kennen und unterscheiden:

- Eine Gleichung ist eine erfüllbare Aussageform, wenn mindestens eine Zahl der Grundmenge zu einer wahren Aussage führt. Diese Zahlen bilden die Lösungsmenge der Gleichung.
- Eine Gleichung ist eine unerfüllbare Aussageform, wenn die Lösungsmenge leer ist. Dann wird für keine Zahl aus der Grundmenge die Gleichung zur wahren Aussage.
- Eine Gleichung ist eine allgemeingültige Aussageform, wenn alle Zahlen der Grundmenge zu wahren Aussagen führen.

Die Bestimmung der Lösungsmenge einer Gleichung kann auf verschiedene Weise erfolgen. In der Grundschule werden die Schülerinnen und Schüler angeleitet, einfache Gleichungen durch inhaltliche Überlegungen, Probieren (zunehmend systematisch) und die Nutzung von Umkehroperationen zu lösen.

Vorstellungen zum Lösen einfacher Gleichungen können mithilfe des Waagemodells entwickelt werden. Der Lösungsweg entspricht konkreten Handlungen an der Waage. Der Grundgedanke dieses Modells besteht darin, dass eine Waage im Gleichgewicht bleibt, wenn auf beiden Waagschalen dasselbe geschieht. Ebenso bleibt die Lösungsmenge der Gleichung erhalten, wenn auf beiden Seiten dieselbe Grundrechenoperation angewendet wird. Damit können mögliche äquivalente Umformungsschritte beim Lösen von Gleichungen veranschaulicht werden. Wie jedes Modell ist jedoch auch das Waagemodell nur begrenzt einsetzbar.

Vom systematischen Anwenden von Umkehroperationen gelangt man in der Sekundarstufe I zum kalkülmäßigen Lösen von Gleichungen. Es ist eine wichtige Aufgabe des Mathematikunterrichts, dass die Lernenden ein Verständnis zum Vorgehen beim Lösen von Gleichungen entwickeln. Deshalb sollen die Schritte zum Umformen von Gleichungen immer wieder begründet und die Lösungen von den Lernenden kritisch betrachtet werden. Ein mechanisches Umformen bzw. Abarbeiten der Umformungsschritte nach scheinbar willkürlichen Regeln soll von Anfang an vermieden werden.

Beim Lösen von Gleichungen in schriftlicher Form ist auf eine übersichtliche Darstellung zu achten (beispielsweise: Setzen von Gleichheitszeichen unter Gleichheitszeichen; Vermeidung mehrerer Gleichheitszeichen in einer Zeile).

Gleichungen stellen in allen Leitideen ein spezielles Werkzeug zur Problemlösung dar. In Sachzusammenhängen soll mit den Schülerinnen und Schülern diskutiert werden, ob auch Näherungslösungen akzeptiert werden können.

In der Sekundarstufe I werden auch Lösungsverfahren zum Lösen linearer Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und zwei Variablen thematisiert. Das Prinzip dieser Verfahren ist das geschickte Kombinieren der Gleichungen, mit dem Ziel, aus dem Gleichungssystem eine Gleichung mit einer Variablen zu erhalten. Gesucht ist dann ein Zahlenpaar $(x|y)$, welches beide Gleichungen gleichzeitig erfüllt und damit eine Lösung des linearen Gleichungssystems darstellt. Dabei soll die Verbindung zum grafischen Lösen von Gleichungssystemen aufgebaut werden (Schnittpunkt der Graphen). Im Unterricht werden auch die zwei Sonderfälle betrachtet: Das Gleichungssystem kann keine Lösung haben oder es können unendlich viele Lösungen existieren.

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

LISUM
Landesinstitut für Schule und Medien Berlin-Brandenburg

Förderaufgaben

Idee der Gleichungen

Grundschule

Übersicht über die Förderempfehlungen

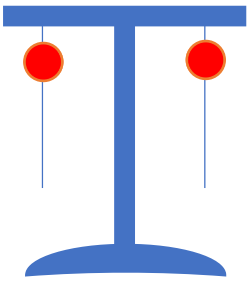
Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

33. Ergänzen des Mal-Plus-Hauses und Nutzen der Umkehroperation
34. Finden von verschiedenen Lösungswegen zum Ergänzen des Mal-Plus-Hauses
35. Beschreiben der Struktur des Mal-Plus-Hauses
36. Beschreiben eines Mal-Plus-Hauses nach Veränderung einer Kellerzahl
37. Verändern eines Mal-Plus-Hauses und Beschreiben der Auswirkung auf die Dachzahl
38. Beschreiben der Veränderung im Mal-Plus-Haus nach Änderung der Dachzahl
39. Lösen einer Gleichung mithilfe der Mathematik-Waage
40. Ermitteln gleichwertiger Terme durch Einsetzen von Zahlenkarten
41. Ermitteln von Lösungen gleichwertiger Terme durch Probieren
42. Ermitteln von Lösungen durch Nutzen der Umkehroperation
43. Lösen und Beschreiben des Lösungsweges für Gleichungen mit Platzhaltern
44. Lösen und Beschreiben des Lösungsweges von einer Gleichung im Sachzusammenhang
45. Erklären von Gleichungen zum Punktebild
46. Überprüfen der Lösungsvorschläge durch Einsetzen in eine einfache Gleichung
47. Überprüfen der Lösung durch Einsetzen in eine komplexe Gleichung
48. Ergänzen einer Zahlenmauer mithilfe von Lösungsvorschlägen durch Einsetzen
49. Überprüfen der Lösung durch Einsetzen in Gleichungen
50. Validieren einer Lösung im Sachzusammenhang
51. Validieren einer Lösung mithilfe eines Bildes
52. Validieren einer Lösung durch Erstellen einer Zeichnung
53. Validieren von Lösungen zu verschiedenen Sachzusammenhängen

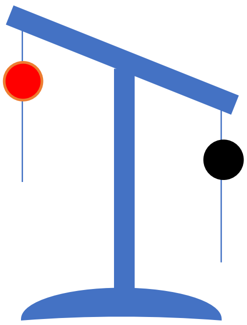
Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Beschreiben der Gleichheit und Ungleichheit am Waagemodell | **1**

- Setze die Begriffe in den Lückentext passend ein: *leichter, rote, schwarze*



Die _________ Kugel auf der linken Seite der Waage ist genauso schwer wie die _________ Kugel auf der rechten Seite der Waage.



Die _________ Kugel auf der linken Seite der Waage ist ____________ als die _________ Kugel auf der rechten Seite der Waage.

- Woran erkennst du das?

Bild 1: „Kugel-Waagen", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

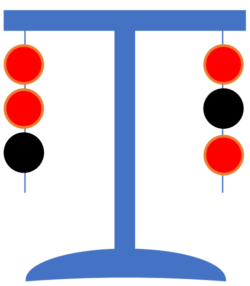
Idee der Gleichung
Aufstellen und Interpretieren von Gleichungen

Herstellen der Gleichheit am Waagemodell | **2**

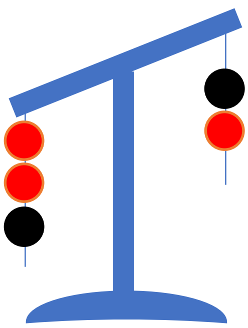
Vergleiche die Waagen von Lisa und Tobi.

- Was stellst du fest?

Lisa



Tobi



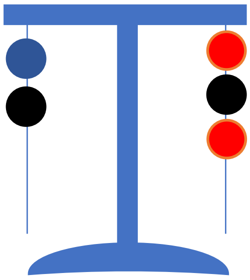
- Verändere die Waage von Tobi so, dass die Waage ins Gleichgewicht kommt.
- Zeichne sie noch einmal daneben.

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Bild 2: „Kugel-Waagen", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen Grundschule		Idee der Gleichung Aufstellen und Interpretieren von Gleichungen
Zuordnen von Aussagen zur Gleichheit am Waagemodell		3

Alexa hat Kugeln so an der Waage angeordnet, dass sie im Gleichgewicht ist.



- Welche Aussagen passen zur Waage? Kreuze sie an.

☐ Eine rote Kugel ist genauso schwer wie eine blaue Kugel.

☐ Alle Kugeln sind gleich schwer.

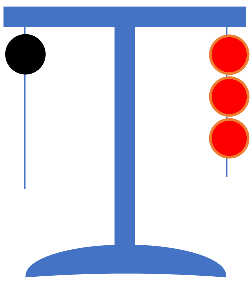
☐ Die beiden roten Kugeln sind genauso schwer wie eine blaue Kugel.

☐ Die Kugeln auf der linken Seite sind zusammen genauso schwer wie die Kugeln auf der rechten Seite.

Bild 3: „Kugel-Waagen“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen Grundschule		Idee der Gleichung Aufstellen und Interpretieren von Gleichungen
Formulieren von Aussagen zur Gleichheit am Waagemodell		4

Diese Waage ist im Gleichgewicht.



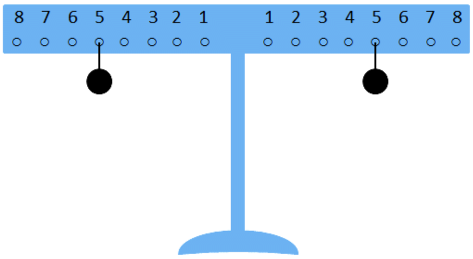
- Erkläre, wie das sein kann.

Bild 4: „Kugel-Waagen“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der Gleichung
Aufstellen und Interpretieren von Gleichungen

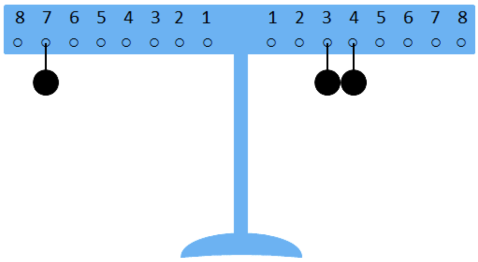
Begründen von Gleichheit an der Mathematik-Waage — 5



Maria sagt:

„Um die Waage ins Gleichgewicht zu bringen, muss ich die Kugeln auf beiden Seiten an die gleiche Stelle hängen."

- An welche Stellen könnte Maria die Kugeln noch hängen, um die Waage ins Gleichgewicht zu bringen?



Kolja stellt fest:

„Wenn ich meine Kugel auf der linken Seite an die 7 hänge und zwei weitere Kugeln auf der rechten Seite an die 3 und 4, dann ist meine Waage ebenfalls im Gleichgewicht."

- Erkläre, warum Koljas Waage im Gleichgewicht ist.

Bild 5: „Mathematik-Waagen", LISUM, CC-BY-SA 4.0

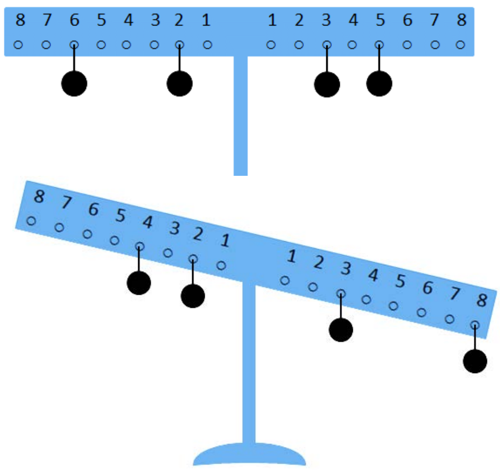
Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der Gleichung
Aufstellen und Interpretieren von Gleichungen

Erklären von Gleichheit an der Mathematik-Waage — 6

Noemi hat Kugeln an unterschiedliche Stellen der Waage gehängt.

- Erkläre, warum die Waage im Gleichgewicht ist.

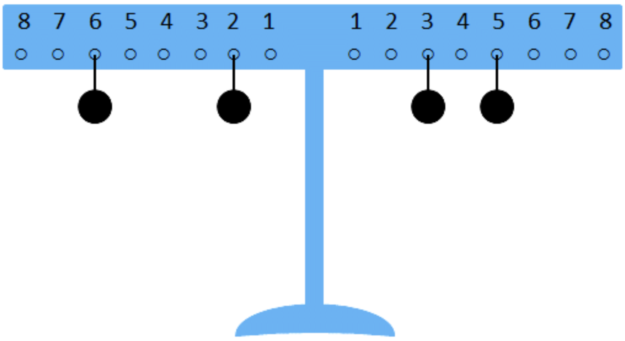


- Warum kann diese Waage nicht im Gleichgewicht sein? Erkläre.

Bild 6: „Mathematik-Waagen", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Darstellen der Gleichheit an der Mathematik-Waage durch eine Gleichung — **7**

Emil schreibt zu seiner Waage eine Gleichung auf:



6 + 2 = 3 + 5

- Beschreibe, was Emil gemacht hat.
- Erkläre, warum die Waage im Gleichgewicht ist.

Bild 7: „Mathematik-Waagen“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

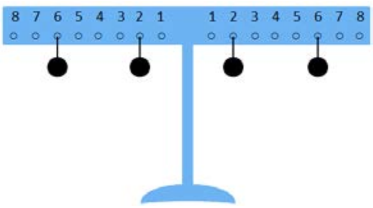
Gleichungen und Funktionen
Grundschule

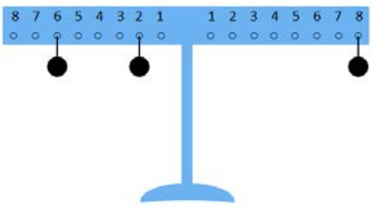
Idee der Gleichung
Aufstellen und Interpretieren von Gleichungen

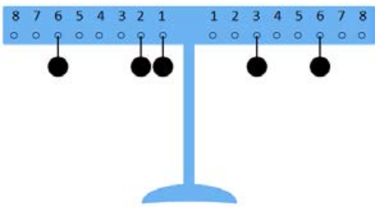
Zuordnen der symbolischen Darstellung an der Mathematik-Waage — **8**

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

- Welche Gleichung passt zu welcher Waage? Verbinde.







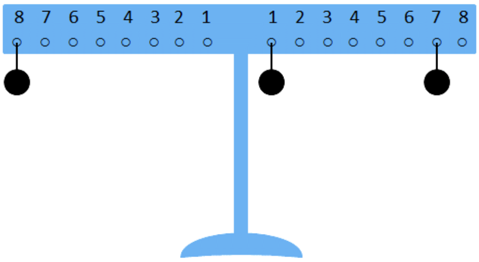
6 + 2 + 1 = 3 + 6	6 + 2 = 2 + 6	8 = 6 + 2

- Erkläre, warum alle Waagen im Gleichgewicht sind.

Bild 8: „Mathematik-Waagen“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Aufstellen von Gleichungen zum Waagemodell **9**

- Schreibe zu jedem Bild eine passende Gleichung auf.



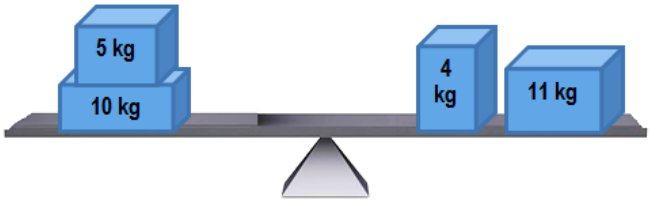


Bild 9: „Mathematik-Waagen“, LISUM, CC-BY-SA 4.0 *Bild 10: „Paket-Waage“, LISUM, CC-BY-SA 4.0*

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der Gleichung
Aufstellen und Interpretieren von Gleichungen

Zuordnen einer Gleichung zur Sachsituation **10**

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Familie Raabe besucht mit ihren 3 Kindern am Sonntagnachmittag den Zoo.
Für jedes Kind kostet der Eintritt 8 €.
Die beiden Erwachsenen müssen zusammen 25 € bezahlen.

Wie viel Geld muss die Familie insgesamt für den Eintritt bezahlen?

Joris schreibt: 8 € + 2 · 25 € = 58 €

Elias rechnet: 3 · 8 € + 25 € = 49 €

- Wer hat die passende Gleichung zum Text aufgeschrieben?
  Begründe deine Entscheidung.

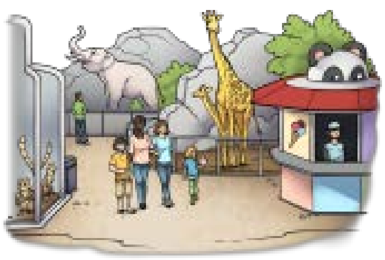


Bild 11: „Zoo“, cc by nc 4.0, erstellt mit dem © Worksheet Crafter – www.worksheetcrafter.com

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der Gleichung
Aufstellen und Interpretieren von Gleichungen

Aufstellen von Gleichungen zu Sachsituationen — 11

- Schreibe zu jedem Text eine passende Gleichung auf.

Auf einem Parkplatz befinden sich 14 Autos, 3 Motorräder und 2 Busse.
Insgesamt wurden 19 Parkscheine verkauft.

Meine Gleichung: ____

Wenn ich die Zahl 10 verdopple, dann erhalte ich die Summe aus 9 und 11.

Meine Gleichung: ____

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

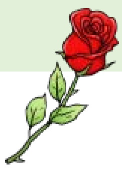
Idee der Gleichung
Aufstellen und Interpretieren von Gleichungen

Identifizieren von wichtigen Informationen zum Aufstellen von Gleichungen mit Platzhaltern — 12

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

In einem Blumenbeet blühen 10 rote Rosen und eine unbekannte Anzahl gelber Rosen.
Insgesamt sind es 25 Rosen.

Wie viele Rosen sind gelb?



Onur sollte die Angaben, die für das Rechnen wichtig sind, unterstreichen.
Dabei hat er Fehler gemacht.

- Welche unterstrichene Angabe ist unwichtig?
- Welche wichtige Angabe hat er vergessen? Unterstreiche.

In der Klasse 2a lernen insgesamt 25 Kinder. 21 Kinder sind gesund.
Einige Kinder sind krank.

Wie viele Kinder sind krank?

- Unterstreiche alle Angaben, die für das Rechnen wichtig sind.

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der Gleichung
Aufstellen und Interpretieren von Gleichungen

Zuordnen von Textbausteinen zu Termen	**13**

In dem Schwimmkurs sind 14 Jungen und einige Mädchen.
Insgesamt sind es 25 Kinder.

- Welche Angaben aus dem Text gehören zusammen?
  Verbinde.

Jungen	▢
einige Mädchen	25
Kinder gesamt	14

- Warum steht in ▢ noch keine Zahl? Erkläre.

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der Gleichung
Aufstellen und Interpretieren von Gleichungen

Zuordnen von Textbausteinen zu Termen als Bestandteile einer Gleichung	**14**

Auf dem Bauernhof sehe ich <u>15 Hühner</u> und <u>einige Katzen</u>.
Zusammen sind es <u>20 Tiere.</u>

Elias hat die wichtigsten Angaben in eine Gleichung (Aufgabe) geschrieben.

15 + ▢ = 20

Anzahl aller Tiere	Anzahl Hühner	Anzahl Katzen

- Verbinde die grauen Karten passend mit den einzelnen Teilen der Gleichung.

Bild 13: „Bauernhof", cc by nc 4.0, erstellt mit dem © Worksheet Crafter – www.worksheetcrafter.com

Erstellen einer Gleichung zur Sachsituation durch Ordnen ihrer Teilterme **15**

Material: *beschriftete Kärtchen wie angegeben*

Frau Meier kauft ein Brot für 3 € 20 ct und 4 Brötchen.
Insgesamt muss Frau Meier 4 € 40 ct bezahlen.

- Lies den Text genau.
- Lege mit den Kärtchen eine passende Gleichung.

=

4

·

3 € 20 ct

☐

4 € 40 ct

+

Preis für ein Brot

Preis für ein Brötchen

Gesamtpreis

- Wofür steht ☐ in der Gleichung?
- Ordne die grauen Kärtchen den Teilen der Gleichung richtig zu.

Aufstellen von Gleichungen mit Platzhaltern zu Zahlenrätseln **16**

Lia hat alle wichtigen Angaben in den Zahlenrätseln unterstrichen.

- Schreibe zu jedem Zahlenrätsel eine Gleichung auf.

Ich denke mir <u>eine Zahl</u> und <u>addiere 75</u>. Als <u>Ergebnis</u> erhalte ich <u>125</u>.

Meine Gleichung: ____

Wenn ich <u>meine Zahl verdopple</u> und anschließend <u>30 abziehe</u>,
dann <u>erhalte</u> ich <u>150</u>.

Meine Gleichung: ____

Aufstellen von Gleichungen mit Platzhaltern zu Sachsituationen

17

In der Klasse 3a sind 24 Kinder.
Davon können 17 Kinder schwimmen, die anderen Kinder können nicht schwimmen.

- Unterstreiche alle Angaben, die für das Rechnen wichtig sind.

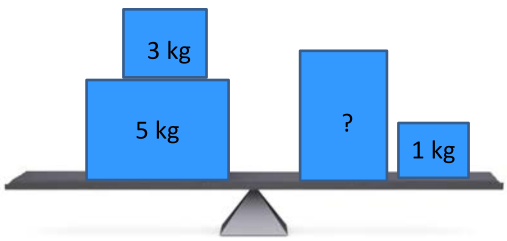
- Stelle zum Text eine Gleichung auf.

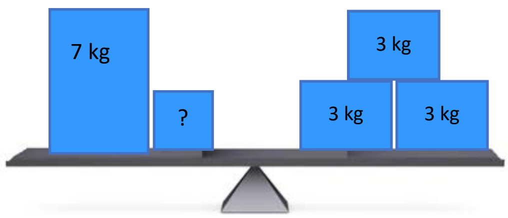
  Meine Gleichung: ____

Aufstellen von Gleichungen mit Platzhaltern zu Abbildungen des Waagemodells

18

- Schreibe zu jedem Bild eine passende Gleichung auf.





Gleichung: _________________________ Gleichung: _________________________

Bild 15: „Waage mit Paketen“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der Gleichung
Aufstellen und Interpretieren von Gleichungen

Darstellen von Gleichungen als Bild oder Sachsituation — 19

- Zeichne zu jeder Gleichung ein passendes Bild oder schreibe eine Geschichte auf.

11 + 4 = 15	**9 + 7 = 4 · 4**
Bild/Geschichte	Bild/Geschichte

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der Gleichung
Aufstellen und Interpretieren von Gleichungen

Darstellen von Gleichungen mit Platzhaltern zum Waagemodell — 20

- Zeichne zu jeder Gleichung ein passendes Bild auf die Waage.

7 kg + 3 kg = 4 kg + $\square$

15 kg + $\square$ = 25 kg

Bild 16: „Waage leer“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Zuordnen von Texten zu Gleichungen mit Platzhaltern **21**

- Verbinde jede Gleichung mit dem passenden Text.

$\square \cdot 5 + 50 = 90$	Simon bezahlt an der Kasse 90 €. Er hat zwei Hosen für jeweils 20 € und eine neue Jacke gekauft.
$90 = 2 \cdot 20 + \square$	Wenn ich meine gedachte Zahl verdopple, erhalte ich die Differenz aus 90 und 50.
$\square - 50 = 5 \cdot 90$	Wenn ich meine Zahl mit 5 multipliziere und 50 dazurechne, dann erhalte ich 90.
$2 \cdot \square = 90 - 50$	Wenn ich von meiner Zahl 50 abziehe, dann erhalte ich das Fünffache von 90.

Formulieren von Rechengeschichten zu Gleichungen mit Platzhaltern mittels Wortkarten **22**

- Erzähle zu den Gleichungen eine Geschichte.
  Nutze die Wortkarten als Hilfe.

$25 = \square + 14$

14 Jungen | 25 Kinder in einer Klasse | Mädchen

$3 \cdot \square + 18 = 63$

Schulausflug | insgesamt 63 Kinder | …………….. | ……..

………………

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der Gleichung
Aufstellen und Interpretieren von Gleichungen

Formulieren von Rechengeschichten zu Gleichungen mit Platzhaltern | **23**

- Erzähle zu den Gleichungen eigene Geschichten.

$10 + \square = 63$ $\square \cdot 5 = 75$ $50 = 2 \cdot \square - 10$

Bild 17: „Junge spricht“, cc by nc 4.0, erstellt mit dem © Worksheet Crafter – www.worksheetcrafter.com

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der Gleichung
Lösen von Gleichungen

Ermitteln der Lösung in Zahlenmauern durch Probieren | **24**

- Ordne die Zahlen richtig in die Zahlenmauer ein.

110
50
65

45		
30	15	

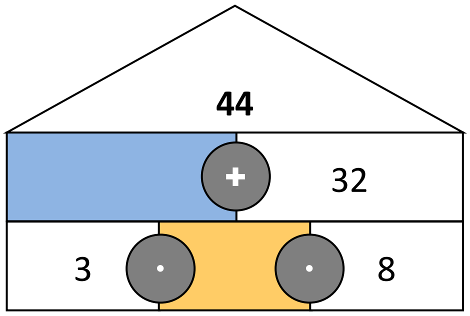
Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der Gleichung
Lösen von Gleichungen

Ermitteln der Lösung im Mal-Plus-Haus durch Probieren | **25**

In dem Mal-Plus-Haus fehlen Zahlen.

- Ordne die passenden Karten zu.



9	12	15
3	4	5

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

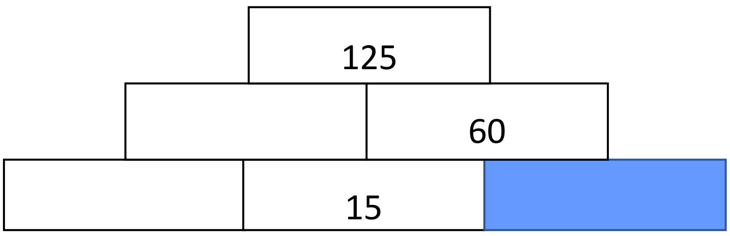
Idee der Gleichung
Lösen von Gleichungen

Ergänzen der Zahlenmauer durch Nutzen der Umkehroperation | **26**

Tom beschreibt, wie er die fehlenden Zahlen in der Zahlenmauer ermittelt.

„Ich weiß, dass 15 plus der blaue Basisstein 60 ergibt.
Also kann ich auch 60 minus 15 rechnen.
Im blauen Kästchen muss also die 45 stehen."

- Zeige Toms Rechenweg an der Zahlenmauer.
- Warum darf Tom auch minus rechnen? Erkläre.



- Ermittle die noch fehlenden Zahlen. Rechne wie Tom.

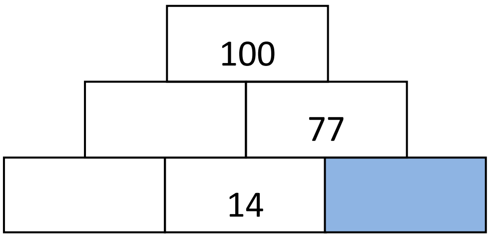
Bild 18: „Junge braun", pixabay.com, CC-0

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der Gleichung
Lösen von Gleichungen

Beschreiben von Rechenwegen zum Lösen von Zahlenmauern | **27**

- Wie kannst du die Zahl im blauen Basisstein ermitteln? Beschreibe deinen Rechenweg.



- Bei welchem Stein kannst du die Lösung durch eine Minusaufgabe finden? Beschreibe.

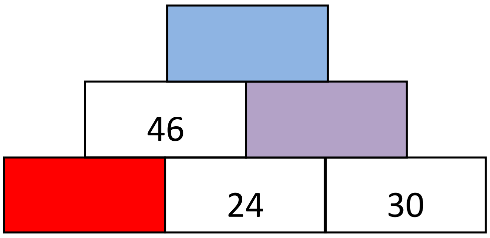


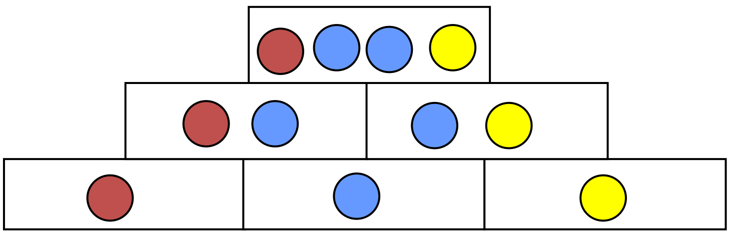
Bild 20: „Junge braun", pixabay.com, CC-0

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der Gleichung
Lösen von Gleichungen

Beschreiben der Struktur einer Zahlenmauer | **28**

Sergej erklärt:
„Der rote Basisstein und der blaue Basisstein werden addiert. Ich erhalte den linken Mittelstein. Der gelbe Basisstein und der blaue Basisstein werden addiert. Ich erhalte den rechten Mittelstein."



- Ergänze.

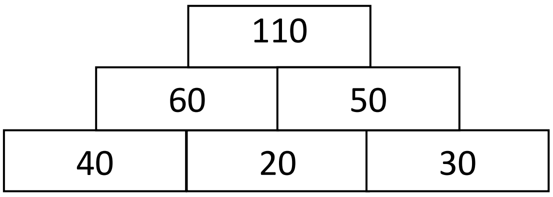
  Um den Zielstein zu erhalten, muss ich die Mittelsteine ____________.

  Im Zielstein kommen der rote und der gelbe Basisstein einmal vor,

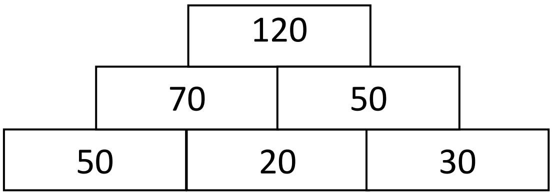
  während der blaue Basisstein __________________ vorkommt.

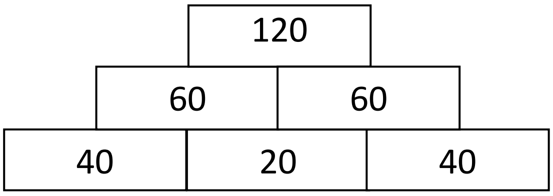
Beschreiben der Veränderung einer Zahlenmauer **29**

Katinka hat die folgende Zahlenmauer erstellt.



Kolja hat die Zahlenmauer verändert.



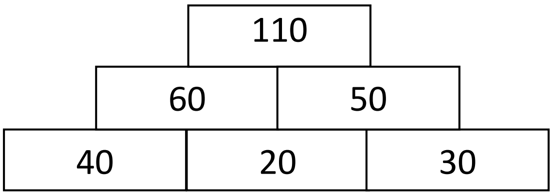


- Beschreibe die Veränderungen.
- Ergänze.

  Wenn sich der Basisstein links oder rechts um 10 vergrößert,
  dann wird der Zielstein um __________________.

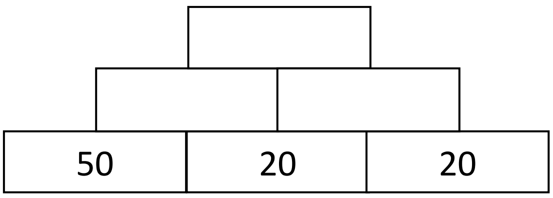
Ergänzen und Beschreiben der veränderten Zahlenmauern **30**

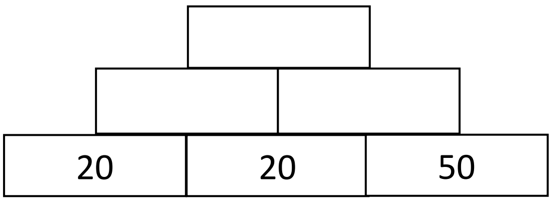
Joris hat die folgende Zahlenmauer erstellt.



Noemi hat die Zahlenmauern verändert.

- Beschreibe alle Veränderungen.
- Vermute, wie sich der Zielstein ändert.

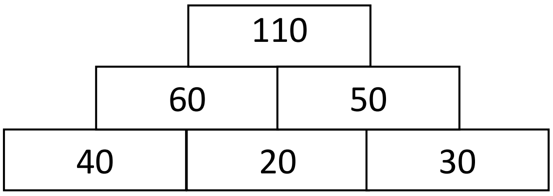




- Überprüfe und begründe.

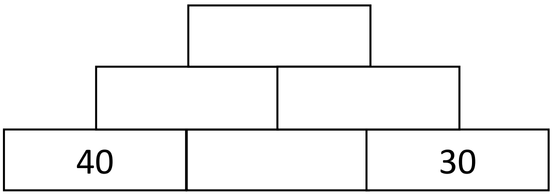
Beschreiben der Veränderung in Zahlenmauern durch Ändern des Mittelsteins **31**

Ela hat die folgende Zahlenmauer erstellt.



Der mittlere Basisstein wird um 10 größer.

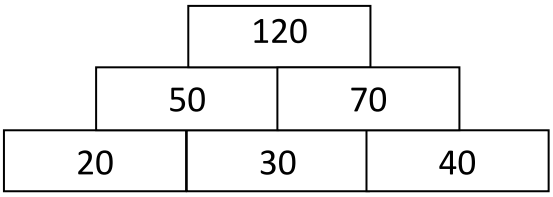
- Ergänze den mittleren Basisstein.
- Vermute, wie sich der Zielstein ändert.



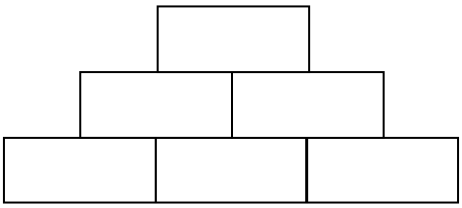
- Überprüfe und begründe.

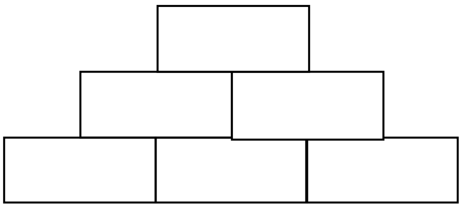
Beschreiben der Veränderung in Zahlenmauern durch Änderung des Zielsteins **32**

Luisa hat die folgende Zahlenmauer erstellt.



Erik möchte die Zahlenmauer so verändern, dass der Zielstein um 20 kleiner wird.





- Verändere die Basissteine passend und ergänze die Zahlenmauern.

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

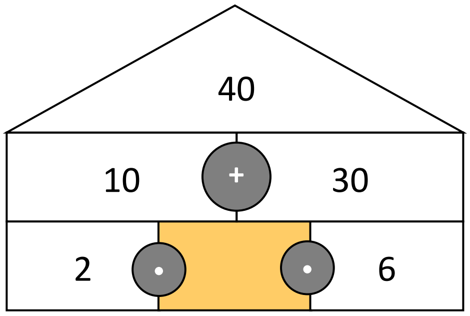
Idee der Gleichung
Lösen von Gleichungen

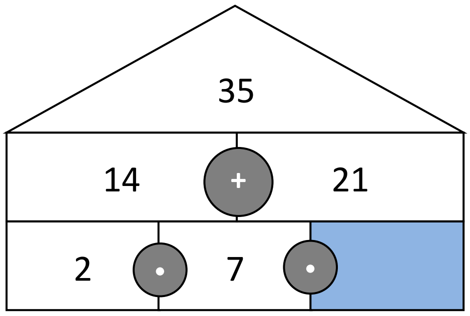
Ergänzen des Mal-Plus-Hauses und Nutzen der Umkehroperation **33**

Saskia beschreibt, wie sie die fehlenden Zahlen in dem Mal-Plus-Haus ermittelt.

„Ich weiß, dass 6-mal die fehlende Zahl im orangenen Feld 30 ergibt.
Also kann ich auch 30 geteilt durch 6 rechnen.
Die Mittelzahl ist also 5."

- Zeige Saskias Rechenweg am Mal-Plus-Haus.
- Warum kann Saskia auch geteilt rechnen? Erkläre.





- Ermittle die fehlende Zahl in dem zweiten Mal-Plus-Haus.
- Rechne wie Saskia.

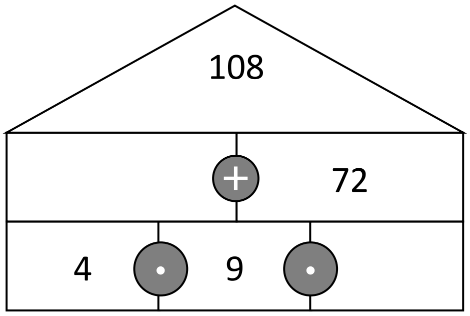
Bild 19: „Mädchen Brille", pixabay.com,CC-0

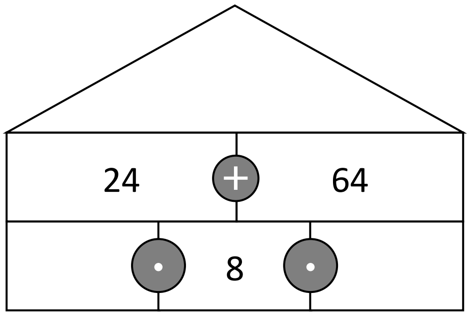
Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der Gleichung
Lösen von Gleichungen

Finden von verschiedenen Lösungswegen zum Ergänzen des Mal-Plus-Hauses **34**

- Löse die Mal-Plus-Häuser.
- Finde verschiedene Wege, um die fehlenden Zahlen zu ermitteln.



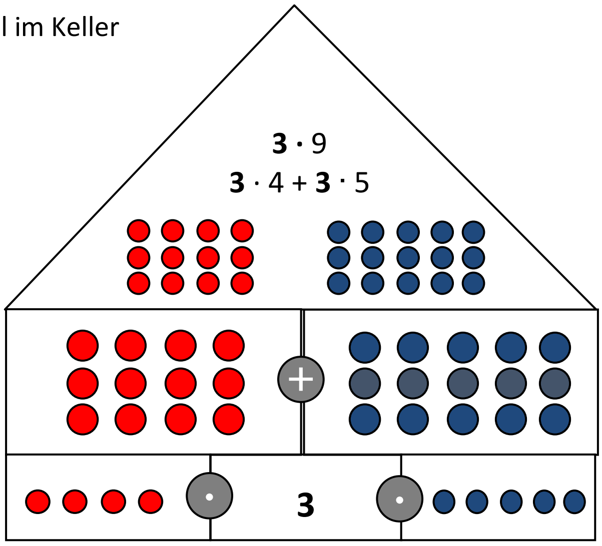


Beschreiben der Struktur des Mal-Plus-Hauses

35

Faour beschreibt, wie man die Dachzahl berechnen kann:

„Die linke Kellerzahl wird mit der Mittelzahl im Keller multipliziert **und** die rechte Kellerzahl wird mit der Mittelzahl im Keller multipliziert. Danach werden die Produkte addiert.“



- Beschreibe die Veränderung der Dachzahl, wenn sich die Mittelzahl um eins erhöht (verringert).

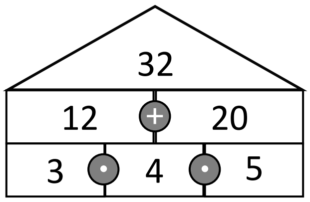
Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der Gleichung
Lösen von Gleichungen

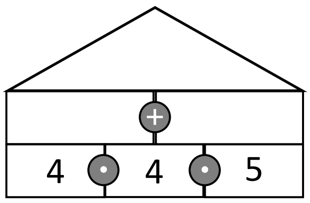
Beschreiben eines Mal-Plus-Hauses nach Veränderung einer Kellerzahl

36

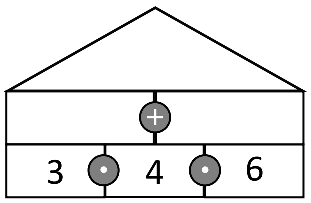
Hanna hat dieses Mal-Plus-Haus verändert.



Sie vergrößert erst
die linke Kellerzahl um 1.



Dann vergrößert sie
die rechte Kellerzahl um 1.



- Ergänze die Mal-Plus-Häuser.
- Ergänze den Lückentext.

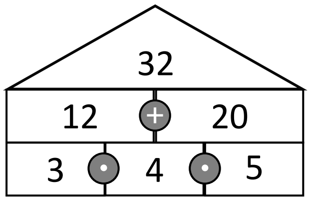
Wenn sich die linke Kellerzahl um 1 vergrößert, dann wird die Dachzahl um _____ größer.

Wenn sich die rechte Kellerzahl um 1 vergrößert, dann wird die Dachzahl um _____ größer.

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

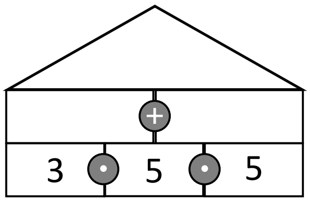
Verändern eines Mal-Plus-Hauses und Beschreiben der Auswirkungen auf die Dachzahl

37



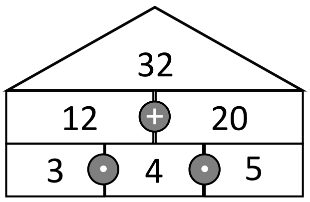
Die Mittelzahl wird um 1 größer.

- Vermute, wie sich die Dachzahl verändert.
- Ergänze das Mal-Plus-Haus.
- Begründe.



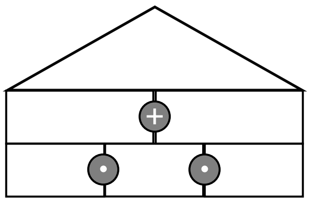
Beschreiben der Veränderung im Mal-Plus-Haus nach Änderung der Dachzahl

38



Die Dachzahl soll um 8 kleiner werden.

- Verändere die Kellerzahlen passend und ergänze das Mal-Plus-Haus.
- Beschreibe, wie sich die restlichen Zahlen verändern.

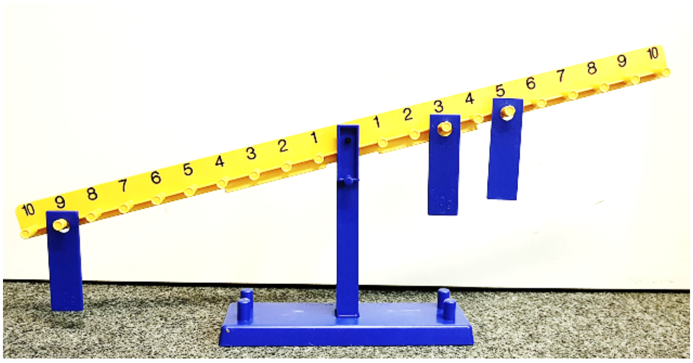


Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der Gleichung
Lösen von Gleichungen

Lösen einer Gleichung mithilfe der Mathematik-Waage	**39**

Franzi möchte die Waage ins Gleichgewicht bringen.
An welche Stelle muss Franzi ein weiteres Plättchen hängen,
damit die Waage im Gleichgewicht ist?



Sie schreibt zum Bild die Gleichung: 9 = 3 + 5 + ☐

- Ergänze die Gleichung.

Bild 20: „Waage“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der Gleichung
Lösen von Gleichungen

Ermitteln gleichwertiger Terme durch Einsetzen von Zahlenkarten	**40**

- Wähle die Zahlen so aus, dass die Gleichungen stimmen.
  Ergänze.

1	2	3	4	5	6	7	8	9

2 · _____ = 3 + 5

- Finde weitere Möglichkeiten.

2 · _____ = 3 + _____

2 · _____ = _____ + 5

Ermitteln von Lösungen gleichwertiger Terme durch Probieren

41

Welche Zahl von 1 bis 10 passt in die Gleichung?

- Ermittle die fehlende Zahl durch Probieren.

$3 \cdot (\square + 7) = 36$

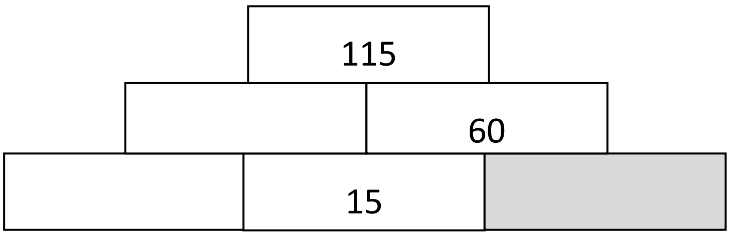
Ermitteln von Lösungen durch Nutzen der Umkehroperation

42

Tom möchte die Zahl im grauen Feld berechnen und sagt:
„Ich weiß, dass 15 plus das graue Feld 60 ergibt.
*Also schreibe ich **15 + □ = 60**.*

Um die Gleichung zu lösen, rechne ich die Umkehraufgabe 60 – 15."

- Zeige, wie Tom auf die Gleichung ***15 + □ = 60*** kommt.



- Beschreibe, wie du die Zahlen in den anderen Feldern berechnest.
- Finde passende Gleichungen.

Bild 21: „Junge braun", pixabay.com, CC-0

Lösen und Beschreiben des Lösungsweges für Gleichungen mit Platzhaltern **43**

- Löse die Gleichungen.
- Beschreibe dein Vorgehen.

$7 \cdot 8 = \_\_\_\_\_ + 45$

$\_\_\_\_\_ \cdot 9 = 108$

$11 + \_\_\_\_\_ = 35 - 7$

$8 \cdot 4 + \_\_\_\_\_ = 120 - 60$

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der Gleichung
Lösen von Gleichungen

Lösen und Beschreiben des Lösungsweges von einer Gleichung im Sachzusammenhang **44**

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Simon bezahlt an der Kasse 90 €.
Er hat zwei Hosen für jeweils 20 € und eine neue Jacke gekauft.
Wie viel kostet seine neue Jacke?

Seine Gleichung schreibt er so auf: $90 = 2 \cdot 20 + \square$

- Welche Zahl muss Simon einsetzen?
- Wie bist du vorgegangen? Beschreibe deinen Weg.

Ole stellt ein Zahlenrätsel: „Zum Dreifachen einer Zahl werden 10 addiert. Das Ergebnis ist 43.“
Wie heißt die Zahl?

Mia schreibt dazu eine Gleichung auf: $3 \cdot \square + 10 = 43$

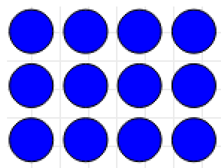
- Finde die Zahl, die du für $\square$ einsetzen musst.
- Beschreibe, wie du vorgegangen bist.

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der Gleichung
Lösen von Gleichungen

Erklären von Gleichungen zum Punktebild | **45**

Mia, Ina und Ole schreiben zu dem Punktebild Gleichungen auf.



Mia schreibt: $3 \cdot 4 = 12$ Ina schreibt: $4 \cdot 3 = 12$ Ole schreibt: $12 = 3 \cdot 4$

- Zeige am Punktebild, was sich die Kinder bei ihren Gleichungen gedacht haben.

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der Gleichung
Validieren und Interpretieren von Lösungen

Überprüfen der Lösungsvorschläge durch Einsetzen in eine einfache Gleichung | **46**

Ole, Elif und Ayla haben die Gleichung $3 + \square = 10 + 9$ gelöst.

Ole sagt: „Die richtige Lösung für $\square$ ist 22.“

Elif behauptet: „16 ist die richtige Lösung.“

Ayla schreibt: $\square = 12$

Probe: Setze die Lösung in die Gleichung ein und überprüfe, ob das Ergebnis für beide Seiten der Gleichung gleich ist.

Wer hat richtig gerechnet?

- Mache die Probe.

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der Gleichung
Validieren und Interpretieren von Lösungen

Überprüfen der Lösung durch Einsetzen in eine komplexe Gleichung — 47

Luisa löst die Gleichung $3 \cdot (\square + 4) = 24$

Luisa schreibt: $\square = 2$

- Hat sie Recht? Mache die Probe.
- Begründe.

Bild 22: „Mädchen schreibt“, cc by nc 4.0, erstellt mit dem © Worksheet Crafter – www.worksheetcrafter.com

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der Gleichung
Validieren und Interpretieren von Lösungen

Ergänzen einer Zahlenmauer mithilfe von Lösungsvorschlägen durch Einsetzen — 48

Elias und Azra sollen die fehlende Zahl in der Zahlenmauer finden.

Elias sagt:

Man muss 100 einsetzen.

Azra sagt:

Ich denke, 50 ist die passende Lösung.

	120	
70		
50	20	30

- Überprüfe, wer Recht hat.
- Begründe.

Bild 23: „Mädchen Brille“, pixabay.com,CC-0 *Bild 24: „Junge blond“, pixabay.com, CC-0*

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der Gleichung
Validieren und Interpretieren von Lösungen

Überprüfen der Lösung durch Einsetzen in Gleichungen — **49**

- Überprüfe, ob die Lösung zu der Gleichung jeweils passt.
- Führe für jede Gleichung die Probe durch.
- Kreuze dann an.

$23 - 2 \cdot 7 = \square \cdot 3$	Lösung: $\square = 3$	O passt	O passt nicht
$\square : 6 = \square - 20$	Lösung: $\square = 24$	O passt	O passt nicht
$40 : \square + 11 = 5 \cdot (10 - 8)$	Lösung: $\square = 10$	O passt	O passt nicht

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der Gleichung
Validieren und Interpretieren von Lösungen

Validieren einer Lösung im Sachzusammenhang — **50**

Auf einem Bauernhof leben 10 Hühner und einige Schweine. Insgesamt sind es 25 Tiere.

Lena behauptet: „Dann leben 35 Schweine auf dem Bauernhof.“

- Kann Lenas Aussage stimmen?
- Vermute, was Lena gerechnet hat.

Bild 25: „Bauernhof 2“, cc by nc 4.0, erstellt mit dem © Worksheet Crafter – www.worksheetcrafter.com

Validieren einer Lösung mithilfe eines Bildes | 51

Auf einem Bauernhof leben 3 Gänse und 3 Schweine.
Wie viele Beine haben die Tiere insgesamt?

Bo sagt: „Es sind insgesamt 18 Beine."

- Erkläre mithilfe des Bildes, dass Bo Recht hat.

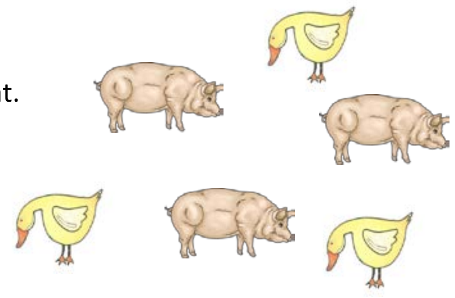


Bild 26: „Gänse und Schweine", cc by nc 4.0, erstellt mit dem © Worksheet Crafter – www.worksheetcrafter.com

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der Gleichung
Validieren und Interpretieren von Lösungen

Validieren einer Lösung durch Erstellen einer Zeichnung | 52

Auf einem Bauernhof leben Hühner und Schweine. Insgesamt sind es 16 Beine.
Wie viele Hühner und wie viele Schweine sind es?

Lien ermittelt: 2 Schweine und 4 Hühner

- Zeichne ein passendes Bild zur Lösung von Lien.

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Validieren von Lösungen zu verschiedenen Sachzusammenhängen **53**

- Lies die Texte.
- Kreuze an, ob die Lösungen stimmen können. Begründe deine Entscheidung.

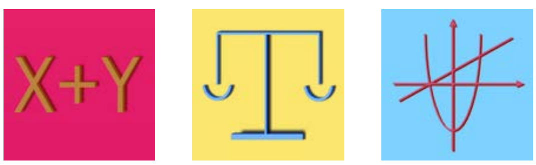
Eriks Buch hat insgesamt 250 Seiten. Er hat schon die Hälfte gelesen. Heute will er noch weitere 100 Seiten lesen. Wie viele Seiten hat Erik dann insgesamt gelesen?	Lösung: Erik hat dann insgesamt 100 Seiten gelesen. ☐ kann stimmen ☐ kann nicht stimmen
Leons Eltern haben sich einen neuen Fernseher für 650 €, Lautsprecher für 180 € und eine neue CD-Anlage gekauft. Insgesamt haben sie 950 € bezahlt.	Lösung: Die CD-Anlage hat 120 € gekostet. ☐ kann stimmen ☐ kann nicht stimmen
Familie Hagen fuhr 360 km bis zu ihrem Urlaubsort. Nach einem Viertel der Strecke haben sie die erste Pause gemacht.	Lösung: Die Pause wurde nach 180 km gemacht. ☐ kann stimmen ☐ kann nicht stimmen

LISUM
Landesinstitut für Schule und Medien Berlin-Brandenburg

Förderaufgaben

Idee der Gleichungen

Sekundarstufe I



Übersicht zu den Förderaufgaben: 1a, b; 2a, b, c; 3 a, b — E, F, G

Förderschritte zu den Diagnoseaufgaben

1. Erklären des Zusammenhangs von Waage und Gleichung
2. Aufstellen einer Gleichung zu einer sortierten Waage
3. Aufstellen einer Gleichung zu einer unsortierten Waage (Variable nur auf einer Seite)
4. Aufstellen einer Gleichung zu einer unsortierten Waage (Variable nur auf einer Seite)
5. Aufstellen einer Gleichung zu einer unsortierten Waage (Variable auf beiden Seiten)
6. Erklären des Zusammenhangs von Gleichung und Obstkörben
7. Aufstellen einer Gleichung im Sachzusammenhang (Obstkörbe)
8. Aufstellen einer Gleichung im Sachzusammenhang (Tierfiguren)
9. Aufstellen einer Gleichung im Sachzusammenhang (Verkauf)
10. Aufstellen einer Gleichung im Sachzusammenhang (gleichschenkliges Dreieck)
11. Zeichnen eines Waagebildes zu einer Gleichung (Variable auf einer Seite)
12. Zeichnen eines Waagebildes zu einer Gleichung (Variable auf beiden Seiten)
13. Finden eines Sachzusammenhangs zu einer Gleichung (mit vorgegebenem Kontext)
14. Finden eines Sachzusammenhangs zu einer Gleichung (ohne vorgegebenem Kontext)
15. Aufstellen von Zahlenrätseln zu einer Gleichung
16. Aufstellen von Zahlenrätseln zu Gleichungen
17. Zeichnen von Streichholzbildern zu Gleichungen
18. Zuordnen von Streichholzbildern zu einer Gleichung
19. Bestimmen der Lösungsmenge von Gleichungen durch systematisches Probieren (Kerzen)
20. Finden von Lösungen durch systematisches Probieren (Obstkörbe)
21. Finden von Lösungen durch Probieren (Obstkörbe)
22. Finden von Lösungen durch systematisches Probieren (Spielzeugtiere)
23. Bestimmen der Lösungsmenge von Gleichungen durch systematisches Probieren (Waage)
24. Bestimmen der Lösungsmenge von Gleichungen durch systematisches Probieren (Waage)
25. Ermitteln der fehlenden Masse, um ein Gleichgewicht herzustellen (Waage)
26. Bestimmen der Lösung durch systematisches Probieren mit Intervallschachtelung
27. Bestimmen der Lösung einer Gleichung durch Rückwärtsarbeiten
28. Bestimmen der Lösung einer Gleichung durch Rückwärtsarbeiten (Zahlenrätsel)
29. Bestimmen der Lösungsmengen von Gleichungen durch Rückwärtsarbeiten (Zahlenrätsel)
30. Erkennen und erklären von Äquivalenzumformungen (Waage)
31. Beschreiben von Äquivalenzumformungen (Waage)
32. Bestimmen der Lösung einer Gleichung durch Äquivalenzumformungen (Waage)
33. Lösen von Gleichungen mithilfe von Waagebildern (Äquivalenzumformungen)
34. Erkennen und erklären von Äquivalenzumformungen (Streichhölzer)
35. Bestimmen der Lösungsmengen von Gleichungen durch Äquivalenzumformung
36. Benutzen einer formalen Schreibweise für die Angabe von Äquivalenzumformungen
37. Bestimmen der Lösungsmengen von Gleichungen durch Äquivalenzumformungen (Waage)
38. Bestimmen der Lösungsmengen von Gleichungen durch Äquivalenzumformungen (Waage)
39. Ergänzen von Äquivalenzumformungsschritten (Streichhölzer)
40. Bestimmen der Lösungsmenge von Gleichungen durch Äquivalenzumformungen
41. Bestimmen der Lösungsmenge von Gleichungen durch Äquivalenzumformungen
42. Bestimmen der Lösungsmengen von Gleichungen durch Äquivalenzumformungen
43. Vergleichen von Lösungswegen mit unterschiedlichen Umformungsschritten (Waage)

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

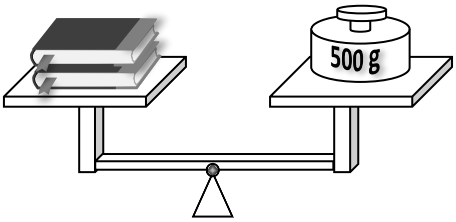
44. Bestimmen der Lösungsmengen von Gleichungen durch Äquivalenzumformungen (Spielzeug)
45. Bestimmen der Lösungsmenge einer Gleichung durch Äquivalenzumformungen
46. Bestimmen von mehrelementigen Lösungsmengen von Gleichungen (Fruchtkörbe)
47. Bestimmen von mehrelementigen Lösungsmengen von Gleichungen (Fruchtkörbe)
48. Bestimmen der Lösungsmengen von Gleichungssystemen durch systematisches Probieren
49. Grafisches Lösen von Gleichungen mit zwei Variablen
50. Erkennen des Schnittpunktes zweier Geraden als Lösung eines Gleichungssystems
51. Erkennen des Schnittpunktes zweier Geraden als Lösung eines Gleichungssystems
52. Grafisches Lösen von Gleichungssystemen
53. Grafisches Lösen von Gleichungssystemen
54. Bestimmen der Lösungsmengen von Gleichungssystemen mit dem Einsetzungsverfahren
55. Sortieren von Lösungsschritten zur Bestimmung der Lösungsmenge von Gleichungssystemen
56. Bestimmen der Lösungsmenge eines Gleichungssystems mit dem Einsetzungsverfahren
57. Erstellen einer Lösungsstrategie zur Überprüfung des Wahrheitsgehalts einer Lösung
58. Ziehen von Schlussfolgerungen aus der Lösung einer Gleichung
59. Überprüfen von Wertepaaren als Lösung einer Gleichung
60. Überprüfen von Wertepaaren anhand der grafischen Darstellung einer Gleichung
61. Überprüfen eines Wertepaars als Lösung eines Gleichungssystems
62. Ziehen von Schlussfolgerungen aus der Lösung eines Gleichungssystems
63. Deuten der Ergebnisse einer Probe eines Gleichungssystems
64. Durchführen einer Probe bei einer quadratischen Gleichung
65. Nutzen des Taschenrechners zur Probe bei quadratischen Gleichungen
66. Überprüfen des Wahrheitsgehalts einer Lösung im Sachzusammenhang (Streichhölzer)
67. Erläutern der Lösung einer Probe im Sachzusammenhang (Streichhölzer)
68. Begründen einer möglichen Lösung einer Gleichung mit zwei Variablen (Waagemodell)
69. Begründen mehrerer Lösungen einer Gleichung mit zwei Variablen (Waagemodell)
70. Überprüfen der Lösung im Sachzusammenhang ohne Rechnung (Futtermittelvorrat)
71. Ziehen von Schlussfolgerungen aus einer Lösung im Sachzusammenhang
72. Auswählen der zum Sachkontext passenden Lösung bei einer quadratischen Gleichung

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe 1

Idee der Gleichungen
Aufstellen und Interpretieren von Gleichungen

Erklären des Zusammenhangs von Waage und Gleichung	**1**



$$\square + \square = 500$$

$$2 \cdot x = 500$$

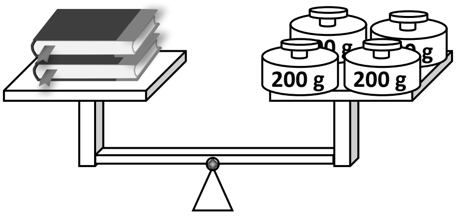
- Erkläre, weshalb beide Gleichungen zu diesem Bild passen.

Bild 1„Waage mit Büchern“,M.Reblin für LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe 1

Idee der Gleichungen
Aufstellen und Interpretieren von Gleichungen

Aufstellen einer Gleichung zu einer sortierten Waage	*2*



Auf einer Seite der Waage liegen zwei gleiche Bücher. Es ist nicht bekannt, wie schwer sie sind. Auf der anderen Seite liegen 4-mal 200 g.

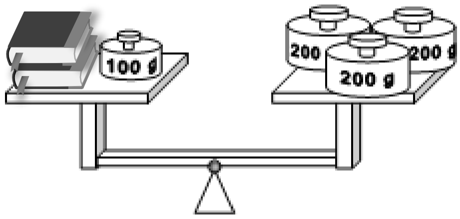
- Beschreibe das Bild durch eine Gleichung.

Bild 2 „Waage mit Büchern“, M.Reblin für LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe 1

Idee der Gleichungen
Aufstellen und Interpretieren von Gleichungen

Aufstellen einer Gleichung zu einer unsortierten Waage (Variable nur auf einer Seite)	3



Es ist nicht bekannt, wie schwer die zwei gleichen Bücher auf der linken Seite der Waage sind.

- Beschreibe das Bild durch eine Gleichung.

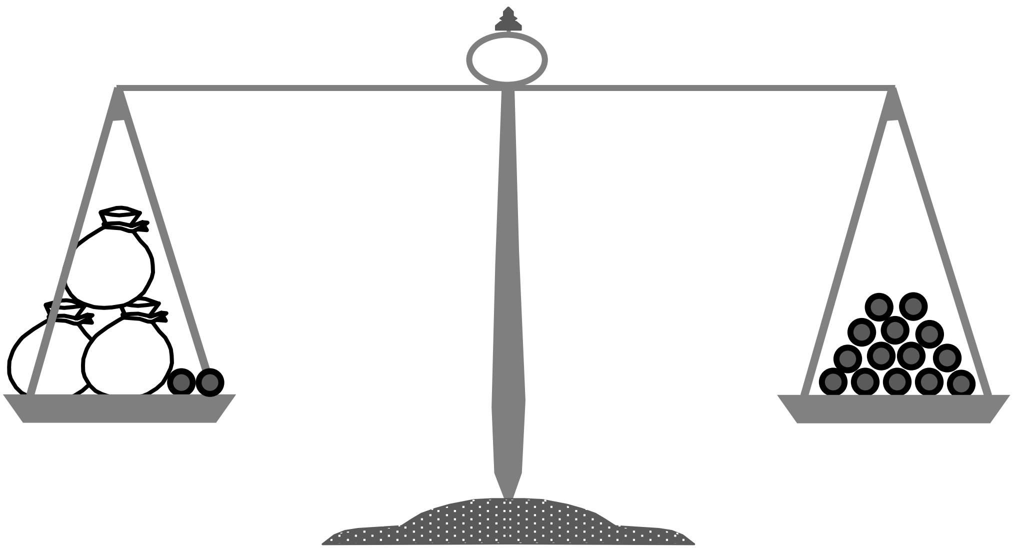
Bild 3 „Waage mit Büchern“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe 1

Idee der Gleichungen
Aufstellen und Interpretieren von Gleichungen

Aufstellen einer Gleichung zu einer unsortierten Waage (Variable nur auf einer Seite)	4



In jedem Beutel ist die gleiche unbekannte Anzahl x von Murmeln. Die Waage ist im Gleichgewicht.

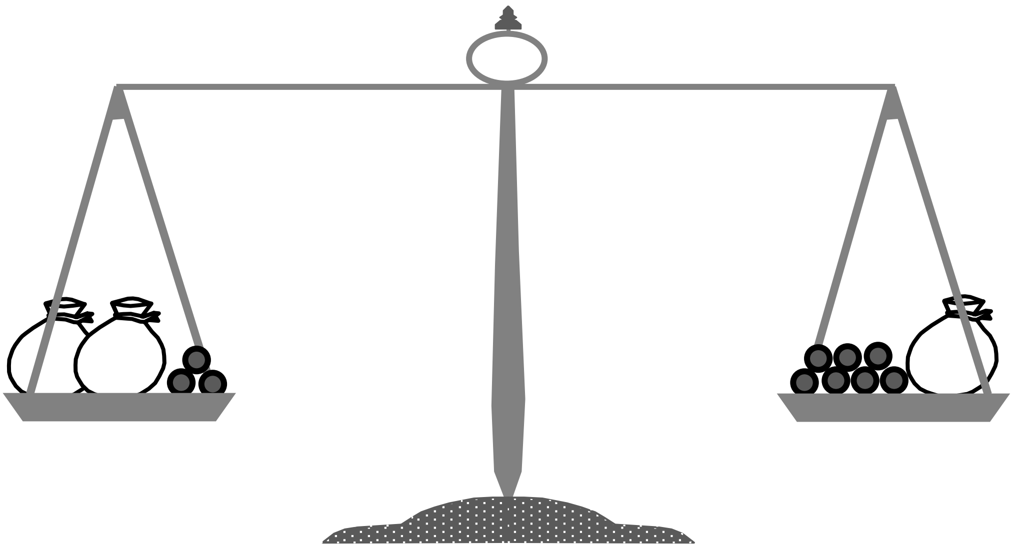
- Beschreibe das Bild durch eine Gleichung.

Bild 4 „Waage mit Kugeln und Beuteln“, M.Reblin für LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der Gleichung
Aufstellen und Interpretieren von Gleichungen

Aufstellen einer Gleichung zu einer unsortierten Waage (Variable auf beiden Seiten) | **5**



In jedem Beutel ist die gleiche unbekannte Anzahl x von Murmeln. Die Waage ist im Gleichgewicht.

- Beschreibe das Bild durch eine Gleichung.

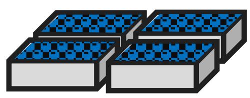
Bild 5: „Waage mit Kugeln und Beuteln", M.Reblin für LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der Gleichung
Aufstellen und Interpretieren von Gleichungen

Erklären des Zusammenhangs von Gleichung und Obstkörben | **6**

Fabian hat 1000 g Obst gekauft.
Er bringt 500 g Erdbeeren und 4 Schalen Heidelbeeren mit nach Hause.



$$1000 = 500 + 4 \cdot s$$

- Erkläre, warum die Gleichung zum Sachverhalt passt.

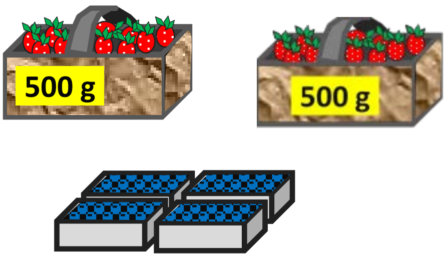
Bild 6: „Erdbeerkorb", M.Reblin für LISUM, CC-BY-SA 4.0, Bild 7 „Heidelbeerschälchen", M.Reblin für LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der Gleichung
Aufstellen und Interpretieren von Gleichungen

Aufstellen einer Gleichungen im Sachzusammenhang (Obstkörbe) | **7**

Fabian hat 1800 g Obst gekauft.
Er bringt zwei Körbe Erdbeeren und 4 Schalen Heidelbeeren mit nach Hause.



- Stelle eine passende Gleichung auf.

Bild 8„Erdbeerkorb“, M.Reblin für LISUM, CC-BY-SA 4.0, Bild 9 „Heidelbeerschälchen“, M.Reblin für LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der Gleichung
Aufstellen und Interpretieren von Gleichungen

Aufstellen einer Gleichungen im Sachzusammenhang (Tierfiguren) | **8**

Paul verkauft auf dem Flohmarkt 30 Tierfiguren.
Jede Tierfigur hat den gleichen Preis (x).

Zusammen mit 2,00 € Trinkgeld hat er am Ende 47,00 € eingenommen.

- Stelle eine passende Gleichung auf.

Bild 10 “Tierfiguren“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Aufstellen einer Gleichungen im Sachzusammenhang (Verkauf) **9**

Frau Wagner verkauft Kirschen. Ein Korb mit Kirschen kostet 8 €.

Zu Beginn hatte sie 22 € Wechselgeld in der Kasse.

Am Ende des Tages sind 526 € in der Kasse.

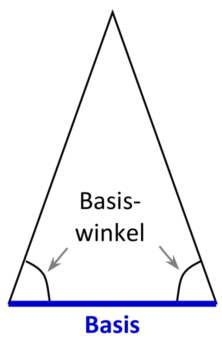
- Stelle eine passende Gleichung zu dieser Situation auf.

Aufstellen einer Gleichungen im Sachzusammenhang (gleichschenkliges Dreieck) **10**

In einem gleichschenkligen Dreieck beträgt der Winkel gegenüber der Basis 40°.

Die Basiswinkel sind gleichgroß.

- Stelle eine Gleichung auf, mit der man die Größe der Basiswinkel ausrechnen kann.



Zeichnen eines Waagebildes zu einer Gleichung (Variable auf einer Seite) | **11**

- Stelle die folgende Gleichung auf einer Waage dar: $\mathbf{10 = 3 \cdot b + 4}$

  Zeichne für **b** einen Beutel mit unbekanntem Inhalt, etwa so: 

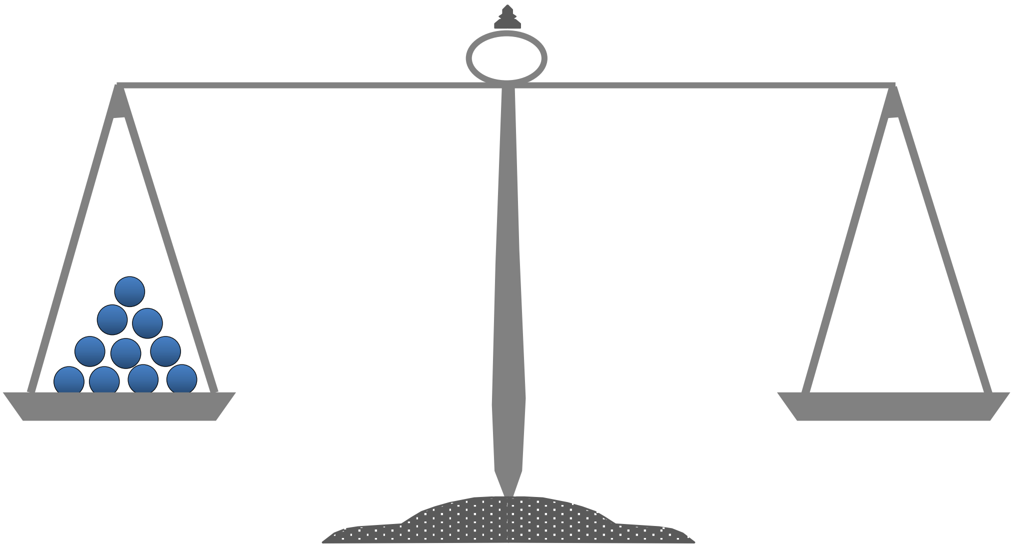


Bild 11 „Waage mit Kugeln", M.Reblin für LISUM, CC-BY-SA 4.0

Zeichnen eines Waagebildes zu einer Gleichung (Variable auf beiden Seiten) | **12**

- Stelle die Gleichung $\mathbf{5 \cdot b = 3 \cdot b + 6}$ mithilfe einer Waage dar.

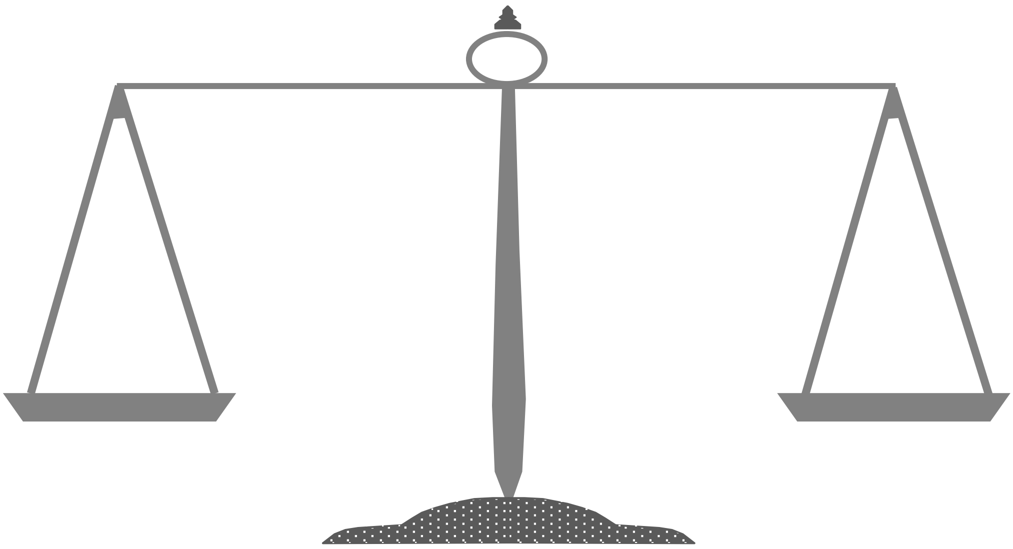


Bild 12 „Waage", M.Reblin für LISUM, CC-BY-SA 4.0

Finden eines Sachzusammenhangs zu einer Gleichung (mit vorgegebenem Kontext) — 13

Ben verkauft seine Modellautos auf dem Flohmarkt. Alle Autos haben den gleichen Preis.
Als er am Morgen beginnt, hat er schon etwas Wechselgeld in der Kasse.
Am Ende zählt er sein Geld in der Kasse.

- Erkläre, wie die folgende Gleichung zu diesem Sachverhalt passt.

$$52 \cdot x + 2{,}80\,€ = 34{,}00\,€$$

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der Gleichung
Aufstellen und Interpretieren von Gleichungen

Finden eines Sachzusammenhangs zu einer Gleichung (ohne vorgegebenem Kontext) — 14

Bearbeite zuerst **Karte 13**.

- Beschreibe einen ähnlichen Sachverhalt der zu folgender Gleichung passt:

$$45 \cdot x + 8{,}00\,€ = 62{,}00\,€$$

- Denke dir einen Sachverhalt aus, der zur nächsten Gleichung passen könnte.

$$x \cdot 0{,}80\,€ - 5{,}20\,€ = 34{,}00\,€$$

Aufstellen von Zahlenrätseln zu einer Gleichung

Ida macht aus der Gleichung $\mathbf{3 \cdot x + 5 = 23}$ ein Zahlenrätsel.

Es lautet: „Ich denke mir eine Zahl und verdreifache sie.
Wenn ich dann noch 5 addiere, so erhalte ich die Zahl 23."

- Denke dir zu der Gleichung $\mathbf{5 \cdot x - 8 = 53}$ ein Zahlenrätsel aus.

Aufstellen von Zahlenrätseln zu Gleichungen

Dennis stellt zur Gleichung $\mathbf{4 \cdot x - 1 = 2 \cdot x + 11}$ folgendes Rätsel auf:

„Das Vierfache einer unbekannten Zahl vermindert um 1 ergibt genauso viel wie das Doppelte dieser Zahl vermehrt um 11."

- Stelle zu den folgenden Gleichungen je ein Zahlenrätsel auf:

a) $\mathbf{5 \cdot x + 3 = 2 \cdot x + 24}$

b) $\mathbf{3 \cdot x - 4 = x + 8}$

c) $\mathbf{2 \cdot x + 11 = 39 - 2 \cdot x}$

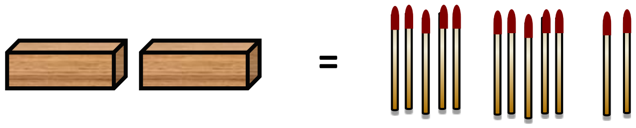
Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der Gleichung
Aufstellen und Interpretieren von Gleichungen

Zeichnen von Streichholzbildern zu Gleichungen **17**

In einer Box befindet sich eine unbekannte Anzahl (x) von Streichhölzern.
In allen Boxen befinden sich gleich viele Streichhölzer.

In zwei Boxen sind insgesamt 12 Streichhölzer.
Das wird so dargestellt:



In drei Boxen sind insgesamt 15 Streichhölzer.

- Zeichne.

- Zeichne Boxen und Streichhölzer zu folgender Gleichung: $\mathbf{3 \cdot x + 2 = 8}$.

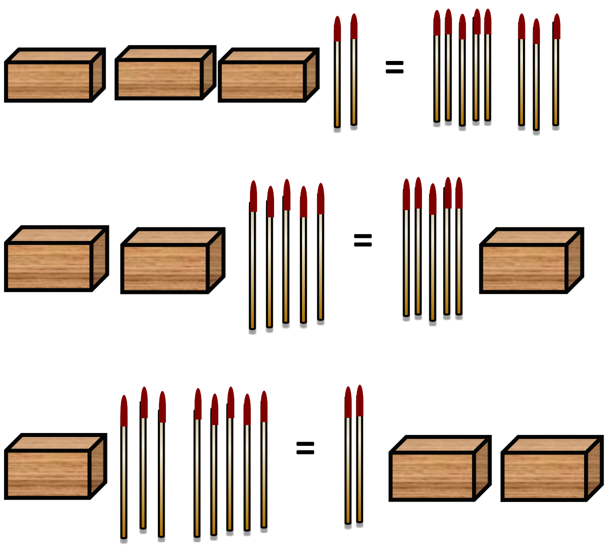
Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der Gleichung
Aufstellen und Interpretieren von Gleichungen

Zuordnen von Streichholzbildern zu einer Gleichung **18**

In einer Box befindet sich eine unbekannte Anzahl (x) von Streichhölzern.
In allen Boxen befinden sich gleich viele Streichhölzer.

- Ordne den Bildern die passenden Gleichungen zu.



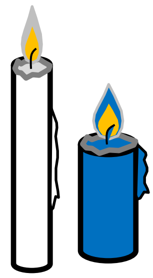
- [ ] $2 \cdot x + 5 = x + 5$
- [ ] $3 \cdot x + 7 = 2$
- [ ] $2 + 3 \cdot x = 8$
- [ ] $8 + x = 2 + 2 \cdot x$

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der Gleichungen
Lösen von Gleichungen

Bestimmen der Lösungsmenge von Gleichungen durch systematisches Probieren (Kerzen) — 19

Zwei Kerzen brennen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten ab.
Die weiße Kerze ist 42 cm lang und wird pro Stunde um 5 cm kürzer.
Die blaue Kerze ist 24 cm lang und wird pro Stunde um 2 cm kürzer.



- Untersuche, nach wie viel Stunden beide Kerzen die gleiche Höhe haben. Fülle dazu die folgende Tabelle aus.

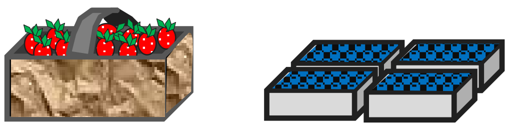
Zeit (x) in Stunden	Länge der weißen Kerze in cm	Länge der blauen Kerze in cm
0	42	
1		
2		
4		
6		
7		
8		

Bild 15: „Kerzen", M.Reblin für LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der Gleichungen
Lösen von Gleichungen

Finden von Lösungen durch systematisches Probieren (Obstkörbe) — 20



In einem Korb befinden sich Erdbeeren und in vier gleich schweren Körben Blaubeeren.
Zusammen wiegen die Körbe 9 kg. Die Gleichung dazu lautet: **e + 4 · b = 9**.

Jana überlegt: Wenn die Erdbeeren 4 kg wiegen würden und die Blaubeeren jeweils 1,5 kg, dann wäre die Gesamtmasse 10 kg. Also zu viel.

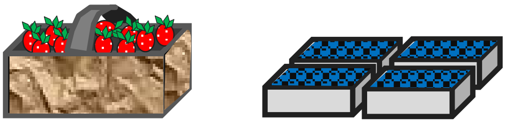
- Probiere weitere Zahlen für die Masse der Blaubeerkörbe aus, bis du eine Lösung gefunden hast. Nutze für deine Rechnungen die Tabelle.

e	*b*	**e + 4 · b**
4	1,5	4 + 4 · 1,5 = 10
4	1	
4		
4		

- Finde durch Probieren eine Lösung, wenn die Erdbeeren nun 4,4 kg wiegen.

Bild 16: „Obstkörbe", Reblin für LISUM, CC-BY-SA 4.0

Finden von Lösungen durch Probieren (Obstkörbe) — 21



In einem Korb befinden sich Erdbeeren und in vier gleich schweren Körben befinden sich Blaubeeren.
Zusammen wiegen die Körbe 7 kg.
Toni stellt dazu eine Gleichung auf: $\mathbf{x + 4 \cdot y = 7}$
Dabei bezeichnet er die Masse der Erdbeeren mit x und die Masse eines Blaubeerkorbs mit y.

Toni überlegt, wie schwer die Obstkörbe sein könnten. Er findet zwei Möglichkeiten:

1. Die Erdbeeren wiegen 3 kg und die Blaubeeren jeweils 1 kg, denn 3 + 4 · 1 = 7.
2. Die Erdbeeren wiegen 1 kg und die Blaubeeren jeweils 1,5 kg, denn 1 + 4 · 1,5 = 7.

- Finde eine weitere Möglichkeit und schreibe sie auf.

Bild 17: „Obstkörbe", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Finden von Lösungen durch systematisches Probieren (Spielzeugtiere) — 22

Florentine darf sich von ihrem Taschengeld Spielzeugtiere kaufen. Sie gibt höchstens 50 € aus.
Die kleineren Tiere kosten 7 €, die größeren 11 €.

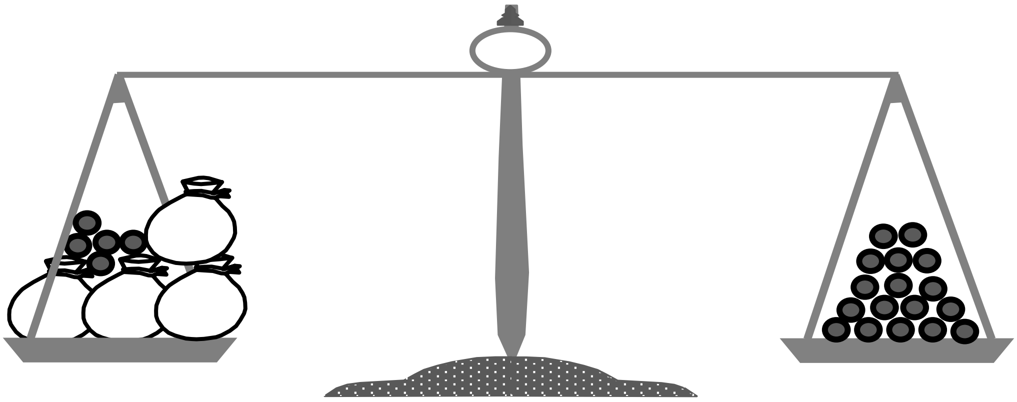
- Finde heraus, wie viele Tiere sie sich höchstens gekauft hat. Fülle dazu die Tabelle aus.

Anzahl der kleinen Tiere	Anzahl der großen Tiere	Gesamtpreis
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

- Gib jeweils die Anzahl an großen und kleinen Tieren an, wenn Florentine *genau* 50 € ausgegeben hat.

Bild 18: „Spielzeugtiere 1", Reblin für LISUM, CC-BY-SA 4.0

Bestimmen der Lösungsmenge von Gleichungen durch systematisches Probieren (Waage) | **23**



Das dargestellte Bild lässt sich durch die folgende Gleichung beschreiben: $4x + 5 = 17$.

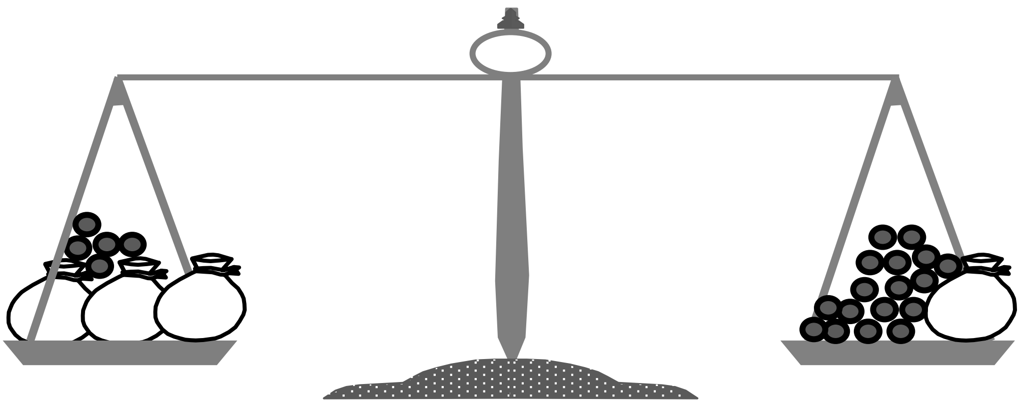
Achmed überlegt, wie viele Kugeln in einem Beutel sind.

- Setze für x nacheinander verschiedene Zahlen ein. Lege dafür eine Tabelle an. Beginne mit $x = 1$.

  Wie viele Kugeln sind in einem Beutel?

Bild 19: „Waage“, Reblin für LISUM, CC-BY-SA 4.0

Bestimmen der Lösungsmenge von Gleichungen durch systematisches Probieren (Waage) | **24**



Das dargestellte Bild lässt sich durch die folgende Gleichung beschreiben: $3x + 5 = x + 17$

Katrin überlegt, wie viele Kugeln in einem Beutel sind.

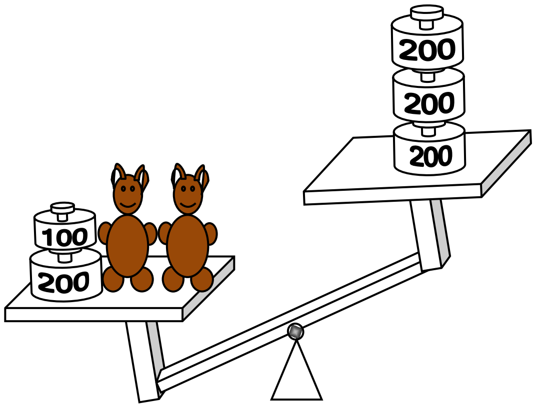
- Setze für x nacheinander verschiedene Zahlen ein. Lege dafür eine Tabelle an.
  Beginne mit $x = 1$.
  Finde die Anzahl an Kugeln in einem Beutel heraus.

Bild 20: „Waage“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der Gleichungen
Lösen von Gleichungen

Ermitteln der fehlenden Masse, um ein Gleichgewicht herzustellen (Waage) — **25**



Die obige Waage war im Gleichgewicht, bis auf der rechten Seite etwas weggenommen wurde.

- Ermittle, wie viel Gramm auf der rechten Seite fehlen, wenn ein Teddy 225 g wiegt.

Bild 21: „Waage_2", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der Gleichungen
Lösen von Gleichungen

Bestimmen der Lösung durch systematisches Probieren mit Intervallschachtelung — **26**

Gegeben ist die Gleichung: $8 \cdot x + 12 = 14$.

- Begründe, dass die Lösung kleiner sein muss als 1, aber größer als 0.
- Fülle die folgende Tabelle aus.

x	**8 · x + 12**	**<, > oder = 14**
0,1		
0,2		
0,3		
0,4		

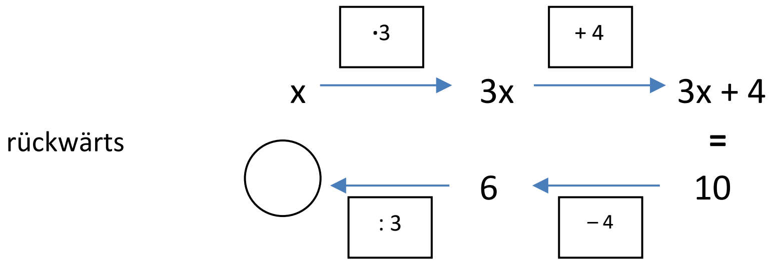
- Entscheide, zwischen welchen beiden Zahlen die richtige Lösung liegen muss.
- Lege eine neue Tabelle an und setze weitere Zahlen ein, um die Lösung zu bestimmen.

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der Gleichungen
Lösen von Gleichungen

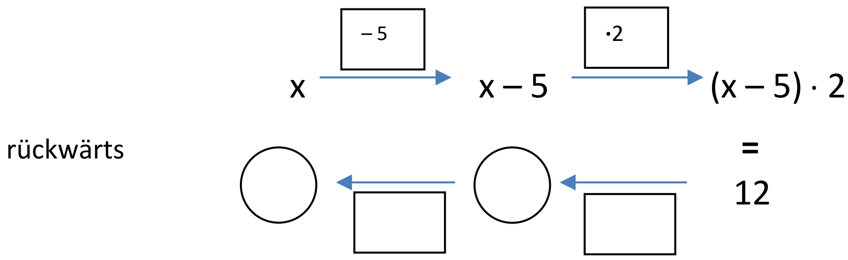
Bestimmen der Lösung einer Gleichung durch Rückwärtsarbeiten — 27

Die Gleichung **3x + 4 = 10** soll gelöst werden. Dazu müssen die Rechenschritte, mit denen der Term 3x +4 gebildet wurde, rückgängig gemacht werden.



- Ermittle den Wert von x. x = ____________

- Löse die Gleichung **(x – 5) · 2 = 12** mithilfe der Darstellung.



Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der Gleichungen
Lösen von Gleichungen

Bestimmen der Lösung einer Gleichung durch Rückwärtsarbeiten (Zahlenrätsel) — 28

Leon löst die Zahlenrätsel von Selma.

Selma sagt:	**Leon überlegt:**
Das Doppelte meiner Zahl ergibt 7. 2 · x = 7	Dann ist deine Zahl die Hälfte von 7, also 3,5. x = 7 : 2 x = 3,5
Ich addiere zu meiner Zahl 7 und erhalte 25. x + 7 = 25	Dann ist deine Zahl um 7 kleiner als 25, also 18. x = x =
Ich subtrahiere 16 von meiner Zahl und erhalte –5. x – 16 = – 5	Deine Zahl ist um 16 größer als –5, nämlich 11. x = x =

- Beschreibe, wie Leon die gesuchte Zahl bestimmt.
- Ergänze dabei die Tabelle.

Bestimmen der Lösungsmengen von Gleichungen durch Rückwärtsarbeiten (Zahlenrätsel) | **29**

Selma stellt ein Zahlenrätsel: „Ich addiere zum Doppelten meiner Zahl 5 und erhalte 13."

Selma rechnet „vorwärts“	Leon rechnet „rückwärts“
gedachte Zahl	gesuchte Zahl
mal 2	**geteilt durch** 2
plus 5	**minus** 5
Ergebnis 13	Ergebnis 13

- Nutze Leons Lösungsweg und berechne Selmas gedachte Zahl.

- Löse das nächste Zahlenrätsel wie im Beispiel oben. Fülle dazu die Tabelle aus.

Selma sagt: „Von meiner Zahl subtrahiere ich 4, multipliziere das Ergebnis mit 10 und erhalte 15.“

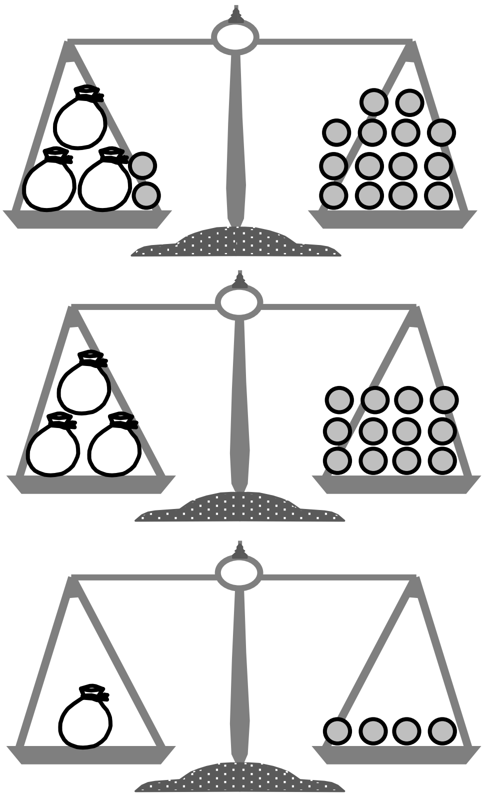
Selma rechnet „vorwärts“	Leon rechnet „rückwärts“
x	
minus 4	
mal 10	
Ergebnis 15	

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der Gleichungen
Lösen von Gleichungen

Erkennen und erklären von Äquivalenzumformungen (Waage) | **30**



Auf der Waage liegen 3 Beutel, in denen jeweils gleich viele Kugeln sind. Das kann man durch folgende Gleichung ausdrücken:

$$3 \cdot x + 2 = 14$$

Peter möchte wissen, wie viele Kugeln in jedem Beutel sind. Er nimmt auf beiden Seiten etwas weg. Die Gleichung lautet jetzt:

$$3 \cdot x = 12$$

- Beschreibe, was auf der Waage passiert ist.
  Nenne die passende Rechenoperation.

Peter überlegt sich den nächsten Schritt.
Er teilt auf beiden Seiten alles durch 3.

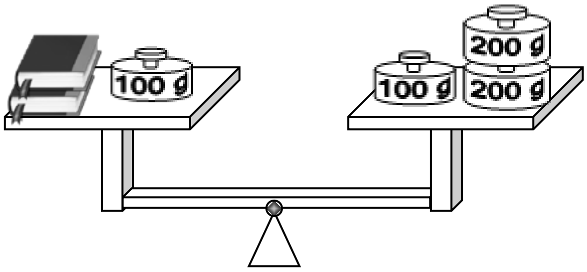
- Was hat er mit diesem Schritt erreicht?

Bild 22: „3 Waagen“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

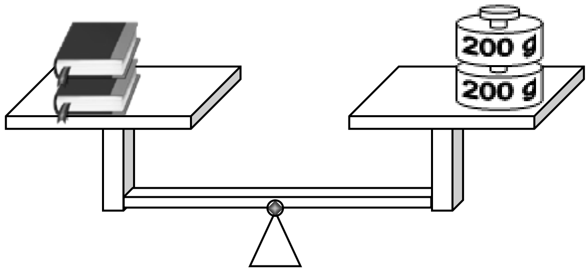
Idee der Gleichungen
Lösen von Gleichungen

Beschreiben von Äquivalenzumformungen (Waage) — **31**



Auf der Waage liegen zwei gleich schwere Bücher. Aida möchte wissen, wie schwer ein Buch ist. Sie schreibt:

$2 \cdot x + 100 = 500$

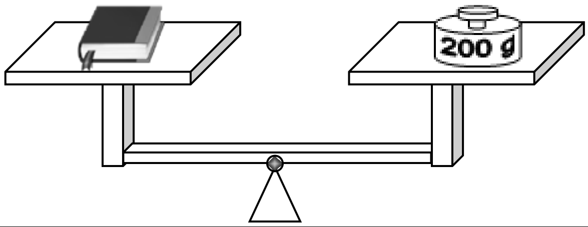


- Beschreibe die Veränderung auf der Waage und zeige die Veränderung auch in der Gleichung.

Die dazugehörige Gleichung lautet:

$2 \cdot x + 100 - 100 = 500 - 100$

zusammengefasst: **$2 \cdot x = 400$.**



- Beschreibe die Veränderung auf der Waage und schreibe entsprechende Gleichungen.

____

zusammengefasst: ____________________

Bild 23: „3 Bücherwaagen", LISUM, CC-BY-SA 4.0

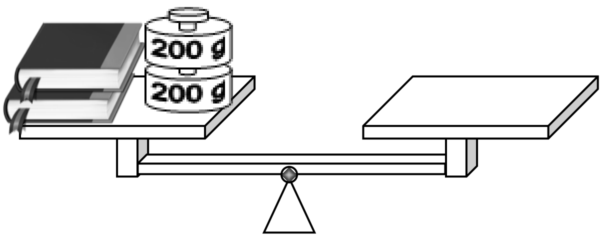
Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der Gleichungen
Lösen von Gleichungen

Bestimmen der Lösung einer Gleichung durch Äquivalenzumformungen (Waage) — **32**

Aida löst eine Gleichung:

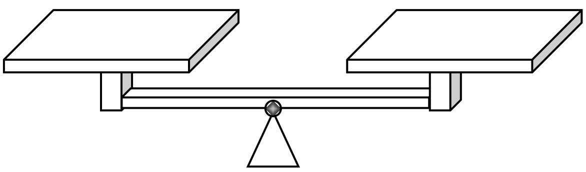
- Ergänze die drei Waagen passend zu den Lösungsschritten.
  Benutze dabei nur 100-g- und 200-g-Massestücke.
- Beschreibe für jeden Schritt, was auf beiden Seiten gemacht wird.



$3 \cdot x + 400 = 700$

____

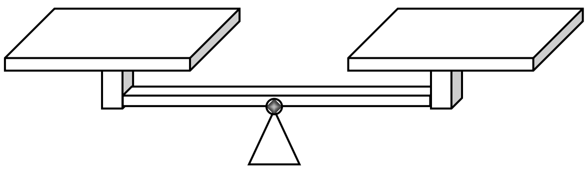
____



$3 \cdot x = 300$

____

____



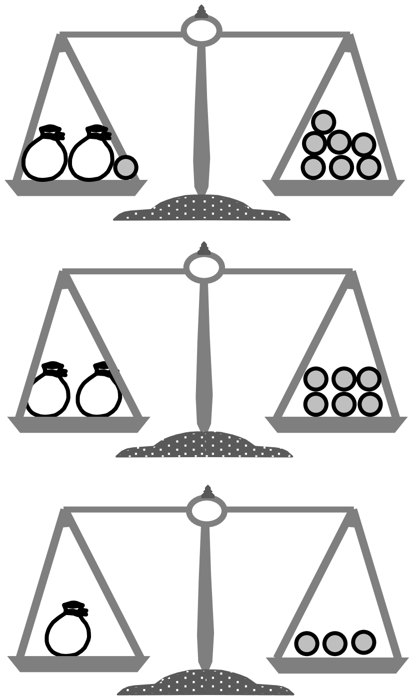
$x = 100$

Bild 24: „3 Bücherwaagen", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Lösen von Gleichungen mithilfe von Waagebildern (Äquivalenzumformungen) — **33**

Auf der Waage liegen zwei Beutel, in denen jeweils gleich viele Kugeln sind. Wie viele sind es?

- Gib für jede Waage eine passende Gleichung an.
  Beschreibe die Veränderungen von Waage zu Waage.



Ergebnis: In jedem Beutel befinden sich ____ Kugeln.

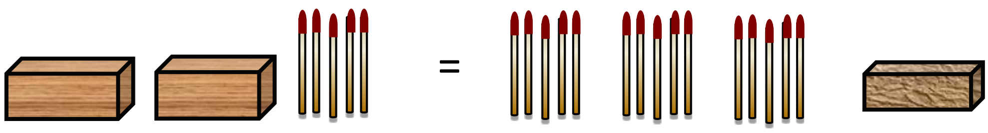
Bild 25: „3 Waagen mit Kugeln“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der Gleichungen
Lösen von Gleichungen

Erkennen und erklären von Äquivalenzumformungen (Streichhölzer) — **34**

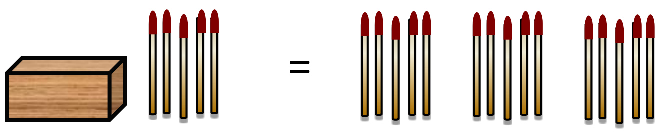
Das folgende Bild beschreibt eine Gleichung.



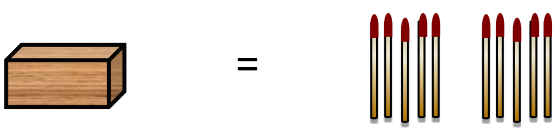
Luka möchte herausfinden, wie viele Streichhölzer in einer Schachtel sind.

Er löst die Gleichung in zwei Schritten und sieht am Ende, wie viele Streichhölzer in einer Schachtel sind.

Schritt 1:



Schritt 2:



- Erkläre mit den Bildern, wie Luca vorgegangen ist.

Bild 26: „Streichhölzer“, M.Reblin für LISUM, CC-BY-SA 4.0

Bestimmen der Lösungsmengen von Gleichungen durch Äquivalenzumformung | **35**

Selma sagt: „Zu meiner Zahl addiere ich 4, das Ergebnis multipliziere ich mit 10 und erhalte 15.“

Dieses Zahlenrätsel wird durch die Gleichung **(x + 4) · 10 = 15** beschrieben.

Leon löst die Gleichung.

geteilt durch 10	(x + 4) · 10 = 15		*geteilt durch 10*
minus 4	x + 4 = 1,5		*minus 4*
	x = – 2,5		

- Erkläre, warum Leon erst durch 10 teilt und danach 4 subtrahiert.
- Löse die folgenden Gleichungen. Schreibe so wie im Beispiel oben.

6 · x – 10 = 8

_______ = ___

_______ = ___

(x – 13) : 5 = 4

________ = ____

_________ = ____

Benutzen einer formalen Schreibweise für die Angabe von Äquivalenzumformungen | **36**

Leon löst eine Gleichung.

geteilt durch 10	(x + 4) · 10 = 15	*geteilt durch 10*
minus 4	x + 4 = 1,5	*minus 4*
	x = – 2,5	

Dies schreibt man in dieser Form:

(x + 4) · 10 = 15 | : 10

x + 4 = 1,5 | – 4

x = – 2,5

- Löse die folgenden Gleichungen. Schreibe so wie es oben dargestellt wird.

6 · x – 10 = 8 | + 10

_______ = ___ | ____

_______ = ___ | ____

(x – 13) : 5 = 4 | ____

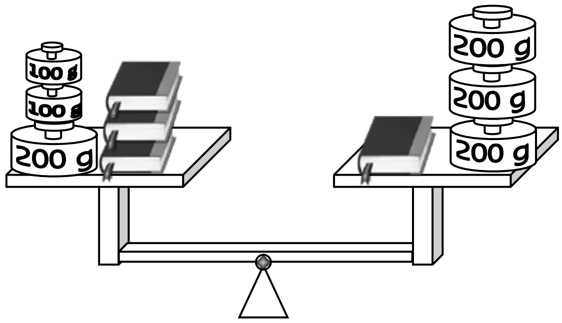
_________ = ____ | ____

_________ = ____ | ____

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der Gleichungen
Lösen von Gleichungen

Bestimmen der Lösungsmengen von Gleichungen durch Äquivalenzumformungen (Waage) | **37**



Zu diesem Bild wurde eine Gleichung aufgestellt. x steht für die Masse eines Buches.
Ergänze die Lösungsschritte.

$400 + 3x = 600 + x \quad |-x$

$400 + 3x - x = 600 + x - x$

$400 + 2x = 600 \quad |$ ____________

____

$2x = 200 \quad |$ ____________

____

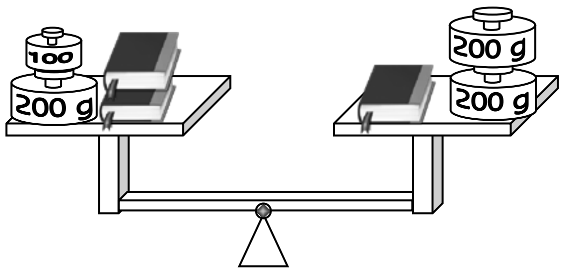
x = __________

Bild 27: „3 Bücherwaagen", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der Gleichungen
Lösen von Gleichungen

Bestimmen der Lösungsmengen von Gleichungen durch Äquivalenzumformungen (Waage) | **38**



Mario hat zu der Abbildung eine Gleichung aufgestellt und angefangen, sie zu lösen.

- Hilf ihm, indem du die leeren Felder passend ausfüllst.

Schritt 1: **300 + 2x = x + 400 |** ______________

300 + 2x ________ = ___________________________

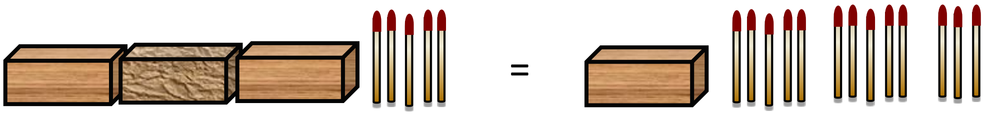
Schritt 2: 300 + x = 400 | ______________

____

Schritt 3: x = ______________

Bild 28: „3 Bücherwaage", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Ergänzen von Äquivalenzumformungsschritten (Streichhölzer) **39**



Hugo löst die obige Gleichung mithilfe von Äquivalenzumformungen.

- Ergänze jeweils die Äquivalenzumformung und beschreibe anhand der Schachteln und Hölzer, was in jedem Schritt gemacht wird:

$$3x + 5 = x + 13 \quad | \ \_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$2x + 5 = 13 \quad | \ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$2x = 8 \quad | \ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

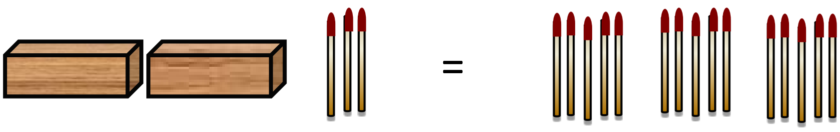
$$x = 4$$

Bild 29: „Streichhölzer", M.Reblin für LISUM, CC-BY-SA 4.0

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Bestimmen der Lösungsmenge von Gleichungen durch Äquivalenzumformungen **40**

Das Bild beschreibt eine Gleichung. Die Anzahl der Hölzer in einer Schachtel ist unbekannt. Jede Schachtel enthält die gleiche Anzahl Hölzer.



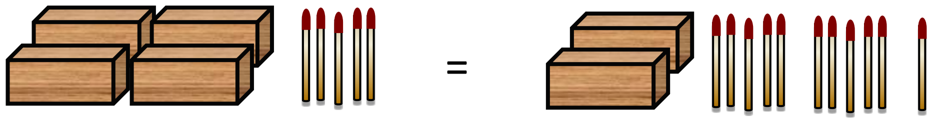
- Schreibe die passende Gleichung auf.
- Löse die Gleichung in mehreren Schritten.
  Du kannst die Lösungsschritte auch zeichnen.

Bild 30: „Streichhölzer", M.Reblin für LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der Gleichungen
Lösen von Gleichungen

Bestimmen der Lösungsmenge von Gleichungen durch Äquivalenzumformungen | **41**



Luisa löst die oben dargestellte Gleichung mithilfe von Äquivalenzumformungen.

- Ergänze.

$4x + 5 = 2x + 11 \qquad |-2x$

__________________ | __________

___________________ | __________

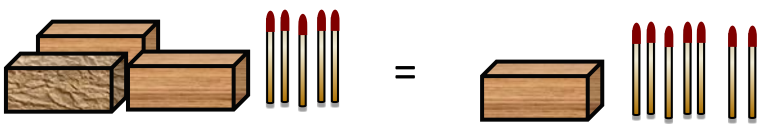
x = ________

Bild 31: „Streichhölzer“, M.Reblin für LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der Gleichungen
Lösen von Gleichungen

Bestimmen der Lösungsmengen von Gleichungen durch Äquivalenzumformungen | **42**



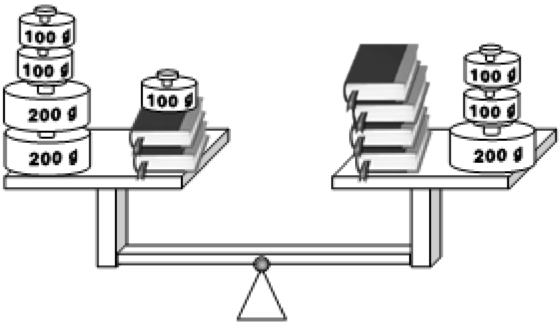
Tom hat zu obiger Situation folgende Gleichung aufgestellt:

$$3x + 5 = x + 7$$

- Bestimme mithilfe von Äquivalenzumformungen die Anzahl der Streichhölzer in jeder Schachtel.

Bild 32: „Streichhölzer“, M.Reblin für LISUM, CC-BY-SA 4.0

Vergleichen von Lösungswegen mit unterschiedlichen Umformungsschritten (Waage) — 43



Svenja und Jakob haben jeweils eine Gleichung zu der obigen Situation aufgestellt.

Svenja rechnet:		***Jakob rechnet:***	
$700 + 2\cdot x = 4\cdot x + 400$	$\mid -400$	$700 + 2\cdot x = 4\cdot x + 400$	$\mid :2$
$300 + 2\cdot x = 4\cdot x$	$\mid -2\cdot x$	$350 + x = 2\cdot x + 200$	$\mid -200$
$300 = 2\cdot x$	$\mid :2$	$150 + x = 2\cdot x$	$\mid -x$
$\underline{\underline{150 = x}}$		$\underline{\underline{150 = x}}$	

- Erkläre beide Lösungswege am Waagebild.
- Wie hättest du gerechnet? Begründe.

Bild 33: „3 Bücherwaage“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Bestimmen der Lösungsmengen von Gleichungen durch Äquivalenzumformungen (Spielzeug) — 44

Florentine darf sich von ihrem Taschengeld Spielzeugtiere kaufen. Sie bezahlt 66 €.
Jedes Tier kostet 8 €. Der Stall für die Tiere kostet 10 €.
In der Gleichung $\mathbf{66 = 8 \cdot x + 10}$ steht x für die Anzahl der gekauften Tiere.

- Berechne mithilfe von Äquivalenzumformungen die Anzahl der Tiere, die Florentine gekauft hat.

Bild 34: „Spielzeugtiere 2“,M.Reblin für LISUM, CC-BY-SA 4.0

Bestimmen der Lösungsmenge einer Gleichung durch Äquivalenzumformungen | **45**

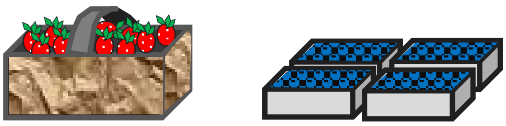
Paul verkauft auf dem Trödelmarkt seine Spielzeugtiere. Jedes Tier verkauft er für 3 €.
Die Miete für den Verkaufsstand beträgt 15 € für den ganzen Tag.
Paul stellt eine Rechnung auf, wie die Anzahl der verkauften Tiere (x) und der Gewinn (G) zusammenhängen.

$$G = 3 \cdot x - 15 \quad |+15$$
$$G + 15 = 3 \cdot x \quad |:3$$
$$G + 5 = x$$

- Erkläre, welchen Fehler Paul gemacht hat. Gib die richtige Lösung an.

Bild 35: „Spielzeugtiere 3“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Bestimmen von mehrelementigen Lösungsmengen von Gleichungen (Fruchtkörbe) | **46**



In einem Korb befinden sich Erdbeeren und in vier gleich schweren Körben befinden sich Blaubeeren. Zusammen wiegt der Inhalt der Körbe 20 kg.

Die Gleichung dazu lautet: **$x + 4y = 20$**

Angenommen, im Korb sind 8 kg Erdbeeren. Die zugehörige Gleichung lautet dann: $8 + 4 \cdot y = 20$.

- Löse diese Gleichung. Ergänze den Antwortsatz:

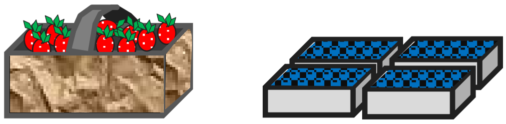
  Wenn ein Erdbeerkorb 8 kg wiegt, dann muss ein Heidelbeerkorb ________ wiegen.

Angenommen ein Korb Erdbeeren wiegt 4 kg.

- Stelle die passende Gleichung auf und löse sie.
  Formuliere einen Antwortsatz.
- Finde mindestens eine weitere Lösung.

Bild 36: „Obstkörbe“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Bestimmen von mehrelementigen Lösungsmengen von Gleichungen (Fruchtkörbe) — 47



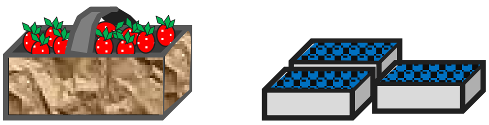
In einem Korb befinden sich Erdbeeren und in vier gleich schweren Körben befinden sich Blaubeeren.
Zusammen wiegt der Inhalt der Körbe 24 kg. Die Gleichung dazu lautet: $\mathbf{x + 4 \cdot y = 24}$

a) Die Erdbeeren wiegen 9 kg. Finde heraus, wie viel ein Korb Blaubeeren wiegt, indem du die Gleichung mithilfe von Äquivalenzumformungen löst.

b) Ein Korb Blaubeeren wiegt 3 kg. Finde heraus, wie viel dann der Korb mit Erdbeeren wiegt, indem du die zugehörige Gleichung mithilfe von Äquivalenzumformungen löst.

Bild 37: „Obstkörbe", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Bestimmen der Lösungsmengen von Gleichungssystemen durch systematisches Probieren — 48



Jolene kauft einen Korb Erdbeeren und einen Korb Blaubeeren. Sie bezahlt 11 €.
Minh Anh kauft drei Körbe Erdbeeren und nur einen Korb Blaubeeren. Sie bezahlt 25 €.
Das zugehörige Gleichungssystem lautet:

I. $e + b = 11$
II. $3e + b = 25$

1. Finde heraus, wie viel ein einzelner Korb Erdbeeren und ein einzelner Korb Blaubeeren kosten.

   Finde hierzu verschiedene Wertepaare (e , b) , die für Gleichung I. eine Lösung sind (✓).

   Prüfe dann jeweils, ob dieses Wertepaar auch eine Lösung für Gleichung II. ist.

   Beispiel: e = 1 und b = 10 löst I. (✓), aber nicht II. (–).

   Ergänze die folgende Tabelle:

e	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b	10								
löst I.	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
löst II.	–								

   Erkläre, woran du in der ausgefüllten Tabelle das richtige Wertepaar erkennst.

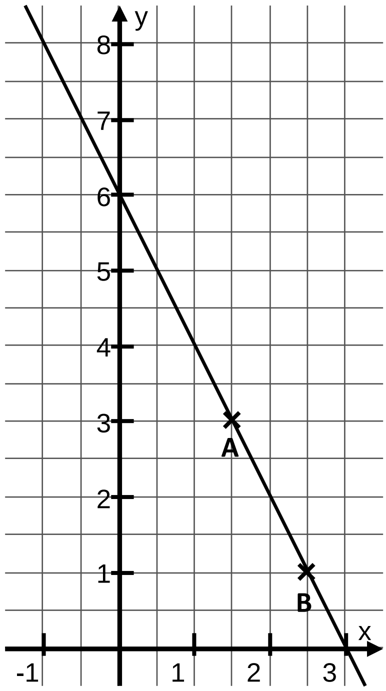
Bild 38: „Obstkörbe", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Grafisches Lösen von Gleichungen mit zwei Variablen

Elisabeth hat die Lösungsmenge der Gleichung
$y = 6 - 2x$ graphisch dargestellt.

Alle Punkte P(x|y) auf dieser Geraden sind Teil der Lösungsmenge.

So ist Punkt A (1,5|3) eine mögliche Lösung für die Gleichung.



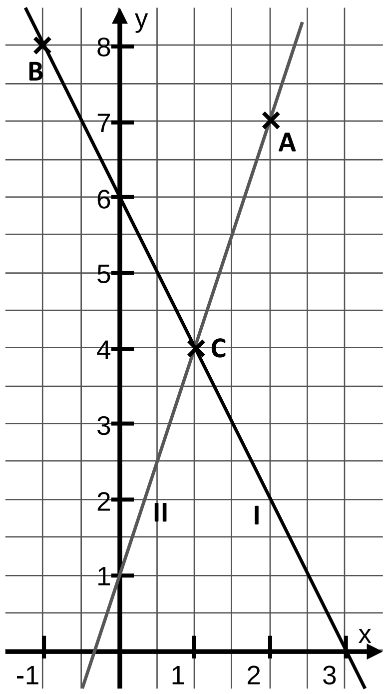
- Prüfe durch Einsetzen in die Gleichung, ob das Zahlenpaar $x = 1{,}5$ und $y = 3$ eine Lösung ist.
- Gib die Koordinaten des Punktes B an und begründe, weshalb B ebenfalls eine Lösung der Gleichung ist.
- Gib weitere Lösungen der Gleichung an. Markiere sie auf der Geraden.

Erkennen des Schnittpunktes zweier Geraden als Lösung eines Gleichungssystems

Olaf hat die Lösungsmengen der Gleichungen

I. $y = 6 - 2x$ und

II. $y - 3x = 1$ grafisch dargestellt.



- Gib die Koordinaten (x|y) der Punkte A und B an. Zeige durch Einsetzen, dass die Koordinaten dieser Punkte Lösung jeweils einer Gleichung sind.
- Gib die Koordinaten des Punktes C an. Zeige durch Einsetzen der Koordinaten, dass dieser Punkt Lösung beider Gleichungen ist.

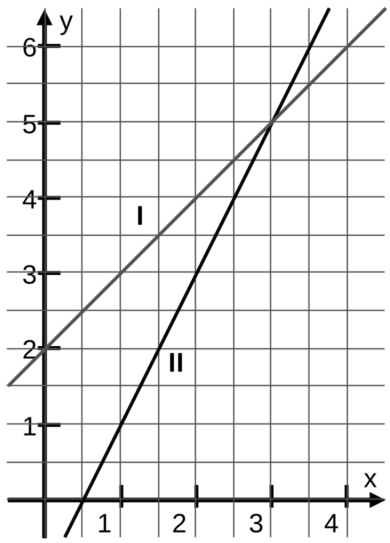
Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der Gleichungen
Lösen von Gleichungen

Erkennen des Schnittpunktes zweier Geraden als Lösung eines Gleichungssystems **51**

Sven hat das folgende Gleichungssystem grafisch dargestellt:

I. $y - x = 2$
II. $y = 2x - 1$



Es gibt einen Punkt, der auf beiden Geraden liegt.

- Gib die Koordinaten dieses Punktes an.
- Erkläre die Bedeutung der Koordinaten dieses Punktes für das Gleichungssystem.
- Weise die Bedeutung durch Rechnung nach.

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

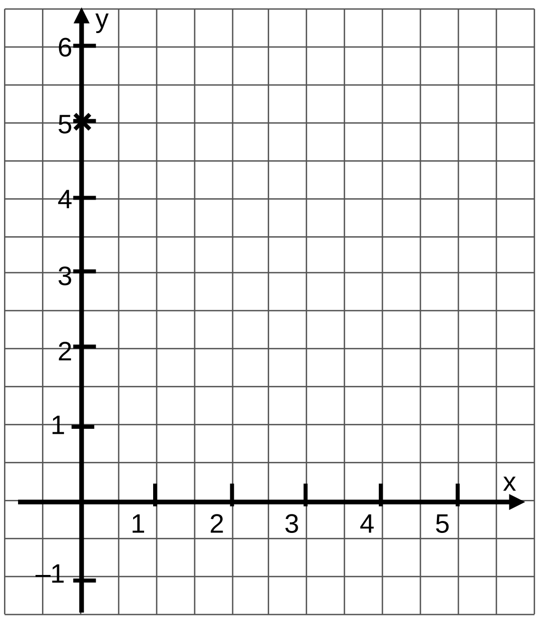
Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der Gleichungen
Lösen von Gleichungen

Grafisches Lösen von Gleichungssystemen **52**

Die Lösung eines linearen Gleichungssystems lässt sich bestimmen, indem man zu jeder Gleichung eine Gerade zeichnet und deren Schnittpunkt abliest.

Um eine Gerade eindeutig zeichnen zu können, benötigt man zwei Punkte.
Diese kann man z. B. mithilfe einer kleinen Wertetabelle bestimmen.



Das folgende Gleichungssystem soll gelöst werden:

I $y + x = 5$
II $y = 2x - 1$

I

x	0	4
y	5	

II

x		
y		

- Fülle die Wertetabellen aus und übertrage die Punkte ins Koordinatensystem.
- Zeichne zu jeder Gleichung eine Gerade.
- Ermittle mithilfe der graphischen Darstellung die Lösung (x|y) des Gleichungssystems.

Grafisches Lösen von Gleichungssystemen **53**

Gegeben sind 3 Gleichungssysteme (A, B und C).

A I $y = 0{,}5x + 1$	**B** I $y = 2x - 1$	**C** I $y = 0{,}5x + 1$
II $x = y + 1$	II $y - x = 3$	II $y + x = 4$

Zwei dieser Gleichungssysteme sind in den folgenden Abbildungen dargestellt.

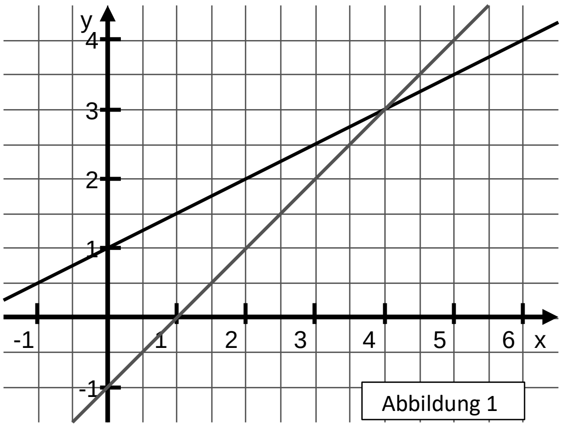


Abbildung 1

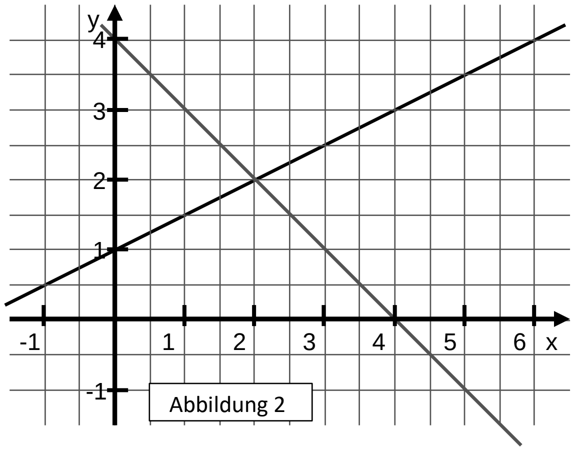
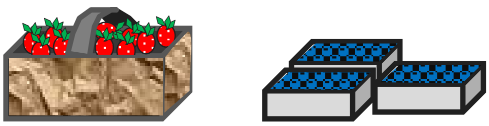


Abbildung 2

- Ordne den Abbildungen jeweils ein Gleichungssystem zu.
- Gib die Lösung dieser beiden Gleichungssysteme an.
- Stelle das dritte Gleichungssystem grafisch dar und lies dessen Lösung ab.

Bestimmen der Lösungsmengen von Gleichungssystemen mit dem Einsetzungsverfahren **54**



Jolene kauft einen Korb Erdbeeren und einen Korb Blaubeeren. Sie bezahlt 11 €.
Minh Anh kauft drei Körbe Erdbeeren und nur einen Korb Blaubeeren. Sie bezahlt 25 €.
Das zugehörige Gleichungssystem lautet:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & e + b = 11 \\ \text{II.} & 3e + b = 25 \end{array}$$

Jolene möchte das rechnerisch lösen.

Sie stellt die erste Gleichung nach **e** um: **e** = **11 – b**

Nun setzt sie statt e den Term 11 – b in die zweite Gleichung ein: $3 \cdot (\mathbf{11 - b}) + b = 25$.

- Begründe, weshalb Jolene statt **e** den Term **11 – b** in die zweite Gleichung einsetzen darf.
- Erkläre den Vorteil, den die neue Gleichung $3 \cdot (\mathbf{11 - b}) + b = 25$ bietet.
- Löse die neue Gleichung.
- Berechne dann auch e.

Dieses Vorgehen nennt man **Einsetzungsverfahren**.

Bild 38: „Obstkörbe“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der Gleichungen
Lösen von Gleichungen

Sortieren von Lösungsschritten zur Bestimmung der Lösungsmenge von Gleichungssystemen — 55

Eine Möglichkeit, ein Gleichungssystem rechnerisch zu lösen, bietet das **Einsetzungsverfahren**.

Das folgende Gleichungssystem soll gelöst werden. Dabei ist e die Masse eines Erdbeerkorbes und b die Masse eines Blaubeerkorbs (in Gramm).

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & e + 3b = 1100 \\ \text{II.} & 3e + b = 1700 \end{array}$$

- Binge die Lösungsschritte zum Lösen des Gleichungssystems mit Hilfe des Einsetzungsverfahrens in die richtige Reihenfolge:

Antwortsatz schreiben:
Ein Korb Erdbeeren wiegt 500 g und ein Korb Blaubeeren 200 g.

b bestimmen:
b = **200**

I. nach e umstellen:
e = 1100 – 3 · b

Klammern auflösen:
3300 – 9 · b + b = 1700

e in II. einsetzen:
3 · (1100 – 3 · b) + b = 1700

b in I. einsetzen:
e = 1100 – 3 · 200 = **500**

Umstellen und zusammenfassen:
1600 = 8 · b

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der Gleichungen
Lösen von Gleichungen

Bestimmen der Lösungsmenge eines Gleichungssystems mit dem Einsetzungsverfahren — 56

Abdullah und Josi durften sich im Schwimmbad Schoko-Lollys und Brausebrocken kaufen.
Abdullah kauft einen Schoko-Lolly und 5 Brausebrocken für 3,20 €.
Josi besorgt sich 3 Schoko-Lollys und 2 Brausebrocken und bezahlt 3,10 €.
Das zugehörige Gleichungssystem lautet:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & s + 5b = 3{,}20 \\ \text{II.} & 3s + 2b = 3{,}10 \end{array}$$

Bestimme den Preis für einen einzelnen Schoko-Lolly und einen einzelnen Brausebrocken, indem du die Lücken bei folgendem Lösungsweg ergänzt:

Schritt 1: Gleichung I nach s umstellen: s = 3,20 – ____________

Schritt 2: Die Lösung für s in Gleichung II. einsetzen: 3 · (___________________) + 2 · b = 3,10

Schritt 3: Ausmultiplizieren: 3 · __________ – 3 · 5 · b + 2 · b = 3,10

Schritt 4: Zusammenfassen: ________________________=_____________________ |– 9,60

________________________=_____________________ |:___________

Damit ist b = _____________.

Schritt 5: b in die nach s umgestellte Gleichung einsetzen: s = 3,20 – ____________=__________.

Erstellen einer Lösungsstrategie zur Überprüfung des Wahrheitsgehalts einer Lösung **57**

Gegeben ist die Gleichung **2x + 3 = x + 15**.
Paula erhält die Lösung: **x = 12**

Tim möchte das Ergebnis überprüfen.

- Erkläre sein Vorgehen. Bringe dafür die Satzbausteine in die richtige Reihenfolge.

Vergleiche die Werte beider Seiten.

Setze statt x den Wert 12 in die Gleichung ein.

Somit ist x = 12 richtig.

Berechne die Werte auf beiden Seiten der Gleichung.

27 = 27 ist eine wahre Aussage.

Ziehen von Schlussfolgerungen aus der Lösung einer Gleichung **58**

Juri löst eine Gleichung und erhält x = 12 als Ergebnis.

Er führt eine Probe durch und erhält 17 = –17.

- Entscheide, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuze an.

	wahr	falsch
Juris Lösung ist richtig, da der Betrag beider Zahlen gleich ist.	☐	☐
Juris Lösung ist falsch, da 12 = 12 herauskommen muss.	☐	☐
Juris Lösung ist falsch, da 17 = –17 eine falsche Aussage ist.	☐	☐

Überprüfen von Wertepaaren als Lösung einer Gleichung **59**

Es wird geprüft, ob die Wertepaare (–20|40) und (10|20) Lösungen der Gleichung **2x + 3y = 80** sind.

- Ergänze die Tabelle.

Überprüfen des Wertepaars (–20|40)	**Überprüfen des Wertepaars (10|20)**
Für x wird –20 eingesetzt und für y wird 40 eingesetzt. Dann ergibt sich die Gleichung 2 · (–20) + 3 · (40) = 80.	Für x wird ____ eingesetzt und für y wird ____ eingesetzt. Dann ergibt sich die Gleichung ______________ = ________________
Anschließend werden die Werte auf beiden Seiten berechnet. Es ergibt sich die Gleichung 80 = 80.	Anschließend werden die Werte auf beiden Seiten berechnet. Es ergibt sich die Gleichung _______ = _______
Da 80 = 80 eine wahre Aussage ist, gehört (–20|40) zur Lösungsmenge der gegebenen Gleichung.	Da _____ = ______ eine _______ Aussage ist, gehört (10|20) ___________________ zur Lösungsmenge der gegebenen Gleichung.

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der Gleichungen
Validieren und Interpretieren von Lösungen

Überprüfen von Wertepaaren anhand der grafischen Darstellung einer Gleichung **60**

- Prüfe, ob das Wertepaar (4|3) eine mögliche Lösung der Gleichung ist.

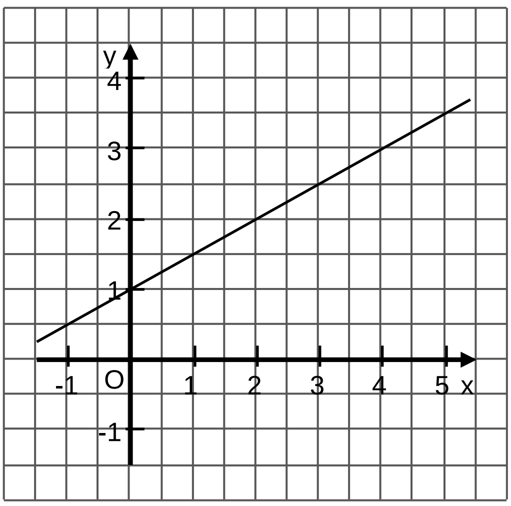
  ____
  ____

- Begründe, dass das Wertepaar (1|2) nicht zur Lösungsmenge der Gleichung gehört.

  ____
  ____

- Begründe mithilfe der Abbildung, dass die dazugehörende Gleichung unendlich viele Lösungen besitzt.

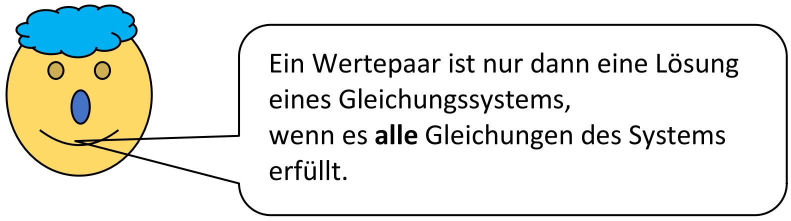
  ____



Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Überprüfen eines Wertepaars als Lösung eines Gleichungssystems

61



Marie löst das folgende Gleichungssystem:

I. $3x - 2y = 8$
II. $x - 4y = 12$

Als Lösung erhält sie das Wertepaar (4|2).
Sie überprüft ihr Ergebnis:

- Ergänze.

  I. 3 · ____ – 2 · _____ = _______

- Setze die Probe fort und entscheide, ob Maries Lösung richtig ist.

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der Gleichungen
Validieren und Interpretieren von Lösungen

Ziehen von Schlussfolgerungen aus der Lösung eines Gleichungssystems

62

Jonas, Marie und Joana lösen alle dasselbe Gleichungssystem mit zwei Gleichungen.
Sie erhalten als Lösung jedoch unterschiedliche Wertepaare.

Zur Kontrolle setzen sie die Zahlen ihrer Wertepaare in beide Gleichungen ein.
Dabei erhalten sie folgende Aussagen.

Jonas	**Marie**	**Joana**
5 = 1	1 = 1	1 = 1
26 = 29	25 = 29	29 = 29

- Entscheide, wessen Wertepaar das Gleichungssystem erfüllt.
  Begründe deine Entscheidung.

Deuten der Ergebnisse einer Probe eines Gleichungssystems — 63

Betrachtet wird das folgendes Gleichungssystem:

I. $2x - y = 1$

II. $7x + 5y = 29$

Jonas führt für sein ermitteltes Wertepaar eine Probe durch.
Er erhält für die erste Gleichung am Ende die Aussage $7 = 1$.

- Erkläre, weshalb Jonas an dieser Stelle schon mit der Probe aufhören kann.

Durchführen einer Probe bei einer quadratischen Gleichung — 64

Betrachtet wird die Gleichung $0 = -0{,}05 \cdot (x - 4)^2 + 3{,}2$.

Tanja ermittelt $x = 12$ als mögliche Lösung.

Sie überprüft ihr Ergebnis: $0 = -0{,}05 \cdot (\_\_\_\_ - 4)^2 + 3{,}2$

$0 = \_\_\_\_\_\_\_$

- Überprüfe durch Einsetzen in die Gleichung, ob Tanjas Ergebnis richtig ist.
- Prüfe, ob $x = -4$ eine Lösung ist.
- Könnte es weitere Lösungen geben? Begründe.

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

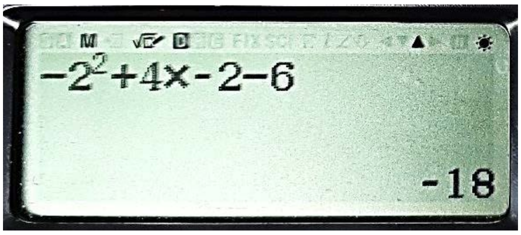
Idee der Gleichungen
Validieren und Interpretieren von Lösungen

Nutzen des Taschenrechners zur Probe bei quadratischen Gleichungen **65**

Betrachtet wird die Gleichung $0 = x^2 - x - 6$.

Tim ermittelt $x = -2$ und $x = 3$ als Lösungen.

Er führt die Probe aus und tippt in den Taschenrechner ein:



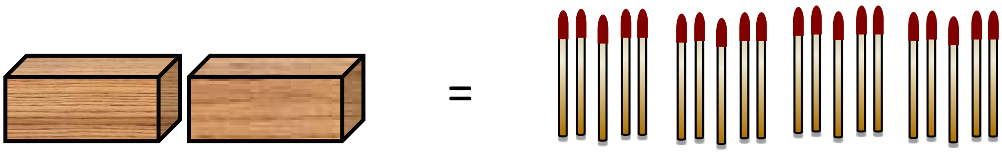
- Erkläre, welchen Fehler Tim gemacht hat.
- Erkläre Tim, wie er die Probe richtig in den Taschenrechner eingibt.
- Führe selbst die Probe für $x = -2$ und $x = 3$ durch.

Bild 39: „Taschenrechner“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der Gleichungen
Validieren und Interpretieren von Lösungen

Überprüfen des Wahrheitsgehalts einer Lösung im Sachzusammenhang (Streichhölzer) **66**



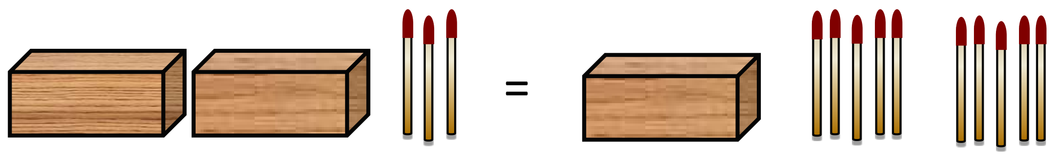
In jeder der beiden Schachteln befindet sich die gleiche Anzahl an Streichhölzern.

Tim hat berechnet, dass in jeder Schachtel 10 Streichhölzer sind.

- Hat er recht? Begünde mithilfe des Bildes.

Bild 40: „Streichhölzer“, M.Reblin für LISUM, CC-BY-SA 4.0

Erläutern der Lösung einer Probe im Sachzusammenhang (Streichhölzer) — **67**



In jeder Schachtel befindet sich die gleiche Anzahl an Streichhölzern.
Jasmin vermutet, dass in jeder Schachtel 7 Streichhölzer sein müssen.

Sie überprüft ihre Lösung mit folgender Gleichung:

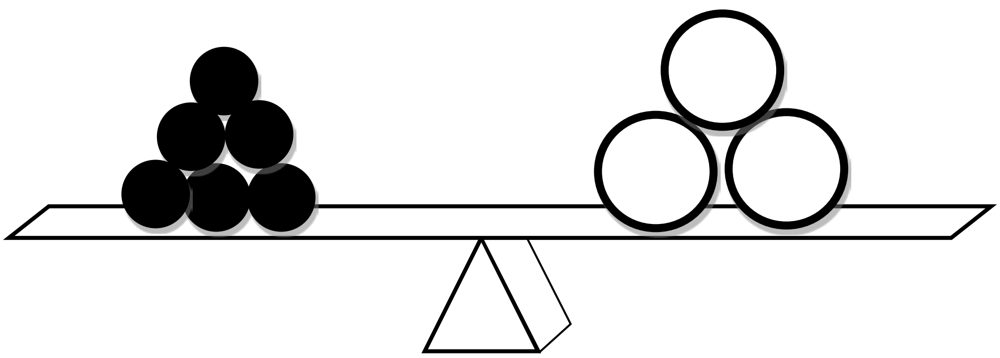
$$\mathbf{2 \cdot 7 + 3 = 7 + 10}$$
$$\mathbf{17 = 17}$$

- Erkläre, woran sie erkennt, dass ihre Vermutung richtig ist.
- Erkläre die Bedeutung der Zahl 17 in diesem Sachzusammenhang.

Bild 41: „Streichhölzer“, M.Reblin für LISUM, CC-BY-SA 4.0

Begründen einer möglichen Lösung einer Gleichung mit zwei Variablen (Waagemodell) — **68**

Eine Waage ist im Gleichgewicht, wenn auf jeder Seite die gleiche Masse liegt.

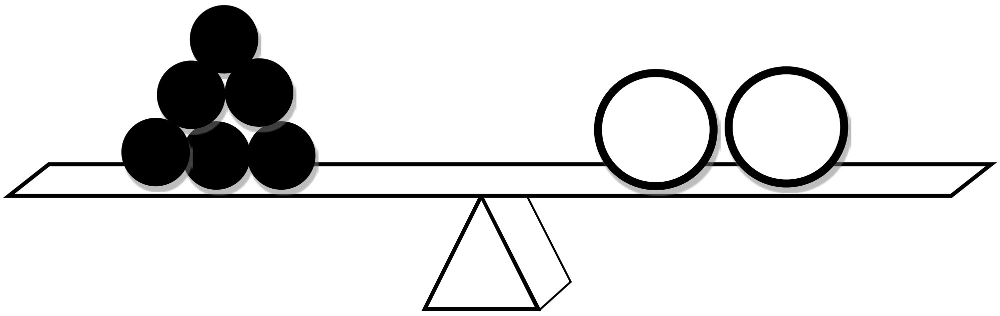


Fatima behauptet: „Jede schwarze Kugel wiegt 1 kg und jede weiße Kugel wiegt 2 kg.“

- Begründe, dass dies eine mögliche Lösung ist.

Bild 42: „Waage“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Begründen mehrerer Lösungen einer Gleichung mit zwei Variablen (Waagemodell) **69**



6 schwarze Kugeln wiegen genauso viel wie zwei weiße Kugeln.

- Überlege, welche Aussagen wahr sein können.
  Begründe deine Entscheidungen.

	Wahr	Falsch
Jede schwarze Kugel wiegt 1 kg und jede weiße Kugel wiegt 3 kg.	☐	☐
Jede schwarze Kugel wiegt 3 kg und jede weiße Kugel wiegt 1 kg.	☐	☐
Jede weiße Kugel wiegt 12 kg und jede schwarze Kugel wiegt 4 kg.	☐	☐
Jede weiße Kugel wiegt 10 kg und jede schwarze Kugel wiegt 4 kg.	☐	☐

Bild 43: „Waage“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Überprüfen der Lösung im Sachzusammenhang ohne Rechnung (Futtermittelvorrat) **70**

Der Futtermittelvorrat für eine Herde mit 12 Kühen reicht für 20 Tage.

Toni möchte berechnen, wie lange der gleiche Futtermittelvorrat für 24 Kühe reichen würde.
Toni kommt zu dem Ergebnis:
„Der Vorrat reicht dann 40 Tage.“

- Erkläre Toni ohne zu rechnen, ob sein Ergebnis stimmen kann.

Bild 44: “Kuh“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Ziehen von Schlussfolgerungen aus einer Lösung im Sachzusammenhang

71

Auf einem Grundstück liegt ein 21 m³ großer Schutthaufen.
Dieser soll vollständig abtransportiert werden.
Ein dafür bestellter Lkw hat ein Ladungsvermögen von 6,5 m³.

Karl rechnet: $21\ \text{m}^3 : 6{,}5\ \text{m}^3 \approx 3{,}23$

- Erkläre die Bedeutung der Zahl 3,23 in diesem Zusammenhang.
- Welche Schlussfolgerung sollte Karl aus seinem Ergebnis ziehen?

Bild 45: "LKW", LISUM, CC-BY-SA 4.0

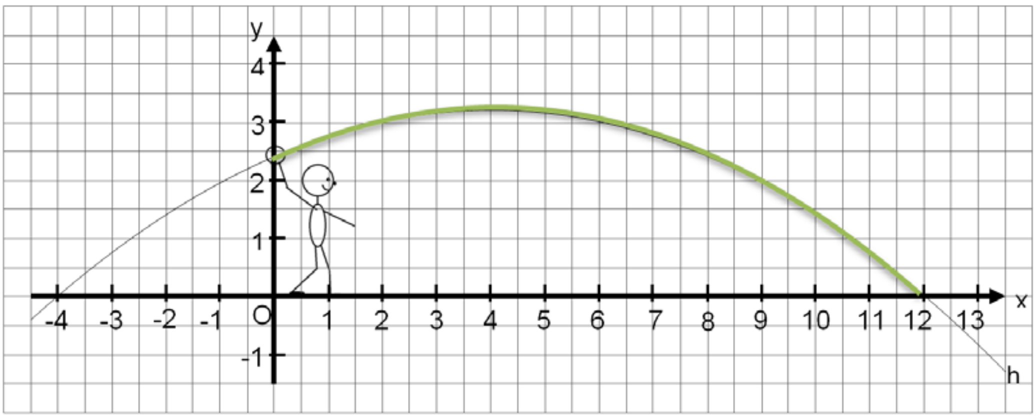
Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der Gleichungen
Validieren und Interpretieren von Lösungen

Auswählen der zum Sachkontext passenden Lösung bei einer quadratischen Gleichung

72



Die **Flugbahn** eines Balls wird durch die Gleichung h: $y = -0{,}05 \cdot (x-4)^2 + 3{,}2$ beschrieben.

Um die Flugweite zu berechnen, wurde die Gleichung $0 = -0{,}05 \cdot (x-4)^2 + 3{,}2$ gelöst.

Dabei ergaben sich $x = -4$ und $x = 12$ als Lösungen.

- Entscheide, welche Lösung zum Sachverhalt passt. Begründe deine Entscheidung.

Bild 46: „Flugbahn",C.Riehn LISUM, CC-BY-SA 4.0

Darum geht es

Die Idee der funktionalen Zusammenhänge baut auf drei Grundvorstellungen auf: der **Zuordnungsvorstellung**, der **Veränderungsvorstellung** (Kovariationsvorstellung) und der **Objektvorstellung**.

Bei der **Zuordnungsvorstellung** geht es zunächst um das Erkennen, dass eine Größe einer anderen Größe zugeordnet wird. Dazu werden sprachlich formulierte, tabellarische, symbolische oder grafische Darstellungen genutzt. Dabei führt die Frage nach der Eindeutigkeit dieser Zuordnung zum Begriff der Funktion. Konkrete Fragen und der Wechsel in der Darstellung helfen, Eigenschaften und Strukturen der Zuordnung – also die Art der Abhängigkeit – zu erfassen. Bei der Zuordnungsvorstellung werden einzelne Wertepaare betrachtet.

Bei der **Veränderungsvorstellung** ist die zentrale Frage: „Wie wirkt sich die Änderung der einen Größe auf die andere Größe aus?“ Anfangs wird die Abhängigkeit mit Worten beschrieben oder durch die Betrachtung der Wertepaare formuliert. Später kann die gemeinsame Veränderung der abhängigen Größen auch aus Gleichungen oder grafischen Darstellungen erfasst werden.

Bei der **Objektvorstellung** wird die Funktion als Ganzes erfasst. Dabei werden nicht mehr nur einzelne Wertepaare betrachtet. Hier steht die Funktion im Ganzen (also die Menge aller Wertepaare) mit bestimmten Eigenschaften im Vordergrund. Das Erkennen solcher Eigenschaften erlaubt es, Funktionstypen zu klassifizieren.

Nicht immer spielen alle drei Grundvorstellungen gleichzeitig eine Rolle, aber sie greifen ineinander. Durch gezielte Aufgabenstellungen kann der Schwerpunkt auf eine bestimmte Grundvorstellung gelegt werden.

Der funktionale Zusammenhang kann durch verschiedene Darstellungsformen sichtbar gemacht werden.

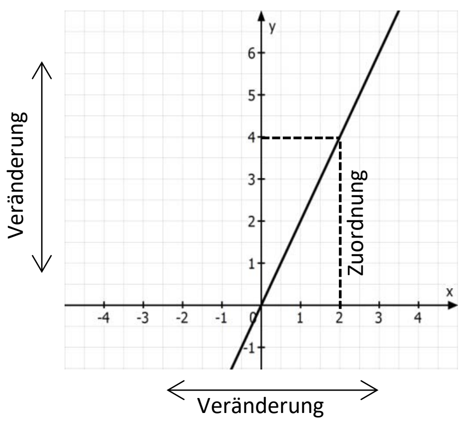
- **Wortvorschrift**: Jeder reellen Zahl wird ihr Doppeltes zugeordnet.
- **Geordnete Wertepaare**: (3|6); (6|12)
- **Wertetabelle**:

Veränderung

x	f(x)
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10

Zuordnung

- **Funktionsgraph**:



- **Funktionsgleichung**: $f(x) = 2 \cdot x$

Zuordnung

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

In der Grundschule werden funktionale Zusammenhänge zunächst in Sachzusammenhängen untersucht, beispielsweise die Abhängigkeit eines Preises von der Warenmenge, eines zurückgelegten Weges von der Zeit oder der Anzahl bestimmter Objekte von ihrer Masse. Die Schülerinnen und Schüler lernen dabei, Tabellen und Schaubilder anzufertigen, zu beschreiben und zu interpretieren. Hierbei steht der Zuordnungsaspekt im Vordergrund.

Vor der Thematisierung des Begriffs der Proportionalität spielen Zuordnungen eine Rolle. Dabei dürfen die sinnvollen „naiven“ Vorstellungen der Lernenden nicht vorschnell durch ein formales Vorgehen ersetzt werden.

In der Grundschule sollte eine ausschließliche Behandlung proportionaler Zuordnungen vermieden werden. Es sollten auch andere Zuordnungen (z. B. die Zuordnung von Seitenlängen zum Flächeninhalt bei Quadraten oder die Zuordnung Zeit – Temperatur) diskutiert werden.

Um ein tieferes Verständnis von funktionalen Zusammenhängen zu entwickeln, müssen die Schülerinnen und Schüler auch handelnd tätig werden. Als Beispiele eignen sich das Erfassen der Masse in Abhängigkeit von ihrer Anzahl oder die Messung des Weges in Abhängigkeit von der Zeit. Es kann auch auf Messreihen, die von den Lernenden im naturwissenschaftlichen Unterricht erstellt wurden, zurückgegriffen werden. Die gemessenen Werte werden zuerst in Tabellen und dann in ein Koordinatensystem eingetragen. Entsprechend der Problemstellung und in Abhängigkeit von der Jahrgangsstufe können die Zusammenhänge auch durch eine Gleichung erfasst werden.

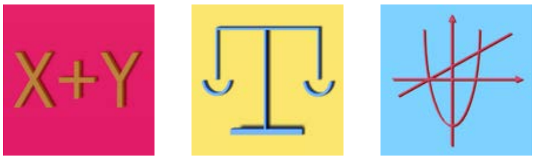
In der Sekundarstufe I erfolgt dann eine Formalisierung des Funktionsbegriffs. Die Zuordnungen von konkreten Größen aus dem Alltag (Massen, Preise usw.) werden nun durch Zuordnungen ohne Hintergrund in einer Sachsituation und die abstraktere Darstellung von Zuordnungen ergänzt. Funktionen werden als Ganzes betrachtet, durch Fachbegriffe (z. B. quadratische Funktion, Nullstellen …) und mit mathematischer Symbolik beschrieben. Auch wenn hier die Arbeit mit symbolischen und grafischen Darstellungen in den Vordergrund rückt, sollte der Zusammenhang von innermathematischen Fragestellungen zu konkreten Sachverhalten immer wieder hergestellt werden (Beispiel: Bedeutung des Scheitelpunkts oder der Nullstelle bei einer Wurfparabel).

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Förderaufgaben

Idee der Funktionen

Grundschule



Förderschritte zu den Diagnoseaufgaben

1. Erfassen von Bilderfolgen
2. Finden von Fehlern in einer Bilderfolge
3. Zuordnen von Beschreibungen zu Mustern
4. Legen eines Musters nach einer Beschreibung
5. Zeichnen eines Musters nach vorgegebener Beschreibung
6. Fortsetzen von Beschreibungen von Mustern
7. Herstellen einer Zahlenfolge passend zu einer Bilderfolge
8. Zeichnen einer Bilderfolge und Erstellen der passenden Zahlenfolge
9. Zeichnen einer Bilderfolge und Zuordnen passender Terme
10. Ergänzen einer Bilderfolge und Erstellen passender Terme
11. Entwickeln passender Terme in verkürzter Schreibweise
12. Überprüfen von Beschreibungen einer Zahlenfolge
13. Beschreiben einer Zahlenfolge mit Worten
14. Beschreiben einer komplexeren Zahlenfolge mit Worten
15. Herstellen von Zuordnungen
16. Auswählen einer passenden Beschreibung für Zuordnungen mit Pfeilbildern
17. Beschreiben einer als Pfeilbild dargestellten Zuordnung
18. Entnehmen von Informationen aus einer Wertetabelle
19. Einordnen von Informationen in eine Wertetabelle
20. Ergänzen von Wertetabellen zu proportionalen Zuordnungen
21. Entnehmen von Informationen aus einer grafischen Darstellung
22. Ergänzen einer Wertetabelle durch Ablesen der Werte im Koordinatensystem
23. Zuordnen der passenden Beschreibung zu einem Graphen
24. Darstellen von Zuordnungen
25. Überprüfen der Darstellung einer Zuordnung
26. Überprüfen und Korrigieren der Darstellung einer Zuordnung
27. Darstellen einer Zuordnung als geordnetes Zahlenpaar
28. Überprüfen von Darstellungen geordneter Zahlenpaare
29. Übertragen von geordneten Zahlenpaaren in eine Wertetabelle
30. Überprüfen einer Zuordnung und Eintragen in eine Wertetabelle
31. Darstellen von geordneten Zahlenpaaren als Punkte im Koordinatensystem
32. Überprüfen und Berichtigen der Koordinaten von Punkten im Koordinatensystem
33. Darstellen von Zuordnungen im vorgegebenen Koordinatensystem
34. Finden von Fehlern bei der Darstellung von Zuordnungen im Koordinatensystem
35. Erfassen der Formulierung „pro Portion“
36. Erkennen der „Portion“ und Ergänzen der Wertetabelle
37. Erkennen des Proportionalitätsfaktors
38. Bestimmen des Proportionalitätsfaktors

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

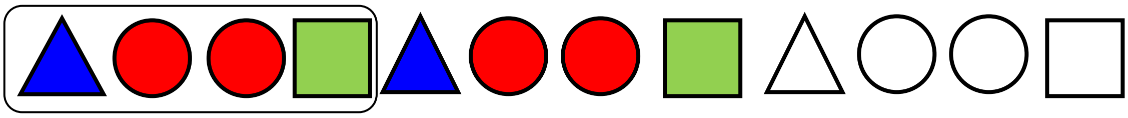
Erfassen von Bilderfolgen **1**

Hier siehst du verschiedene Formen.

Zusammen ergeben sie ein Muster.

In der Reihe wurde das Muster mehrmals hintereinander gezeichnet.

Muster



- Male die letzten Formen passend aus.

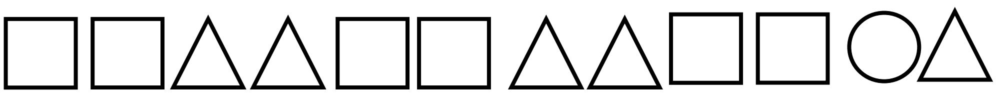
Finden von Fehlern in einer Bilderfolge **2**

Elia hat mehrmals hintereinander das gleiche Muster gezeichnet.

- Umkreise das Muster in der Reihe.

An einer Stelle hat sie einen Fehler gemacht.

- Finde den Fehler und markiere ihn.



Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Zuordnungsvorstellung

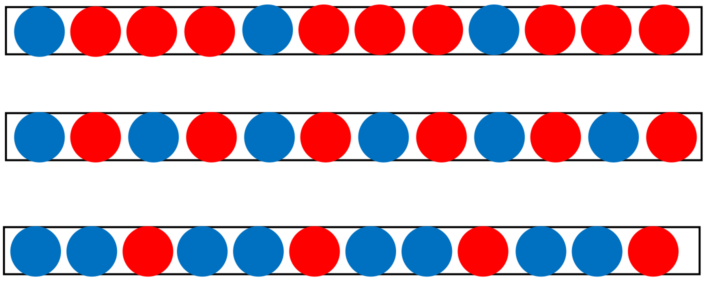
Zuordnen von Beschreibungen zu Mustern | **3**

Lena, Theo und Mustafa haben Muster gelegt und beschrieben.

- Finde zu jeder Beschreibung das passende Muster.

Ein blaues Plättchen, dann ein rotes Plättchen und immer so weiter …

Lena



Ein blaues Plättchen, dann drei rotes Plättchen und immer so weiter…

Theo

Immer zwei blaue Plättchen, dann ein rotes Plättchen …

Mustafa

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Zuordnungsvorstellung

Legen eines Musters nach einer Beschreibung | **4**

Material: *rote und blaue Plättchen*

Lege 2 rote Plättchen, ein blaues Plättchen, 2 rote Plättchen, ein blaues Plättchen.

- Zeige das Muster, das sich immer wiederholt.

- Beschreibe das Muster.

  Ergänze: „Immer ____________________, ______________________"

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Zuordnungsvorstellung

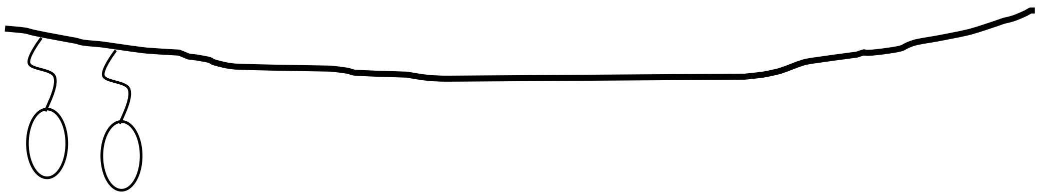
Zeichnen eines Musters nach vorgegebener Beschreibung | 5

An einer Leine hängen rote und blaue Luftballons in einem Muster, das sich immer wiederholt.

Zum Muster gehören 5 Luftballons.

Zuerst hängen 2 rote Luftballons, danach hängen 3 blaue Luftballons.

- Zeichne das Muster mindestens zweimal.

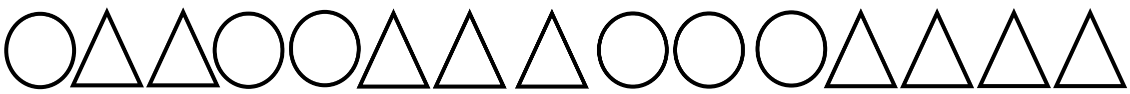


Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Zuordnungsvorstellung

Fortsetzen von Beschreibungen von Mustern | 6

Die Kreise und Dreiecke wurden nach einem bestimmten Muster gelegt.



Alina hat angefangen, das Muster zu beschreiben.

Sie sagt: *„Am Anfang liegen **ein Kreis** und **2 Dreiecke**. …“*

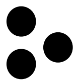
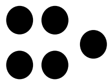
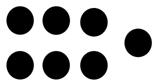
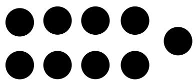
- Setze Tinas Beschreibung fort.

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Zuordnungsvorstellung

Herstellen einer Zahlenfolge passend zu einer Bilderfolge — **7**

Sergej hat eine Bilderfolge mit Plättchen gelegt.

	Bild
Bild 1	
Bild 2	
Bild 3	
Bild 4	

- Ergänze die Tabelle.

Bild	1	2	3	4
Anzahl der Plättchen				

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Zuordnungsvorstellung

Zeichnen einer Bilderfolge und Erstellen der passenden Zahlenfolge — **8**

Gulian beschreibt eine Bilderfolge.
„Im Bild 1 liegen 2 Kreise. In den folgenden Bildern liegt immer ein Kreis mehr als im Bild davor.“

- Zeichne die Bilder in die Tabelle ein.

	Bild
Bild 1	
Bild 2	
Bild 3	
Bild 4	

- Ergänze die Tabelle.

Bild	1	2	3	4
Anzahl der Kreise				

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Zeichnen einer Bilderfolge und Zuordnen passender Terme — **9**

> Im Bild 1 liegen 4 Dreiecke, in den folgenden Bildern liegt immer ein Dreieck mehr als im Bild davor.

Tom beschreibt eine Bilderfolge.

- Zeichne die Bilder in die Tabelle.

	Bild	Term
Bild 1		
Bild 2		
Bild 3		
Bild 4		

Tom hat zu jedem Bild einen Term aufgeschrieben.
Mit den Termen kann man die Anzahl der Dreiecke beschreiben.

- Ordne die Terme den Bildern zu.

$\boxed{4}$ $\boxed{4 + 1 + 1}$ $\boxed{4 + 1 + 1 + 1}$ $\boxed{4 + 1}$

- Ergänze die Tabelle.

Bild	1	2	3	4
Anzahl der Dreiecke				

Ergänzen einer Bilderfolge und Erstellen passender Terme — **10**

Bild 1 Bild 2 Bild 3 Bild 4 Bild 5

- Zeichne das Bild 4.
- Ergänze die passenden Terme zu Bild 4 und Bild 5.

Bild	Anzahl der Quadrate	Term
1	1	1
2	3	1 + 2
3	5	1 + 2 + 2
4	7	
5	9	

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Zuordnungsvorstellung

Entwickeln passender Terme in verkürzter Schreibweise **11**

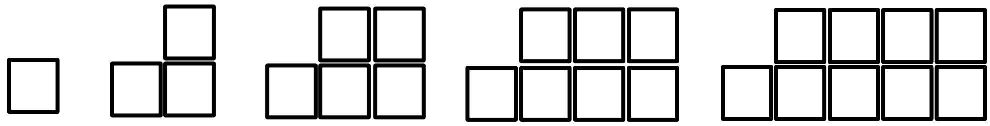


Bild 1 Bild 2 Bild 3 Bild 4 Bild 5

Bild	Anzahl der Quadrate	Term	Zusammengefasster Term
1	1	1	1
2	3	1 + 2	1 + 1 · 2
3	5	1 + 2 +2	
4	7	1 + 2 + 2 + 2	
5	9	1 + 2 + 2 + 2 + 2	1 + 4 · 2

- Ergänze für die Bilder 3 und 4 die letzte Spalte in der Tabelle.
- Warum kann man die Terme zusammenfassen?
- Zoey beschreibt die Terme allgemein: „Von Term zu Term kommen immer 2 dazu.“ Markiere in den Bildern und in den Termen, was Zoey meint.

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Zuordnungsvorstellung

Überprüfen von Beschreibungen einer Zahlenfolge **12**

Amina, Elia und Tom untersuchen die Zahlenfolge.

2	4	6	8	10	12	14

Amina beschreibt: „Die erste Zahl ist 2. Dann kommen immer 2 dazu.“

Elia sagt: „Das sind aufeinanderfolgende gerade Zahlen. Sie sind geordnet von 2 bis 14.“

Tom behauptet: „Das sind die Ergebnisse der Malfolge mit der 2.“

- Wer hat Recht? Begründe.

Gleichungen und Funktionen Grundschule		Idee der funktionalen Zusammenhänge Zuordnungsvorstellung

Beschreiben einer Zahlenfolge mit Worten	13

4 8 12 16 20

- Beschreibe die Zahlenfolge.
- Finde noch eine weitere Beschreibung.

Gleichungen und Funktionen Grundschule		Idee der funktionalen Zusammenhänge Zuordnungsvorstellung

Beschreiben einer komplexeren Zahlenfolge mit Worten	14

- Beschreibe die Zahlenfolge.

2 4 3 6 5 10 9 18

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Herstellen von Zuordnungen

15

- Welches Kind hat welches Lieblingstier?
  Verbinde.

Tims Tier lebt unter der Erde.	Adler
Miriams Tier hat keine Beine.	Elefant
Emils Tier hat Flügel.	Maulwurf
Anjas Tier hat Stoßzähne.	Delfin

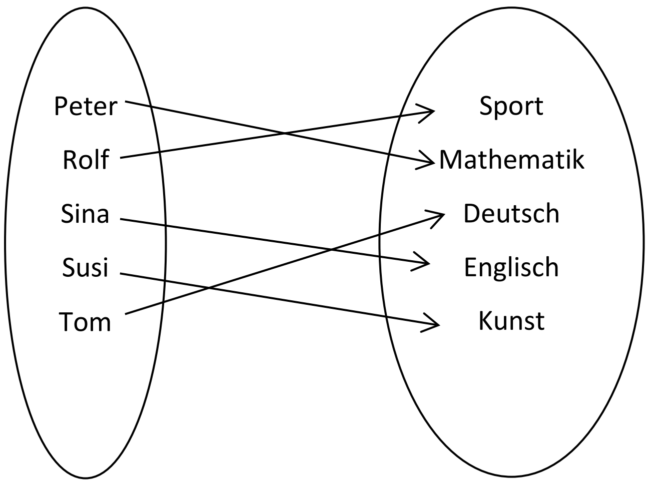
- Ergänze:

  Jedem Kind wurde sein ____ zugeordnet.

Auswählen einer passenden Beschreibung für Zuordnungen mit Pfeilbildern

16

- Welche Beschreibung passt zu dieser Zuordnung? Kreuze an.

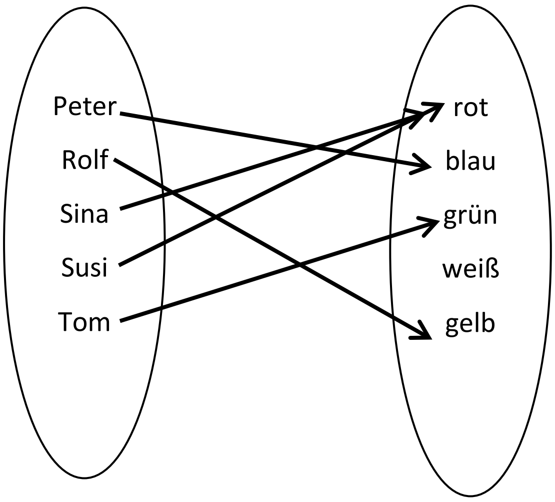


☐ Jedem Kind wird sein Stundenplan zugeordnet.
☐ Jedem Unterrichtsfach wird ein Kind zugeordnet.
☐ Jedem Kind wird sein Lieblingsfach zugeordnet.
☐ Jedem Kind wird seine Lieblingslehrkraft zugeordnet.

Beschreiben einer als Pfeilbild dargestellten Zuordnung

17

- Beschreibe, was einander zugeordnet wurde.



- Warum zeigen zwei Pfeile zu einer Farbe?
- Warum hat eine Farbe keinen Pfeil?

Entnehmen von Informationen aus einer Wertetabelle

18

Erik plant eine Fahrradtour. Er plant, welche Streckenlängen er zurücklegen kann.
Er notiert folgende Tabelle.

Zeit in Stunden	1	2	3
Weg in Kilometer	15	30	45

- Lies aus der Tabelle ab und ergänze die Sätze.

Erik will in 3 Stunden _______________ fahren.

Für 30 Kilometer hat Erik _________________ eingetragen.

Pro Stunde plant Erik immer _____________.

- Welche Größen werden einander zugeordnet? Ergänze den Satz.

Die ____________________________ wird dem ____________________________zugeordnet.

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Zuordnungsvorstellung

Einordnen von Informationen in eine Wertetabelle — **19**

Ben verpackt immer gleich viele Würfel in Säckchen. Er will schnell sagen können, wie viele Würfel er schon verpackt hat. Dafür hat er diese Tabelle vorbereitet.

	1				
	50				

- Trage folgende Angaben in die Tabelle ein.

Anzahl der Säckchen | 2 | 4 | 3 | 100

5 | 150 | 250 | Anzahl der Würfel | 200

- Welche Größen werden einander zugeordnet? Ergänze den Satz.

Der ______________________ wird der __________________________ zugeordnet.

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Zuordnungsvorstellung

Ergänzen von Wertetabellen zu proportionalen Zuordnungen — **20**

Hier siehst du verschiedene Tabellen zu verschiedenen Zuordnungen.

- Ergänze die Tabellen.

· 2 · 3

Masse in Gramm	100	200	300	
Preis in €	2	4		20

· 2 · 3

Anzahl der Flaschen	1	2	5	
Preis in ct	35			280

Zeit in Minuten	10	30		
Weg in Km	2		12	14

- Welche Größen werden einander zugeordnet?

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Zuordnungsvorstellung

Entnehmen von Informationen aus einer grafischen Darstellung — 21

Elias hat eine Zuordnung im Koordinatensystem dargestellt.

- Beschreibe, welche Größe wird welcher anderen Größe zugeordnet?

Elias liest im Koordinatensystem ab:
„3 Hefte kosten 6 €.“

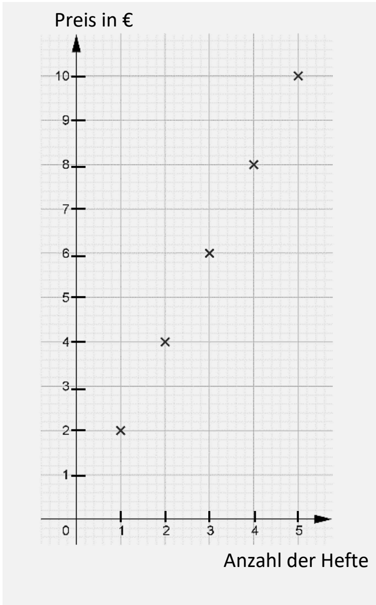
- Zeige im Koordinatensystem, an welcher Stelle Elias das abgelesen hat.

- Lies aus dem Koordinatensystem ab und ergänze.

5 Hefte kosten ________________.

Für 4 € bekommt man _________ Hefte.

Preise für Hefte



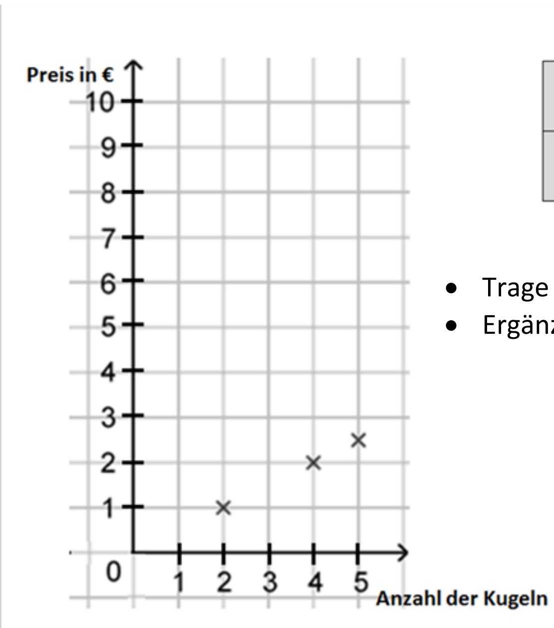
Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Zuordnungsvorstellung

Ergänzen einer Wertetabelle durch Ablesen der Werte im Koordinatensystem — 22

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Fabian hat angefangen, die Zuordnung aus dem Koordinatensystem in einer Tabelle darzustellen.



Anzahl der Eiskugeln	0	1	2	3	4
	0	0,50			

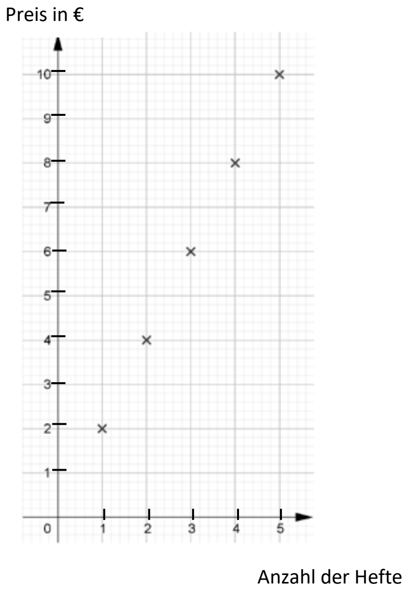
- Trage die fehlenden Punkte im Koordinatensystem ein.
- Ergänze die Tabelle.

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Zuordnungsvorstellung

Zuordnen der passenden Beschreibung zu einem Graphen — 23

- Kreuze an, welche Beschreibung zu dieser Zuordnung passt.



Den Preis für die Anzahl der Hefte berechnet man, indem man…

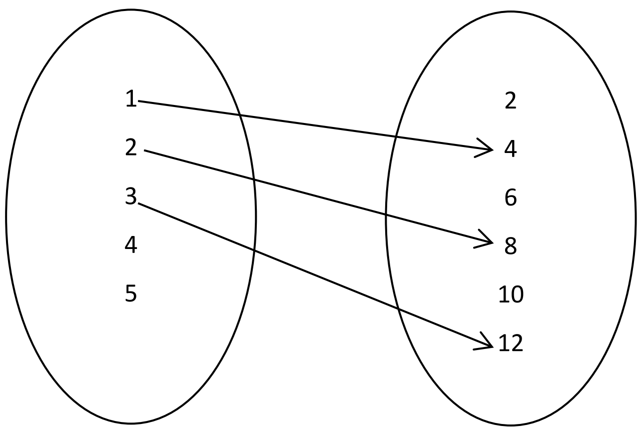
- ☐ die Anzahl der Hefte plus 2 € rechnet.
- ☐ die Anzahl der Hefte minus 2 € rechnet.
- ☐ die Anzahl der Hefte mal 2 € rechnet.
- ☐ die Anzahl der Hefte geteilt durch 2 € rechnet.

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Zuordnungsvorstellung

Darstellen von Zuordnungen — 24

Noemi zeichnet eine Zuordnung.



Paul weiß, man kann auch 1→ 4 schreiben.

- Ergänze. 2 → __ und 3 → __

Überprüfen der Darstellung einer Zuordnung — 25

Tim und Ava sollen den Zahlen jeweils das Zehnfache zuordnen.

Eva schreibt: 5 → 50 8 → 80 10 → 100

Tim schreibt: 70 → 7 40 → 4 20 → 2

- Wer macht es richtig? Begründe.

Überprüfen und Korrigieren der Darstellung einer Zuordnung — 26

Anja soll den Zahlen jeweils das Doppelte zuordnen.

Dabei hat sie Fehler gemacht.

3 → 6 8 → 16 1 → 2 6 →13 10 → 20

14 → 7 5 → 10 9 → 18 4 → 8 2 → 4

- Kreise die Fehler ein und berichtige.
- Übertrage die berichtigte Zuordnung in die Tabelle.

Zahl	1	2	3	4						
Das Doppelte	2		6		10					20

Katja sagt: „Wenn ich das Doppelte einer Zahl suche,
dann muss ich diese Zahl immer mit 2 multiplizieren.“

- Hat Katja Recht? Probiere es aus.

Darstellen einer Zuordnung als geordnetes Zahlenpaar **27**

Katja hat Zuordnungen aufgeschrieben.

5 → 15 7 → 21 4 → 12

- Beschreibe, was alle Zuordnungen gemeinsam haben.

Man kann die Zuordnung 5 → 15 auch als **geordnetes Zahlenpaar** aufschreiben: (5|15).

Geordnetes Zahlenpaar
(Zahl | zugeordnete Zahl)
Beispiel: **(5|50)** bedeutet:
Der Zahl 5 wird das
Zehnfache 50 zugeordnet.

- Schreibe auch die anderen Zuordnungen in dieser Schreibweise auf.

Überprüfen von Darstellungen geordneter Zahlenpaare **28**

Welche Darstellungen sind **geordnete Zahlenpaare**?

- Kreise die Zahlenpaare ein.

(3|9) 4| 8 3,9 (4|8)

- Begründe, warum die anderen Darstellungen für **geordnete Zahlenpaare** nicht richtig sind.

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Zuordnungsvorstellung

Übertragen von geordneten Zahlenpaaren in eine Wertetabelle **29**

Jeder Zahl wird das Achtfache zugeordnet.
Sergej hat zu dieser Zuordnung geordnete Zahlenpaare aufgeschrieben.

(1|8) (5|40) (7|56) (3|24)

- Trage die geordneten Zahlenpaare in die Tabelle ein.

Zahl	1			
Das Achtfache der Zahl				

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Zuordnungsvorstellung

Überprüfen einer Zuordnung und Eintragen in eine Wertetabelle **30**

Jeder Zahl (x) wird ihr Fünffaches zugeordnet.

Susi hat zu dieser Zuordnung geordnete Zahlenpaare aufgeschrieben.
Es sind aber nicht alle Zahlenpaare richtig.

- Welche Zahlenpaare sind richtig? Kreise sie ein.

(2|10) (5|35) (21|7) (10|50) (30|6)

- Ergänze das graue Feld in der Tabelle.
- Trage die eingekreisten Zahlenpaare in die Tabelle ein.
- Finde weitere passende geordnete Zahlenpaare und trage sie in die Tabelle ein.

X					

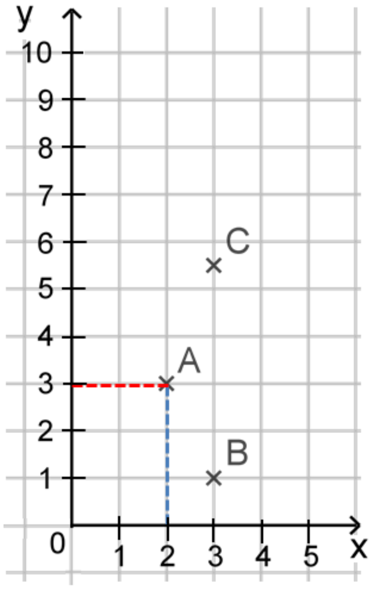
Darstellen von geordneten Zahlenpaaren als Punkte im Koordinatensystem — 31

Die Lage von Punkten im Koordinatensystem wird mit Koordinaten beschrieben.

Naomi liest den Punkt A (2|3) aus dem Koordinatensystem ab.
Sie erklärt: **„Punkte haben immer einen x-Wert und einen y-Wert. Zuerst schreibt man den x-Wert und dann den y-Wert."**

2 ist der x-Wert des Punktes A.

3 ist der y-Wert des Punktes A.



- Lies die Koordinaten der Punkte B und C ab.
  B (|) C (|)

- Zeichne den Punkt D (3|2) in das Koordinatensystem ein.

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Zuordnungsvorstellung

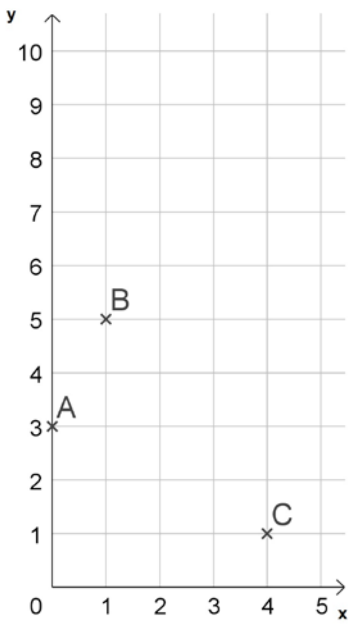
Überprüfen und Berichtigen der Koordinaten von Punkten im Koordinatensystem — 32

Lilli liest die Koordinaten von Punkt A, Punkt B und Punkt C im Koordinatensystem ab.

Dabei macht sie Fehler.

- Kreise die Fehler ein und berichtige.

  A (3|0) B (1|5) C (1|4)



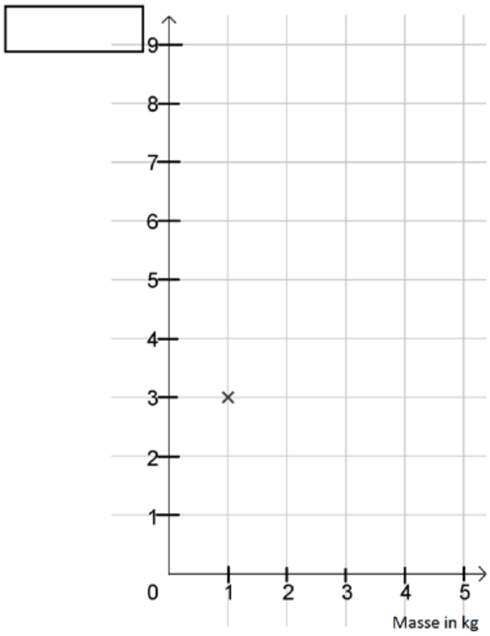
Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Darstellen von Zuordnungen im vorgegebenen Koordinatensystem **33**

Joris hat begonnen, die Zuordnung in einem Koordinatensystem darzustellen.

Masse in kg	1	2	3
Preis in €	3	6	9

- Vervollständige das Koordinatensystem.

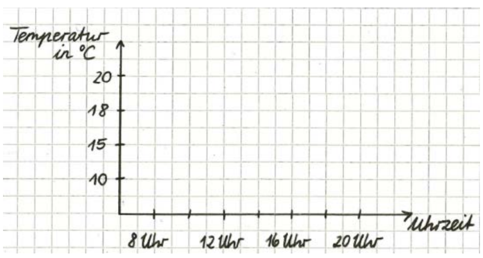


Finden von Fehlern bei der Darstellung von Zuordnungen im Koordinatensystem **34**

Für den Projekttag zum Thema *Wetter* misst Susi in bestimmten Abständen die Temperatur und trägt die Werte in eine Tabelle ein.

Uhrzeit	8 Uhr	12 Uhr	16 Uhr	20 Uhr
Temperatur	10° C	18° C	20° C	15° C

Susi möchte diese Zuordnung im Koordinatensystem darstellen.
Sie beginnt so:



- Was hat sie falsch gemacht?
- Stelle diese Zuordnung in einem Koordinatensystem dar.

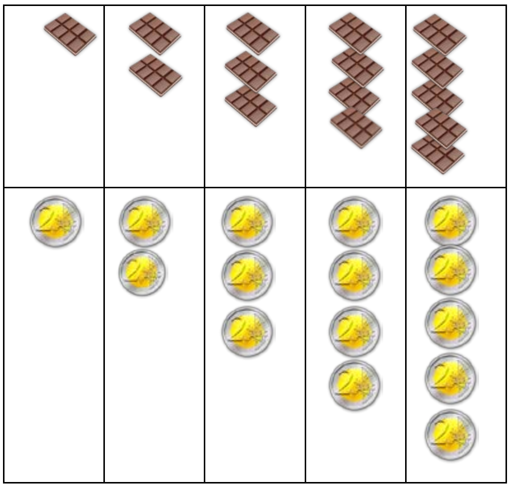
Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Zuordnungsvorstellung

Erfassen der Formulierung „pro Portion“ **35**

Eine große Tafel Schokolade kostet 2 €. Die Kinder sollen herausbekommen, wie viele Tafeln Schokolade man für 10 € kaufen kann.

Tim hat gezeichnet:



Susi hat eine Tabelle aufgestellt:

Anzahl der Tafeln	Preis in €
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10

Tim sagt: „Es kommt immer eine Tafel Schokolade hinzu. Also kommen **pro Portion** 2 € dazu.“

- Was bedeutet **pro Portion**? Zeige in der Tabelle.

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Zuordnungsvorstellung

Erkennen der „Portion“ und Ergänzen der Wertetabelle **36**

Anzahl der Kartoffelsäcke	1	2	3	4	5
Masse in kg	50				

Faour möchte die Masse berechnen, wenn immer eine Portion dazu kommt.

- Was ist hier eine Portion?

Tom berechnet den Preis für 2 Kartoffelsäcke so:

50 kg + 50 kg = 2 · 50 kg = 100 kg

- Ergänze die Tabelle.

Anzahl der Packungen		2	4	5	6
Masse in Gramm		1000	2000		

In dieser Tabelle kann ich eine Portion nicht einfach ablesen.

- Was ist hier eine Portion?
- Ergänze die Tabelle.

Ela sagt: „Ich muss die Anzahl der Packungen **immer** mit **500** multiplizieren, um die Masse auszurechnen.“

500 ist der Proportionalitätsfaktor.

Der Proportionalitätsfaktor ist der feste Faktor, mit dem man die zugeordnete Größe berechnen kann.

- Zeige in der Tabelle, was Ela meint.

- Bestimme den Proportionalitätsfaktor.

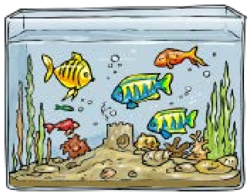
Masse der Kirschen in kg	1	2	4
Preis in €	3	6	12

Orangensaft in Liter	1	2	4
Preis in €	0,80	1,60	3,20

Anzahl der Schokoriegel	2	3	4
Preis in €	1,80	2,70	3,60

Bestimmen und Erklären des Proportionalitätsfaktors

Das Aquarium wird mit Wasser befüllt.



Zeit in Minuten	1	2	3	4	5
Volumen in Liter	2	4	6	8	10

- Bestimme den Proportionalitätsfaktor.
  Zeige, an welcher Stelle in der Wertetabelle man den Proportionalitätsfaktor ablesen kann.

Joris sagt: „Diese Zuordnung ist proportional.
Proportional bedeutet: immer dasselbe Volumen pro Portion.“

Noemi sagt: „Die Zuordnung ist proportional,
weil für alle Wertepaare der gleiche Proportionalitätsfaktor gilt.“

- Zeige anhand der Werte aus der Tabelle, was Joris und Noemi meinen.

Bild 4: „Aquarium“,cc by nc 4.0, erstellt mit dem © Worksheet Crafter – www.worksheetcrafter.com

Überprüfen der Proportionalität von Zuordnungen in Wertetabellen

- Überprüfe, ob folgende Zuordnungen proportional sind. Begründe.

x	2	4	8
y	10	20	40

x	3	6	8
y	9	20	40

x	2	4	8
y	60	30	20

x	0	1	2	3
y	5	5	10	15

Fortsetzen einer Bilderfolge und Beschreiben der Veränderung

41

Bildnummer	Bild
Bild 1	○ ○ ○ ●
Bild 2	○ ○ ○ ● ○ ○ ○ ●
Bild 3	○ ○ ○ ● ○ ○ ○ ● ○ ○ ○ ●
Bild 4	

- Ergänze das Bild 4.
- Beschreibe, was sich von Bild zu Bild verändert.
- Welche Farbe hat das erste Plättchen im Bild 10?
- Welche Farbe hat das letzte Plättchen im Bild 15?

Entwickeln einer Zahlenfolge mit Zahlentermen zur Bilderfolge

42

Franzi hat zu der Bilderfolge Terme aufgeschrieben. Mit diesen Termen kann man die Anzahl der Plättchen pro Bild bestimmen.

Bildnummer	Bilderfolge	Term
Bild 1	● ● ●	$\mathbf{1} \cdot 2 + 1$
Bild 2	● ● ● ● ●	$\mathbf{2} \cdot 2 + 1$
Bild 3	● ● ● ● ● ● ●	$\mathbf{3} \cdot 2 + 1$
Bild 4	● ● ● ● ● ● ● ● ●	

- Ergänze den Term für das Bild 4.

Ela beschreibt die Bilderfolge so: „In jedem Bild sind es immer 2 Plättchen mehr."

- Markiere in den Bildern und in den Termen die passenden Stellen zu Elas Aussage.
- Wie viele Plättchen liegen im Bild 5 und wie viele Plättchen liegen im Bild 10?

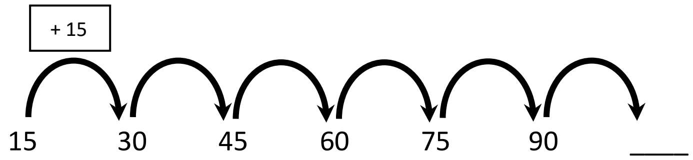
Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Veränderungssvorstellung

Überprüfen der Beschreibung einer Zahlenfolge

43

Susi schreibt eine Folge von Zahlen auf:



Tom sagt: „Von einer Zahl zur nächsten Zahl sind es immer 15 mehr.“

- Hat Tom Recht? Begründe.
- Wie heißt die nächste Zahl?

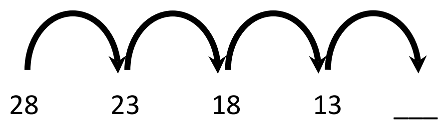
Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Veränderungssvorstellung

Fortsetzen der Zahlenfolge und Ermitteln des Bildungsgesetzes

44

- Schreibe über die Bögen, wie die Zahlenfolge gebildet wurde.



- Setze die Zahlenfolge fort.

Zuordnen von Beschreibungen zu Zahlenfolgen | 45

- Verbinde die Zahlenfolge mit der passenden Beschreibung.

Zahlenfolge

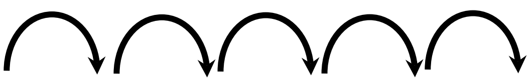
- 6 12 18 24 30
- 100 80 60 40 20
- 7 4 8 5 10 7
- 7 4 8 5 9 10

Beschreibung

- Die Zahlen werden immer um 20 kleiner.
- Die Zahlen werden um 3 kleiner und dann verdoppelt.
- Die Zahlen werden immer um 6 größer.

Fortsetzen einer Zahlenfolge und Beschreiben des Bildungsgesetzes | 46

- Beschrifte die Bögen. Setze die Zahlenfolge fort.



2 5 8 11 ____ ____

- Beschreibe die Zahlenfolge mit Worten.

Überprüfen und Beschreiben des Bildungsgesetzes einer Zahlenfolge | **47**

Amina möchte die Zahlenfolge fortsetzen.

5 10 20 40 __ __

Amina sagt: „Die fünfte Zahl ist die 80."

- Hat Amina Recht? Begründe.
- Wie heißt dann die sechste Zahl? Ergänze.
- Beschreibe, wie du jeweils die nächste Zahl finden kannst.

Fortsetzen einer Zahlenfolge und Beschreiben der Veränderung des Bildungsgesetzes | **48**

- Setze die Zahlenfolge fort.

3 5 7 9 11 __ __

- Beschreibe, wie du die nächsten Zahlen gefunden hast.

Erkennen der Eigenschaften von Zuordnungen | **49**

Setze die Beschreibungen **weniger**, **mehr** oder **genauso viel** passend in die Lücken ein.

Lisa beschriftet 2 Hefte. Für jedes Heft benötigt sie 20 Sekunden.

Wenn Lisa 5 Hefte beschriftet, benötigt sie dafür _______ Zeit als für 2 Hefte.

2 Kinder stellen im Klassenraum alle Stühle hoch.

Wenn 5 Kinder die Stühle hochstellen, dann benötigen sie ______ Zeit als 2 Kinder.

20 Kinder in der Klasse haben mittwochs 45 Minuten Mathematikunterricht.

Wenn nur 18 Kinder Mathematikunterricht haben, haben sie _________ Minuten Mathematikunterricht wie 20 Kinder.

Überprüfen von Aussagen zu Abhängigkeiten | **50**

- Überprüfe folgende Aussagen. Entscheide, ob richtig oder falsch.
- Erzähle, warum du dich so entschieden hast.

Aussage	**Richtig oder falsch?**
Herr Aran fährt allein mit dem Auto nach München. Wenn er 3 weitere Personen mitnimmt, benötigt er mehr Zeit.	
Das Kaninchenfutter für 3 Kaninchen reicht für 5 Tage. Lisa nimmt noch ein Kaninchen in Pflege. Das Futter reicht jetzt für mehr als 5 Tage.	
Tara und ihre Freundin sehen sich zu zweit einen Kinofilm an. Er dauert 87 Minuten. Wenn sich 5 Freundinnen den gleichen Kinofilm ansehen, dauert der Film genauso lange.	
Katja kauft eine Kugel Eis für 1,30 €. Wenn sie 3 Kugeln Eis kauft, muss sie insgesamt weniger bezahlen.	

Auswählen passender Aussagen zu Rechengeschichten **51**

- Finde zur Rechengeschichte die passende Beschreibung. Kreuze sie an.

Rechengeschichte	Beschreibung
Die Lehrerin bastelt für die Kinder ihrer Klasse kleine Geschenke. Für jedes Geschenk benötigt sie etwa 3 Minuten.	☐ Je mehr Geschenke sie bastelt, desto mehr Zeit benötigt sie. ☐ Je mehr Geschenke sie bastelt, desto weniger Zeit benötigt sie. ☐ Die Zeit bleibt gleich, wenn sie mehr Geschenke bastelt.
2 Arbeiter streichen die Wände in der Schule und benötigen dafür 10 Tage.	☐ Je mehr Arbeiter streichen, desto mehr Zeit brauchen sie. ☐ Je mehr Arbeiter streichen, desto weniger Zeit brauchen sie. ☐ Die Zeit bleibt gleich, wenn mehr Arbeiter streichen.
Frau Meier kauft 3 Tafeln Schokolade und bezahlt dafür 3,60 €.	☐ Je mehr Tafeln Schokolade sie kauft, desto mehr muss sie bezahlen. ☐ Je mehr Tafeln Schokolade sie kauft, desto weniger muss sie bezahlen. ☐ Der Preis bleibt immer gleich, egal wie viel Schokolade sie kauft.
Elia fährt mit ihrer Freundin von der Schule mit dem Bus nach Hause. Die Busfahrt dauert 15 Minuten.	☐ Je mehr Freundinnen mitfahren, desto länger ist die Fahrtdauer. ☐ Je mehr Freundinnen mitfahren, desto kürzer ist die Fahrtdauer. ☐ Die Fahrt dauert immer gleich lang.

Zuordnen einer Funktionseigenschaft („je mehr, desto mehr“) zu Wertetabellen **52**

- Zu welchen Tabellen passt die Beschreibung „je mehr, desto mehr“? Kreise sie ein.

Anzahl der Pferde	Anzahl der Tage, für die das Futter reicht
1	24
2	12
3	8
4	6
6	4

Masse der Äpfel	Preis
0,5 kg	1,05 €
1 kg	2,10 €
1,5 kg	3,15 €
2 kg	4,20 €
2,5 kg	5,25 €

Alter	Körpergröße
4 Jahre	102 cm
6 Jahre	115 cm
8 Jahre	126 cm
10 Jahre	139 cm
12 Jahre	151 cm

Zeit	Temperatur
5:00 Uhr	2 ° C
8:00 Uhr	3° C
11:00 Uhr	10° C
14:00 Uhr	10° C
17:00 Uhr	8° C

Beschreiben einer Wertetabelle mit einer Funktionseigenschaft

Lisa baut aus Holzwürfeln einen Turm.
Lisa hat immer die Höhe des Turmes gemessen und folgende Tabelle erstellt.

· 2

· 2

Anzahl der Würfel	Höhe des Turms in cm
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15
6	18
10	30

- Ergänze den Satz: Je mehr Würfel, desto ____________ der Turm.

Lisa behauptet: „Wenn ich die Anzahl der Holzwürfel von 1 auf 2 verdopple,
dann verdoppelt sich auch die Höhe des Turms von 3 cm auf 6 cm.“

- Finde noch andere Stellen in der Tabelle, wo das genauso ist. Zeige sie.

Beschreiben der Proportionalität

Anzahl der Würfel	Höhe des Turms in cm
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15
6	18
10	30
12	36

- Ergänze die Sätze.

Wenn die Anzahl der Holzwürfel verdreifacht wird, dann ist der Turm ________________.

Wenn die Anzahl der Holzwürfel versechsfacht wird, dann ist der Turm ________________.

Wenn die Anzahl der Holzwürfel verzehnfacht wird, dann ist der Turm ________________.

- Zeige das jeweils in der Tabelle.

Beschreiben der Proportionalität anhand einer Wertetabelle **55**

Noel sagt:
„**Verdoppelt** man die eine Größe, dann **verdoppelt** sich die zugeordnete Größe.
Verdreifacht man die eine Größe, so **verdreifacht** sich auch die zugeordnete Größe.
Vervierfacht man die eine Größe, dann **vervierfacht** sich auch die zugeordnete Größe."

- Was meint Noel damit? Zeige in der Tabelle.

Größe des Teppichbodens in m^2	Preis in €
1	50
2	100
3	150
4	200
6	300
8	400
9	450
12	600
20	1000

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Veränderungssvorstellung

Überprüfen einer Zuordnung auf Proportionalität **56**

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Sascha behauptet:
„Vervielfacht man die Anzahl der Äpfel, vervielfacht sich deren Masse in gleicher Weise. Es gibt einen Proportionalitätsfaktor, mit dem sich alle zugeordneten Massen berechnen lassen."

Hat Sascha Recht? Zeige in der Tabelle.

Anzahl der Äpfel	Masse in Gramm
1	200
2	400
3	650
4	900
5	1000

Elias liest aus dem Mathebuch vor:

*Bei jeder **proportionalen Zuordnung:***

⇨ *gilt immer die Aussage: „je mehr, desto mehr“.*

⇨ *gibt es immer einen Proportionalitätsfaktor.*

- Überprüfe, ob es eine proportionale Zuordnung ist. Kreuze passend an.

Zuordnung 1

1	2	3	4
20	40	60	80

☐ Es gilt: „Je mehr, desto mehr.“ ☐ Es gibt einen Proportionalitätsfaktor.
☐ proportional ☐ nicht proportional

Zuordnung 2

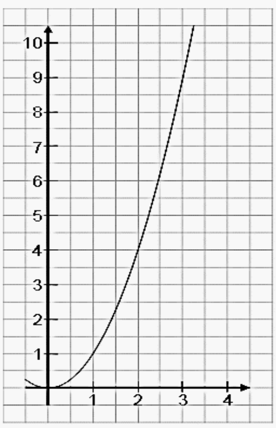
1	2	3	4
20	40	50	60

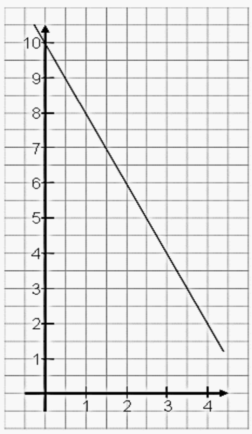
☐ Es gilt: „Je mehr, desto mehr.“ ☐ Es gibt einen Proportionalitätsfaktor.
☐ proportional ☐ nicht proportional

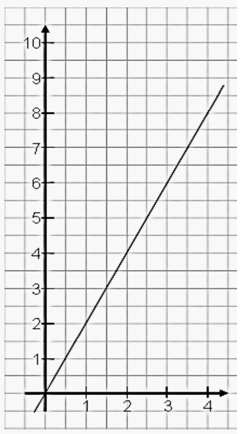
Bild 5: „Mathematikbuch“, cc by nc 4.0, erstellt mit dem © Worksheet Crafter – www.worksheetcrafter.com

Hier siehst du Darstellungen von verschiedenen Zuordnungen.

- Welche Sachsituation passt? Verbinde.







Für verschiedene Anzahlen wird ein Preis bestimmt.

Jeder Seitenlänge eines Quadrats wird der zugehörige Flächeninhalt zugeordnet.

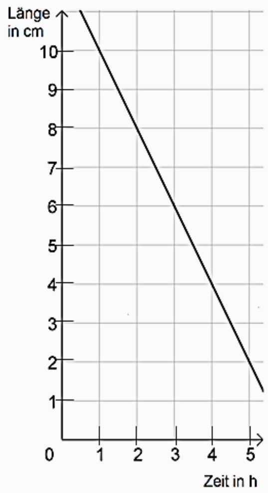
Eine Kerze brennt ab. Jede Stunde wird die Länge der Kerze bestimmt.

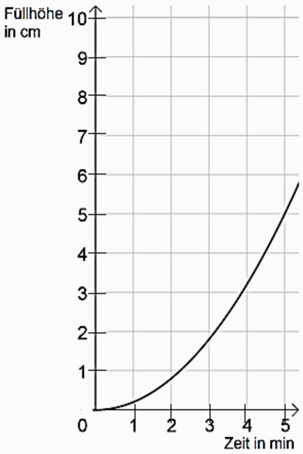
Gleichungen und Funktionen Grundschule	Idee der funktionalen Zusammenhänge Objektvorstellung

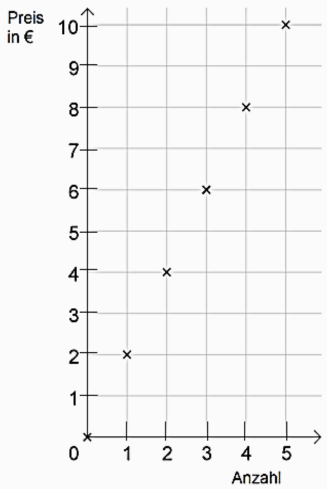
Überprüfen der grafisch dargestellten Funktion auf die Eigenschaft „je mehr, desto mehr“	59

Gulian meint: „Für diese Zuordnungen gilt: Je größer die eine Größe, desto größer die andere Größe.“

- Hat Julian Recht? Begründe.







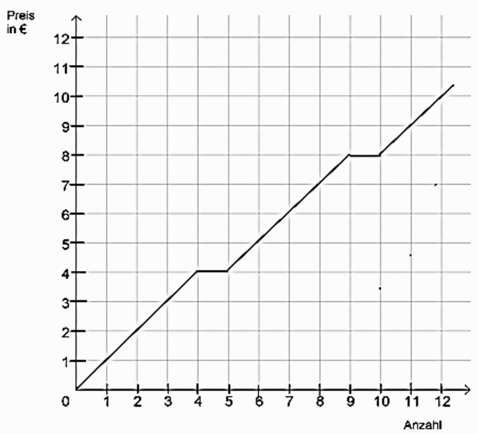
Gleichungen und Funktionen Grundschule	Idee der funktionalen Zusammenhänge Objektvorstellung

Überprüfen der grafisch dargestellten Funktion auf Proportionalität	60

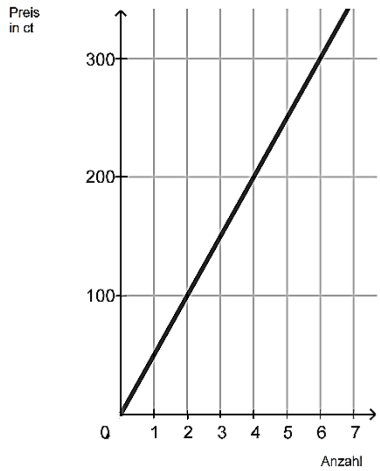
Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Tim sagt: „Für beide Zuordnungen gilt: Je mehr, desto mehr. Also sind beide Zuordnungen proportional.“

- Hat Tim Recht? Begründe.



Tim kauft Überraschungseier.
Ein Ei kostet 1 €.
Jedes 5. Ei ist umsonst.

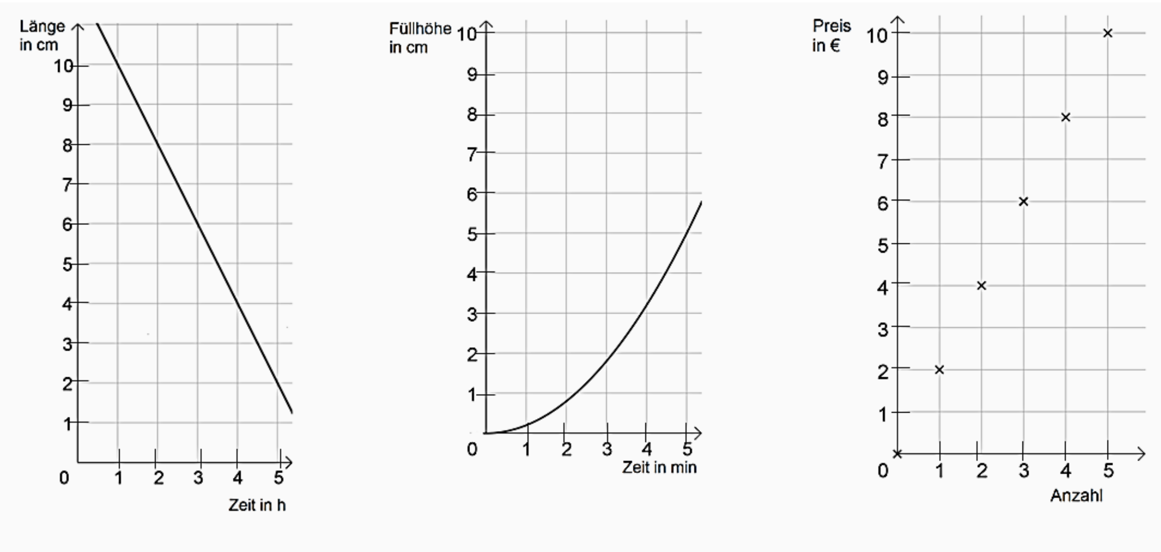


Eva verkauft Kuchen.
Ein Stück Kuchen kostet 50 ct.

Erkennen der Proportionalität anhand des Funktionsgraphen | 61

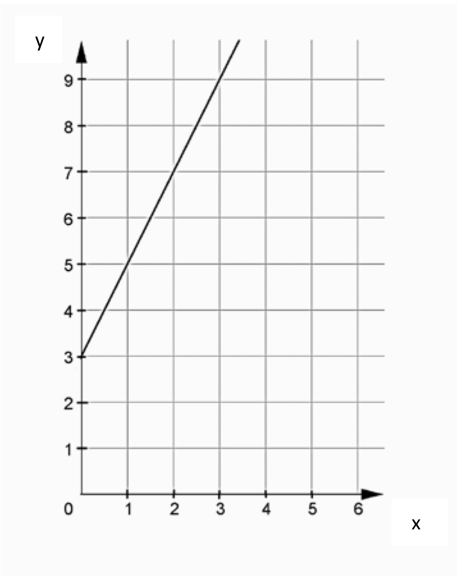
Eine dieser Zuordnungen ist eine proportionale Zuordnung.

- Kreise sie ein und begründe.



Erkennen und Begründen von Nichtproportionalität bei der dargestellten Zuordnung | 62

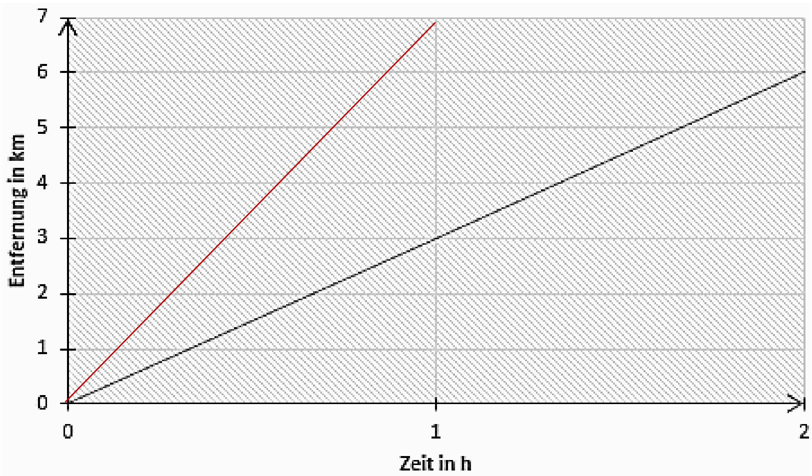
- Woran erkennst du, dass diese Zuordnung **nicht** proportional ist? Begründe.



Zuordnen von Graphen zu Sachsituationen

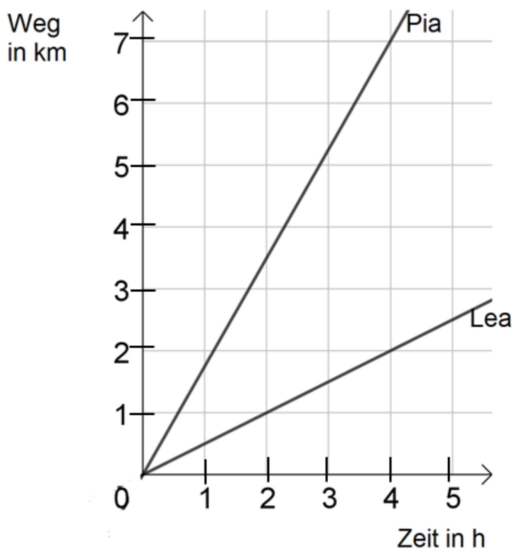
Sergej und Pia verlassen gleichzeitig das Haus.
Sergej fährt eine Stunde mit dem Fahrrad.
Pia geht zwei Stunden spazieren.

- Welcher Graph passt zu Sergej? Welcher zu Pia?
- Wie viele Kilometer legen Sergej und Pia jeweils einer Stunde zurück?



Interpretieren von Graphen

- Wer ist schneller? Begründe.



Interpretieren eines Graphen mittels passender Textbausteine **65**

Der Schulweg

- Zeige die einzelnen Teile von Tims Schulweg in der Darstellung.

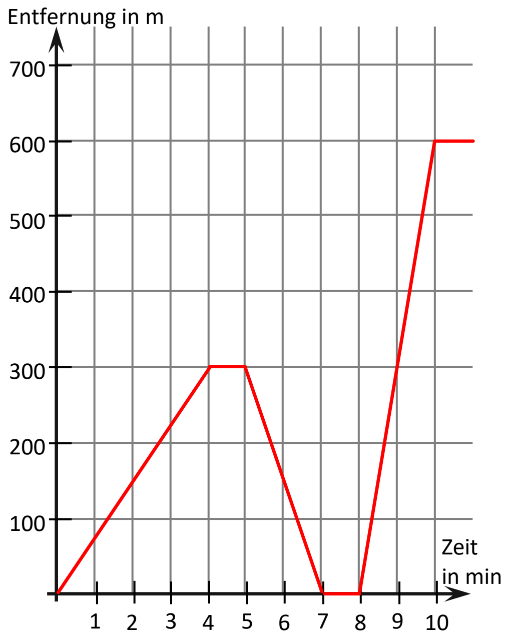
Tim läuft los in Richtung Schule.

Nach 4 Minuten muss er an einer roten Ampel warten.

Während er wartet, stellt er fest, dass er seinen Sportbeutel vergessen hat.

Schnell läuft er zurück nach Hause.

Zu Hause holt er seinen Sportbeutel und fährt mit dem Fahrrad zur Schule.



Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Objektvorstellung

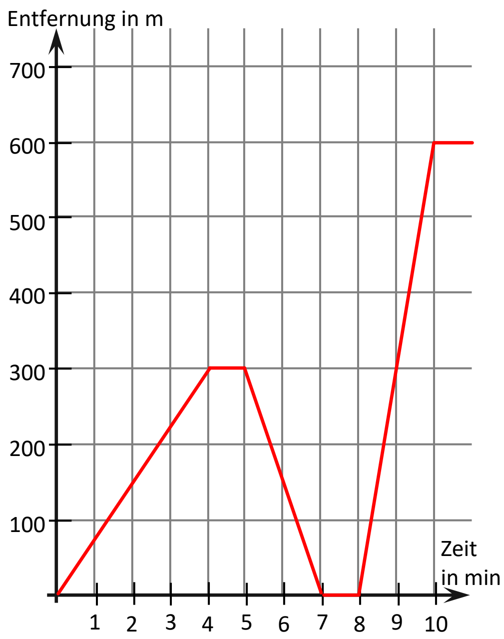
Ablesen von Informationen aus einer grafischen Darstellung **66**

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Der Schulweg

Lies aus der Darstellung ab.

- Wie weit ist die Schule von Tims Wohnung entfernt?
- Wie viele Minuten benötigt er an diesem Tag, bis er in der Schule ankommt?



Gleichungen und Funktionen
Grundschule

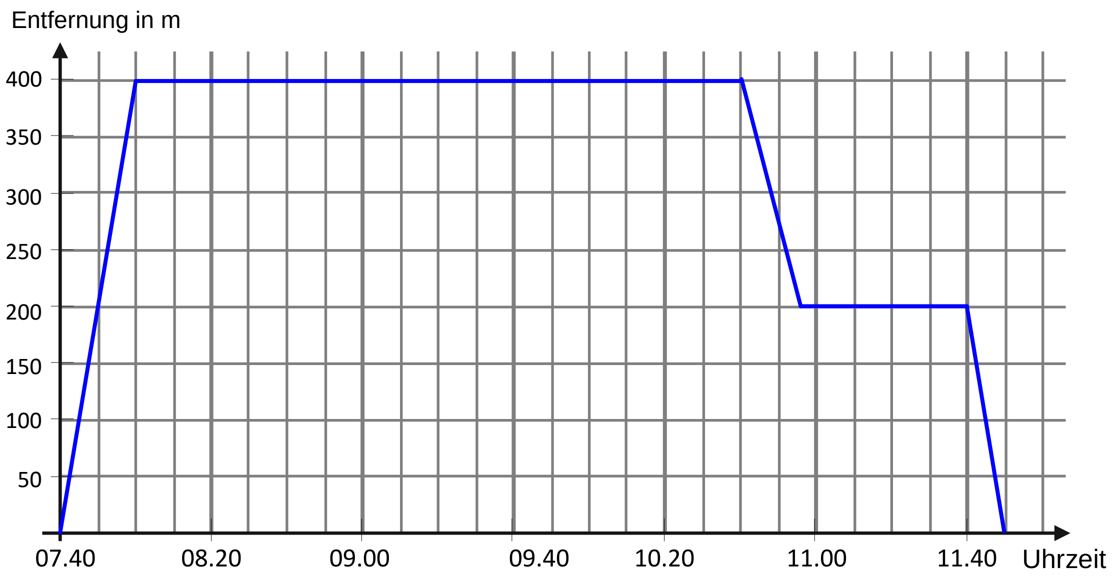
Idee der funktionalen Zusammenhänge
Objektvorstellung

Zuordnen und Ergänzen von Textbausteinen zu einem Graphen

67

Unten siehst du einen Graphen zu Susis Schulweg.
Beschreibe den Weg. Benutze alle Textbausteine.

Die Schule ist 400 m von Susis Wohnung entfernt.	Susi verlässt um … Uhr ihre Wohnung.	Um … kommt sie bei der Freundin an und sie bleibt dort bis … .	Susi kommt um … in der Schule an.	Um … verlässt sie mir ihrer Freundin die Schule.	Um… kommt sie wieder zuhause an.



Gleichungen und Funktionen
Grundschule

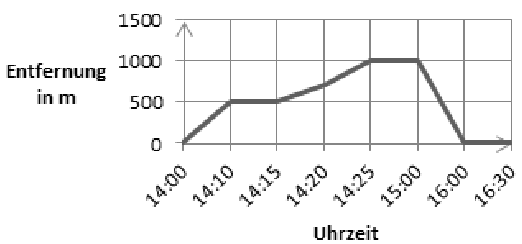
Idee der funktionalen Zusammenhänge
Objektvorstellung

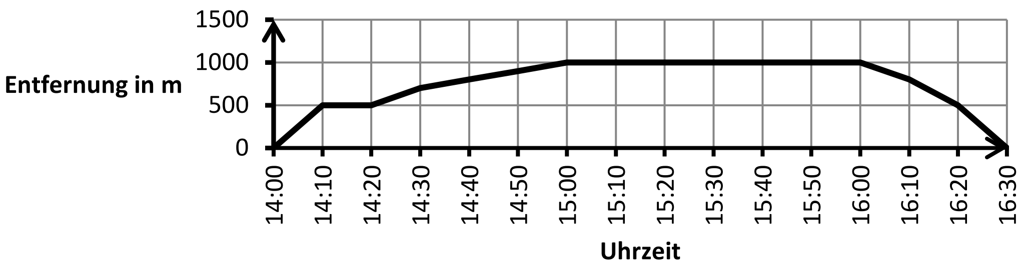
Zuordnen des passenden Graphen zur Sachsituation

68

Tom geht um 14 Uhr zum Fußballtraining. Der Fußballplatz ist 1 km von Toms Wohnung entfernt. Nach 10 Minuten bleibt er stehen und wartet auf Pit. Pit kommt nach 10 Minuten. Gemeinsam gehen sie weiter. Um 15 Uhr erreichen sie das Stadion.
Um 16 Uhr geht Tom wieder nach Hause.

- Welche Darstellung passt zum Sachverhalt? Begründe.





Verknüpfen von Informationen

Die Schülerinnen und Schüler der Klasse 4b durften sich für AGs entscheiden.
Wer an welcher AG teilnimmt, steht auf einer Liste.
Außerdem gibt es einen Raumplan für alle AGs.

AG_Planung	
Jonathan	Gitarren-AG
Merve	Chor
Kevin	Bastel-AG
Robin	Garten-AG
Carla	Hörspiel-AG
Tina	Mal-AG

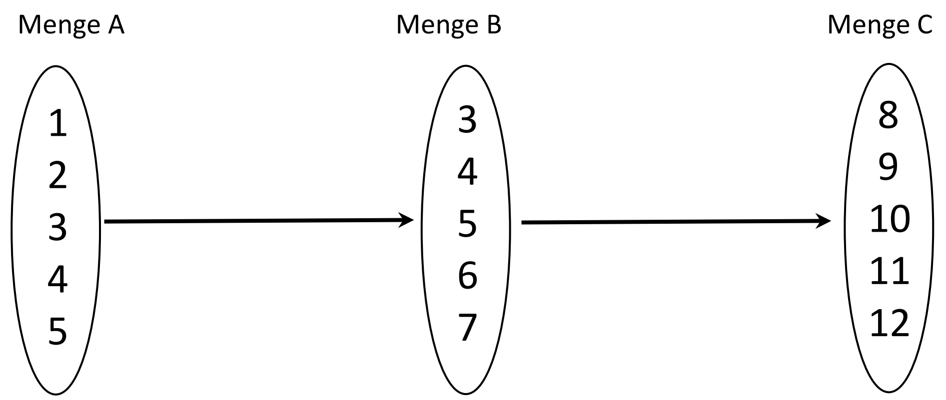
Raumplan	
Chor:	Musikraum
Gitarren-AG:	Aula
Mal-AG:	Kunstraum
Garten-AG:	Schulgarten
Bastel-AG:	Raum 3
Hörspiel-AG:	Raum 2

In welchen Raum müssen die Kinder gehen?

- Schreibe für jedes Kind den Raum auf. Erkläre, wie du vorgehst.

Jonathan	____________
Merve	____________
Kevin	____________
Robin	____________
Carla	____________
Tina	____________

Beschreiben der Hintereinanderausführung von Zuordnungen



- Verbinde jede der drei Zuordnungen mit einer passenden Beschreibung.

Zuordnung	**Beschreibung**
Zuordnung von Menge A nach Menge B	Zu jeder Zahl wird 5 addiert.
Zuordnung von Menge B nach Menge C	Zu jeder Zahl wird 7 addiert.
Zuordnung von Menge A nach Menge C	Zu jeder Zahl wird 2 addiert.

Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Objektvorstellung

Beschreiben der Nacheinanderausführung von Schritten am Hunderterfeld | 71

Hier siehst du ein Hunderterfeld.

- Ergänze die Sätze.
  Wenn ich einen Schritt nach rechts gehe, dann rechne ich _____________ .
  Wenn ich einen Schritt nach unten gehe, dann rechne ich _____________ .

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Henri sagt: „Ich gehe immer einen Schritt nach rechts **und** einen nach unten."

- Was muss Henri rechnen?

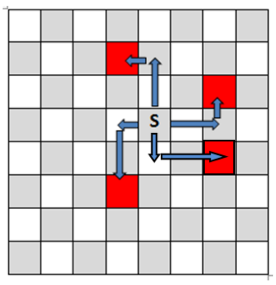
Bild 6: „Hunderterfeld", cc by nc 4.0, erstellt mit dem © Worksheet Crafter – www.worksheetcrafter.com

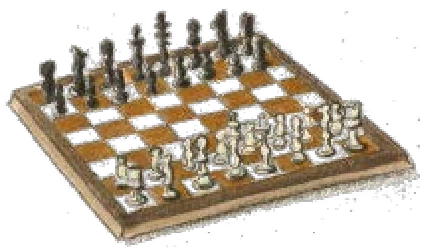
Gleichungen und Funktionen
Grundschule

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Objektvorstellung

Beschreiben der Nacheinanderausführung von Schritten auf dem Schachbrett | 72

Wie sich der Springer auf dem Schachbrett bewegen darf, zeigt das Bild.





- Beschreibe die Regel für den Springer.

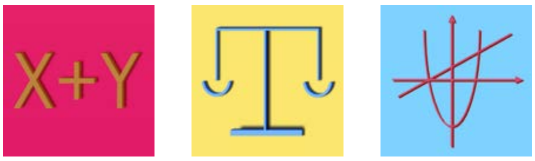
Bild 7: „Schachbrett", cc by nc 4.0, erstellt mit dem © Worksheet Crafter – www.worksheetcrafter.com

LISUM
Landesinstitut für Schule und Medien Berlin-Brandenburg

Förderaufgaben

Idee der Funktionen

Sekundarstufe I



Förderschritte zu den Diagnoseaufgaben: Aufgabe 3 — E, F, G

Übersicht über die Förderaufgaben

1. Beschreiben der Eigenschaften von Graphen proportionaler Zuordnungen
2. Erkennen von Graphen proportionaler Zuordnungen
3. Erkennen von Funktionsgleichungen für proportionale Zuordnungen
4. Erkennen von Funktionsgleichungen für proportionale Zuordnungen
5. Überprüfen der Quotientengleichheit als Eigenschaft direkt proportionaler Zuordnungen
6. Nachweisen der Quotientengleichheit als Eigenschaft direkt proportionaler Zuordnungen
7. Überprüfen der Produktgleichheit als Eigenschaft indirekt proportionaler Zuordnungen
8. Nachweisen der Produktgleichheit als Eigenschaft indirekt proportionaler Zuordnungen
9. Nutzen von Produktgleichheit und Quotientengleichheit, um Funktionen zu klassifizieren
10. Erkennen von linearen Funktionen anhand der Gleichungsstruktur
11. Untersuchen des Einflusses des Proportionalitätsfaktors auf den Graphenverlauf
12. Beschreiben des Einflusses der Parameter einer linearen Funktion auf den Graphenverlauf
13. Beschreiben des Einflusses der Parameter einer linearen Funktion auf den Graphenverlauf
14. Beschreiben des Einflusses der Vorzeichen von Anstiegen auf den Funktionsverlauf
15. Zuordnen von Gleichungen und Graphen linearer Funktionen
16. Zuordnen von Gleichungen und Graphen linearer Funktionen
17. Zuordnen von Gleichungen und Graphen linearer Funktionen
18. Erkennen von quadratischen Funktionen anhand der Gleichungsstruktur
19. Beschreiben von typischen Eigenschaften von Graphen quadratischer Funktionen
20. Zuordnen von Gleichungen und Graphen quadratischer Funktionen
21. Erklären des Zusammenhangs zwischen Funktionsgleichung und Scheitelpunkt einer Parabel
22. Ablesen des Scheitelpunktes von Parabeln und Aufstellen der Funktionsgleichung
23. Finden des Scheitelpunktes von Parabeln anhand der Funktionsgleichung
24. Erkennen der Stauchung einer Parabel anhand der Gleichung
25. Erkennen der Streckung einer Parabel anhand der Gleichung
26. Erkennen der Öffnungsrichtung einer Parabel anhand der Gleichung
27. Erkennen von Form und Öffnungsrichtung einer Parabel anhand der Gleichung
28. Beschreiben typischer Eigenschaften von Graphen
29. Zuordnen von Gleichungen und Graphen linearer und quadratischer Funktionen

Die nachfolgenden Aufgaben dienen der Vorbereitung auf die gymnasiale Oberstufe.

30. Nacheinanderausführen von Zuordnungsvorschriften
31. Nacheinanderausführen von Zuordnungsvorschriften
32. Untersuchen der Nacheinanderausführung einer linearen und einer quadratischen Funktion
33. Untersuchen der Nacheinanderausführung von zwei linearen Funktionen
34. Untersuchen von Nacheinanderausführungen von Funktionen

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Beschreiben der Eigenschaften von Graphen proportionaler Zuordnungen **1**

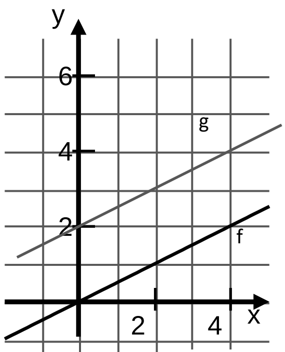


Abb. 1

Der Graph von f stellt eine proportionale Zuordnung dar.

Der Graph von g stellt keine proportionale Zuordnung dar.

- Erkläre, worin sich die Graphen unterscheiden.

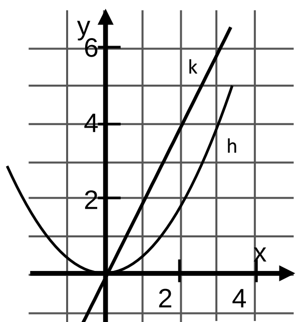


Abb. 2

Der Graph von k stellt eine proportionale Zuordnung dar.

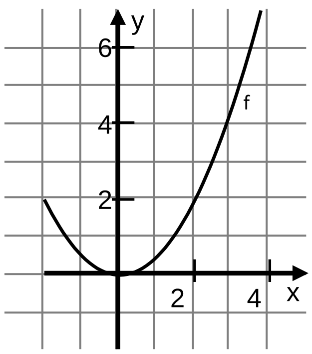
Der Graph von h stellt keine proportionale Zuordnung dar.

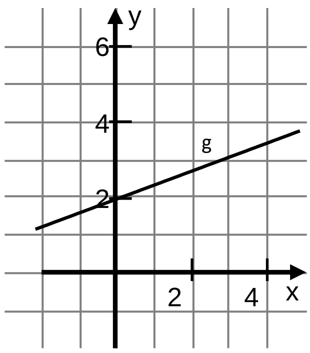
- Erkläre, worin sich die Graphen unterscheiden.

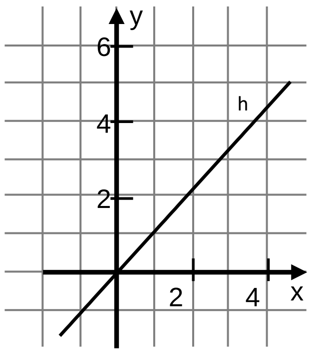
Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Objektvorstellung

Erkennen von Graphen proportionaler Zuordnungen **2**







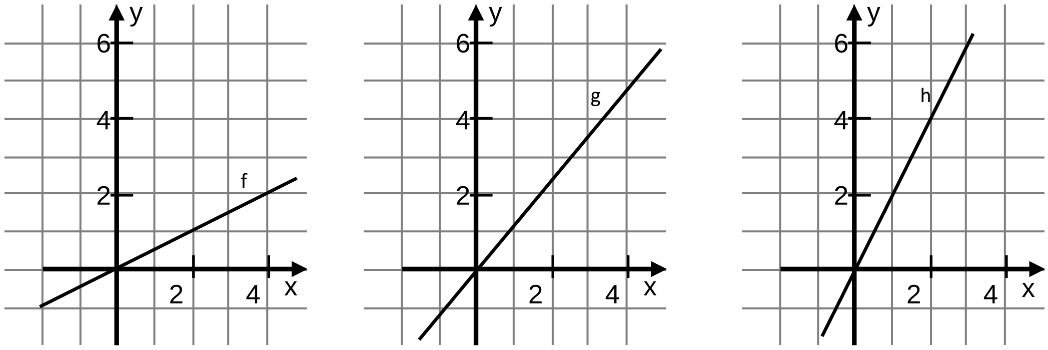
Es sind drei Graphen dargestellt.

- Welche Graphen gehören zu einer direkten Proportionalität?
- Begründe.

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Objektvorstellung

Erkennen von Funktionsgleichungen für proportionale Zuordnungen | **3**



Die Gleichungen f: $y = 0{,}5 \cdot x$, g: $y = 1{,}2 \cdot x$ und h: $y = 2 \cdot x$

sind Funktionsgleichungen. Alle drei beschreiben **direkt proportionale** Funktionen.

Mit den Gleichungen k: $y = x^2$, l: $y = 0{,}5 \cdot x + 2$ und m: $y = \frac{1}{x}$

werden drei Funktionen beschrieben, die **keine** direkt proportionalen Funktionen sind.

- Erkläre, woran man an den Gleichungen für k, l und m erkennt, dass sie keine proportionale Zuordnung beschreiben, indem du entsprechende Stellen markierst.
- Erkläre, woran man eine Gleichung für eine direkt proportionale Funktion erkennt.

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Objektvorstellung

Erkennen von Funktionsgleichungen für proportionale Zuordnungen | **4**

- Kreuze bei den folgenden Gleichungen diejenigen an, die zu einer direkt proportionalen Zuordnung gehören:

☐ $y = 3 \cdot x$	☐ $y = 2 \cdot x + 1$	☐ $y = \frac{x}{2}$	☐ $y = x$
☐ $y = 3 \cdot x^2$	☐ $y = x \cdot 8$	☐ $8 = 2 \cdot x$	☐ $y = 2 : x$

- Begründe deine Entscheidung bei den Gleichungen, die **nicht** zu einer direkt proportionalen Zuordnung gehören, indem du entsprechende Stellen markierst.

Gleichungen und Funktionen Sekundarstufe I		**Idee der funktionalen Zusammenhänge** Objektvorstellung

Überprüfen der Quotientengleichheit als Eigenschaft direkt proportionaler Zuordnungen **5**

Jede direkte Proportionalität lässt sich mit einer Gleichung der Form $y = k \cdot x$ beschreiben.
Dabei ist k eine feste Zahl, die man Proportionalitätsfaktor nennt,
z. B.: $y = 2 \cdot x$. (Der Proportionalitätsfaktor ist hier $k = 2$.)

Die untenstehende Wertetabelle passt zu dieser Gleichung.

- Für alle Wertepaare (x|y) einer direkten Proportionalität gilt: $y : x = k$.
- k muss für alle Wertepaare gleich sein! Das nennt man Quotientengleichheit.

- Prüfe diese Aussage anhand der nachfolgenden Tabelle.
- Erkläre an diesem Beispiel den Begriff *Quotientengleichheit*.

x	2	3	5	9
y	4	6	10	18
k = y : x	4 : 2 = 2 → k = 2			

Gleichungen und Funktionen Sekundarstufe I		**Idee der funktionalen Zusammenhänge** Objektvorstellung

Nachweisen der Quotientengleichheit als Eigenschaft direkt proportionaler Zuordnungen **6**

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

- Prüfe, ob es sich bei den nachfolgenden Funktionen (*Funktion 1 und Funktion 2*) um direkte Proportionalitäten handelt. Nutze den Taschenrechner.
- Begründe jeweils.

Funktion 1

x	2,0	5,0	7,5
y	2,8	7,0	10,5

Funktion 2

x	2,5	4,0	6,0
y	3,5	5,8	9,6

Überprüfen der Produktgleichheit als Eigenschaft indirekt proportionaler Zuordnungen **7**

Die folgende Wertetabelle stellt eine indirekte Proportionalität dar.

- Für alle Wertepaare (x|y) einer indirekten Proportionalität gilt: $y \cdot x = k$.
- k muss für alle Wertepaare gleich sein! Das nennt man Produktgleichheit.

- Prüfe diese Aussage anhand der nachfolgenden Tabelle.
- Erkläre an diesem Beispiel den Begriff *Produktgleichheit*.

x	1	2	3	8
y	12	6	4	1,5
k = y · x	$1 \cdot 12 = 12$ $\rightarrow k = 12$			

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Objektvorstellung

Nachweisen der Produktgleichheit als Eigenschaft indirekt proportionaler Zuordnungen **8**

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

- Prüfe, ob es sich bei den nachfolgenden Funktionen (*Funktion 1 und Funktion 2*) um indirekte Proportionalitäten handelt. Nutze den Taschenrechner.
- Begründe.

Funktion 1

x	2,0	5,0	12,0
y	9,0	3,8	1,8

Funktion 2

x	2,5	4,0	10,0
y	13,6	8,5	3,4

Nutzen von Produktgleichheit und Quotientengleichheit, um Funktionen zu klassifizieren **9**

- Prüfe, bei welchen der Funktionen es sich um direkte oder indirekte Proportionalitäten handelt.

  Tipp: Prüfe zuerst: *Je mehr …, desto mehr …* oder *Je mehr …, desto weniger ….*
  Entscheide dann, wie du rechnest.

Funktion 1

x	1	2	3	4
y	5,75	5	3,75	2

Funktion 2

x	2	4	7	10
y	4,5	9	15,75	22,5

Funktion 3

x	2	4	5	8
y	8	15	18,5	29

Funktion 4

x	2	3	6	10
y	12	8	4	2,4

Funktion 5

x	1	2	3	5
y	4	7	8	4

Funktion 6

x	1	2	3	6
y	7,5	3,7	2,5	14,5

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Objektvorstellung

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Erkennen von linearen Funktionen anhand der Gleichungsstruktur **10**

Lineare Funktionen werden durch die Gleichung $\boxed{\mathbf{y = m \cdot x + n}}$ dargestellt.
Dabei sind m und n für jede Funktion festgelegte Zahlen.

Beispiele: $y = 3 \cdot x + 2$: Hier ist $m = 3$ und $n = 2$.

oder: $y = \frac{1}{2} \cdot x - 1$. Hier ist $m = \frac{1}{2}$ und $n = -1$

oder: $y = -2 \cdot x + 9$. Hier ist m = …. und n = …

- Kreuze die Gleichungen für lineare Funktionen an.

  ☐ $y = 2 \cdot x - 3$ ☐ $y = -2 \cdot x + 1$ ☐ $y = \frac{1}{2}x + 3$ ☐ $y = 2 : x + 1$

  ☐ $y = 3 \cdot x + \frac{2}{x}$ ☐ $y = x \cdot 8 - 4$ ☐ $y = x^3 - 1$ ☐ $y = 3 \cdot x^2 + 2$

- Erkläre, warum die anderen Gleichungen nicht zu den linearen Funktionen gehören.

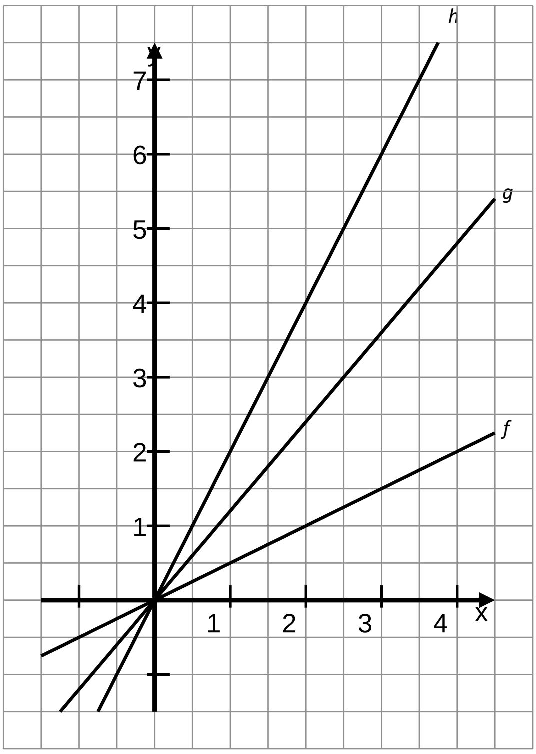
- Erkläre, warum auch die Gleichungen **a**) $y = x + 8$, **b**) $y = 2 + 3 \cdot x$ und **c**) $y = 5 \cdot x$ Gleichungen für lineare Funktionen sind.

Gegeben sind drei Funktionen durch ihre Gleichungen und Wertetabellen.
Es handelt sich in jedem Fall um direkte Proportionalitäten.

f: y = 0,5 · x			
x	1	2	4
y	0,5	1	2

g: y = 1,2 · x			
x	1	2	4
y	1,2	2,4	4,8

h: y = 2 · x			
x	1	2	4
y	2	4	8



Die Graphen der drei Funktionen sind im Koordinatensystem dargestellt.

- Vervollständige die folgenden Sätze.
  Beziehe dich dabei auf die zugehörigen Funktionsgleichungen.

  „Der Graph von … verläuft am steilsten, weil der Faktor vor dem x am größten ist.“

  „Der Graph von … verläuft flacher als der von g, weil … .“

- Erkläre, wie der Graph einer Funktion mit der Gleichung y = 4 · x
  im Vergleich zu den Graphen von f, g und h verlaufen müsste.

- Erkläre, wie der Graph einer Funktion mit der Gleichung y = 0,2 · x
  im Vergleich zu den Graphen von f, g und h verlaufen müsste.

- Eine weitere Gerade liegt zwischen den Graphen von g und h.
  Gib eine mögliche Funktionsgleichung an.

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen Sekundarstufe I		Idee der funktionalen Zusammenhänge Objektvorstellung

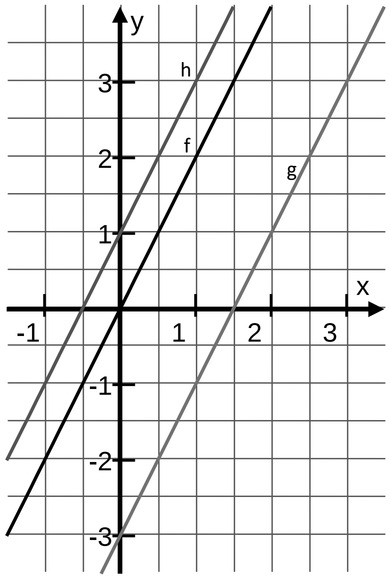
Beschreiben des Einflusses der Parameter einer linearen Funktion auf den Graphenverlauf **12**

Gegeben sind drei lineare Funktionsgleichungen und deren Graphen.

f: $y = 2 \cdot x$

g: $y = 2 \cdot x - 3$

h: $y = 2 \cdot x + 1$



- Betrachte die Gemeinsamkeit der drei Graphen.
  Woran erkennt man diese an den Gleichungen?
- Betrachte die Unterschiede zwischen den drei Graphen.
  Woran erkennt man diese an den Gleichungen?

Gleichungen und Funktionen Sekundarstufe I		Idee der funktionalen Zusammenhänge Objektvorstellung

Beschreiben des Einflusses der Parameter einer linearen Funktion auf den Graphenverlauf **13**

Die Gleichung einer linearen Funktion hat die Form $y = m \cdot x + n$.

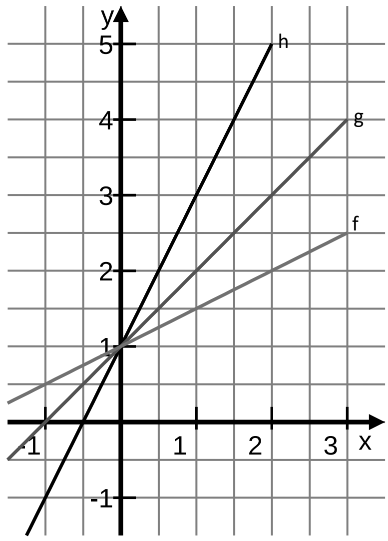
Dabei sind x und y die Variablen der Funktion.
m und n sind Parameter. Sie stehen für feste, aber beliebig wählbare Zahlen.

Im Koordinatensystem sind lineare Funktionen dargestellt:

f: $y = 0{,}5 \cdot x + 1$

g: $y = 1 \cdot x + 1$

h: $y = 2 \cdot x + 1$



- Beschreibe, welche Gemeinsamkeit die drei Gleichungen haben und welche Gemeinsamkeit alle drei Graphen haben.
- Betrachte die Unterschiede zwischen den drei Gleichungen und zwischen den drei Graphen.

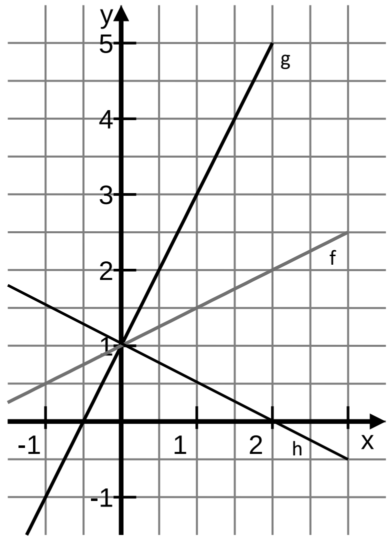
Beschreibe mit Worten, wie ein Graph der Funktion
k: $y = 3 \cdot x + 1$ und wie ein Graph der Funktion
t: $y = 0{,}2 \cdot x + 1$ verlaufen müssten.

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Beschreiben des Einflusses der Vorzeichen von Anstiegen auf den Funktionsverlauf **14**

Im nebenstehenden Koordinatensystem sind drei lineare Funktionen dargestellt.

f: $y = 0{,}5 \cdot x + 1$
g: $y = 2 \cdot x + 1$
h: $y = -0{,}5 \cdot x + 1$



- Erkläre:
  - Was unterscheidet den Graphen der Funktion h von den anderen beiden?
  - Woran kann man diesen Unterschied in der Funktionsgleichung erkennen?
- Skizziere den Graphen der Funktion k: $y = -2x + 1$.

Zuordnen von Gleichungen und Graphen linearer Funktionen **15**

In der Abbildung sind zwei Graphen linearer Funktionen dargestellt.

- Ordne jedem Graphen eine der folgenden drei Funktionsgleichungen zu. Schreibe die Namen (z. B. f) an die zugehörigen Graphen.

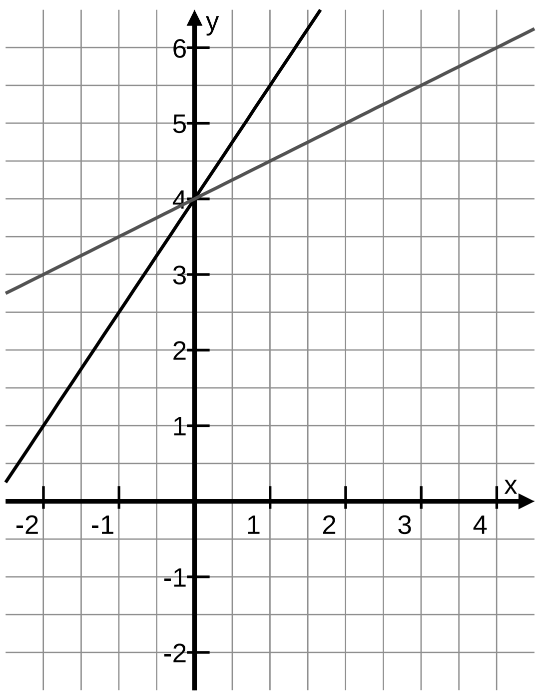
  f: $y = 0{,}5 \cdot x + 1$

  g: $y = 0{,}5 \cdot x + 4$

  h: $y = 1{,}5 \cdot x + 4$

  k: $y = 4 \cdot x + 1{,}5$

- Begründe deine Entscheidungen.



In der Abbildung sind drei Graphen linearer Funktionen dargestellt.

- Ordne jedem Graphen eine der folgenden vier Funktionsgleichungen zu. Schreibe die Namen (z. B. f) an die zugehörigen Graphen.

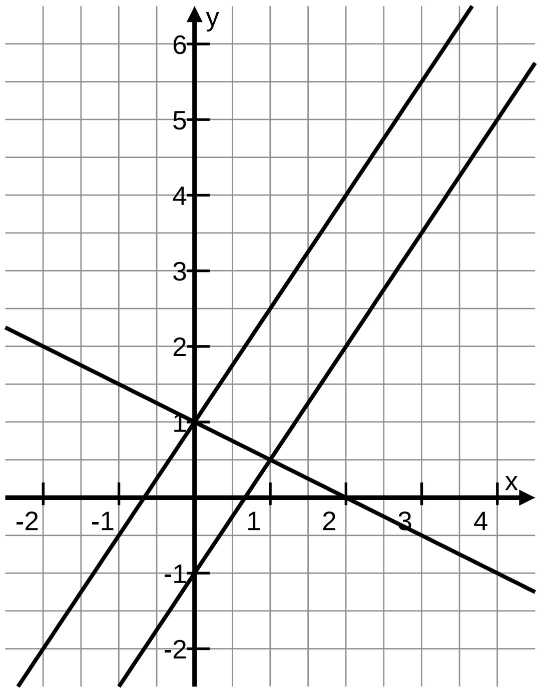
  f: $y = 1{,}5 \cdot x + 1$

  g: $y = -0{,}5 \cdot x + 2$

  h: $y = 1{,}5 \cdot x - 1$

  k: $y = -0{,}5 \cdot x + 1$

- Begründe deine Entscheidungen.



Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Objektvorstellung

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

In der Abbildung sind drei Graphen linearer Funktionen dargestellt.

- Ordne jedem Graphen eine der folgenden vier Funktionsgleichungen zu. Schreibe die Namen (z. B. f) an die zugehörigen Graphen.

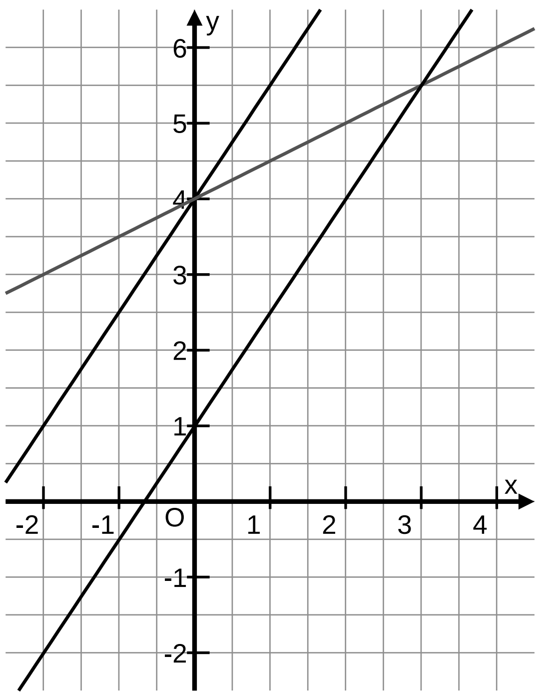
  f: $y = 1{,}5 \cdot x + 4$

  g $y = 0{,}5 \cdot x + 4$

  h: $y = 0{,}5 \cdot x + 1$

  k: $y = 1{,}5 \cdot x + 1$

- Begründe deine Entscheidungen.



Erkennen von quadratischen Funktionen anhand der Gleichungsstruktur **18**

Mit den folgenden Gleichungen sind quadratische Funktionen beschrieben:

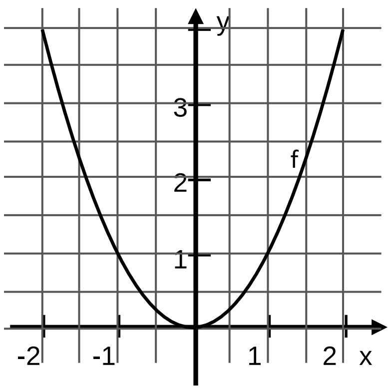
f: $y = x^2$ g: $y = (x + 1)^2$ h: $y = (x - 1)^2 - 3$ k: $y = 4 - x^2$

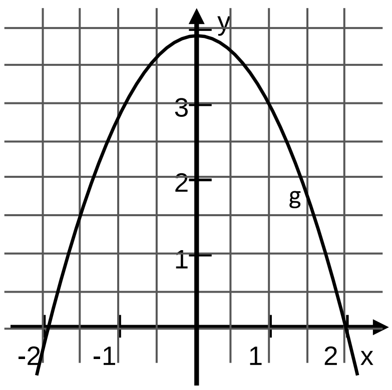
Die Funktionsgleichungen m, n, p und q beschreiben keine quadratischen Funktionen:

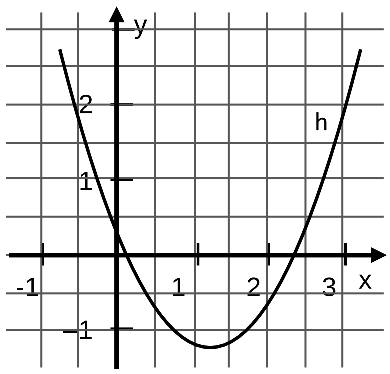
m: $y = 2 \cdot x + 1$ n: $y = \frac{2}{x}$ p: $y = 2^x$ q: $y = x + 3^2$

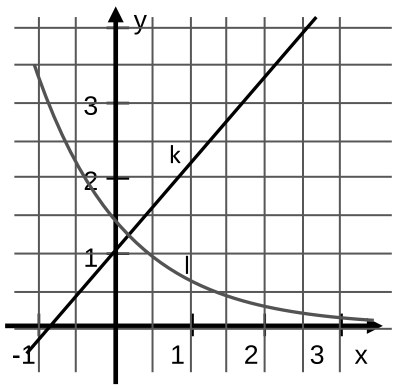
- Erkläre, woran man die Gleichung einer quadratischen Funktion erkennt.
- Begründe, warum die Gleichungen m, n, p und q keine quadratischen Funktionen beschreiben.

Beschreiben von typischen Eigenschaften von Graphen quadratischer Funktionen **19**









Oben sind 3 Graphen von quadratischen Funktionen (f, g, h) dargestellt. Diese nennt man Parabeln.

Die Funktionen k und l sind keine quadratischen Funktionen. Ihre Graphen sind nebenstehend abgebildet.

- Erkläre an den Beispielen, woran man Graphen quadratischer Funktionen erkennt.

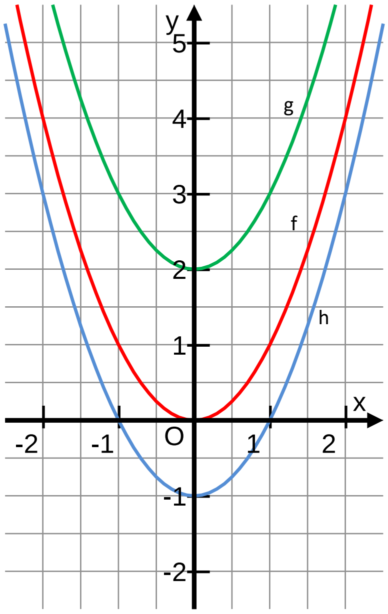
Zuordnen von Gleichungen und Graphen quadratischer Funktionen **20**

Der Graph der Funktion f: $y = x^2$ ist die Normalparabel, deren Scheitelpunkt im Punkt $S_1(0|0)$ liegt.

Die Graphen der Funktionen

g: $y = x^2 + 2$ und h: $y = x^2 - 1$

sind verschobene Normalparabeln.



- Lies aus der Abbildung die Scheitelpunkte ab.

  f: $y = x^2$ $S_1(0 | 0)$

  g: $y = x^2 + 2$ S_2(__|__)

  h: $y = x^2 - 1$ S_3(__|__)

- Erkläre, welcher Zusammenhang zwischen den Funktionsgleichungen und der Lage der Scheitelpunkte besteht.
- Gib den Scheitelpunkt der Funktion k: $y = x^2 - 2$ an und markiere ihn im Koordinatensystem.

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Objektvorstellung

Erklären des Zusammenhangs zwischen Funktionsgleichung und Scheitelpunkt einer Parabel **21**

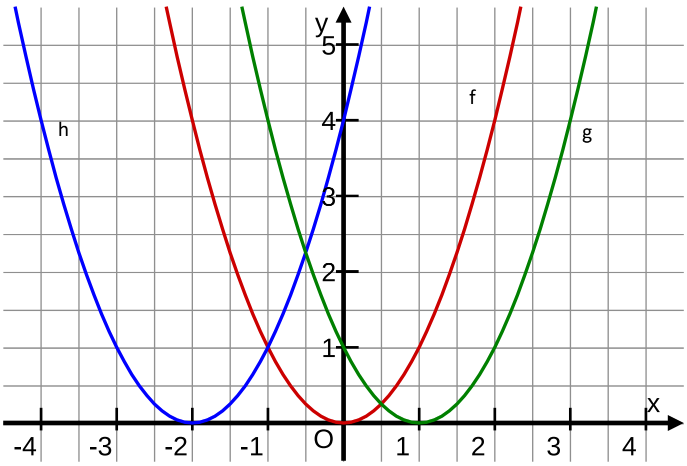
Der Graph der Funktion f: $y = x^2$ ist die Normalparabel, deren Scheitelpunkt im Punkt $S_1(0|0)$ liegt.

Die Graphen der Funktionen

g: $y = (x-1)^2$ und

h: $y = (x+2)^2$

sind verschobene Normalparabeln.



- Lies aus der Abbildung die Scheitelpunkte ab.

  f: $y = x^2$ $S_1(0 | 0)$

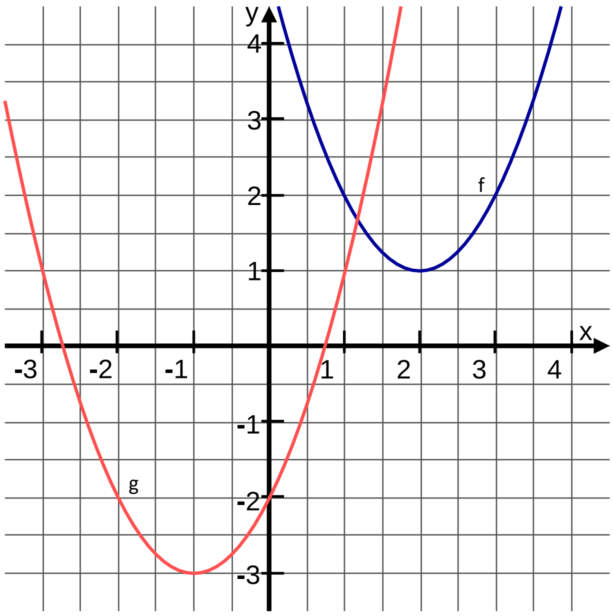
  g: $y = (x-1)^2$ S_2(__|__)

  h: $y = (x+2)^2$ S_3(__|__)

- Erkläre, welcher Zusammenhang zwischen den Funktionsgleichungen und der Lage der Scheitelpunkte besteht.
- Gib den Scheitelpunkt des Graphen der Funktion k: $y = (x+3)^2$ an und markiere ihn im Koordinatensystem.

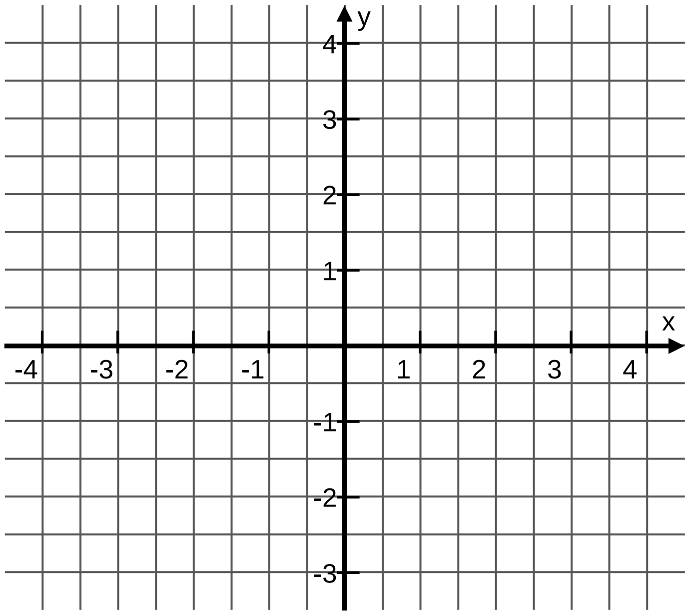
Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Ablesen des Scheitelpunktes von Parabeln und Aufstellen der Funktionsgleichung **22**



- Lies die Scheitelpunkte der Graphen ab. f: S(___|___), y = ___________
- Gib die zugehörigen Funktionsgleichungen an. g: ___________________________

Finden des Scheitelpunktes von Parabeln anhand der Funktionsgleichung **23**



Gegeben sind drei quadratische Funktionen durch ihre Gleichungen:

f: $y = x^2 - 2$ g: $y = (x - 3)^2$ h: $y = (x + 2)^2 + 1$

Die Graphen dieser Funktionen sind Parabeln.

- Markiere die Lage der Scheitelpunkte dieser Parabeln im Koordinatensystem.

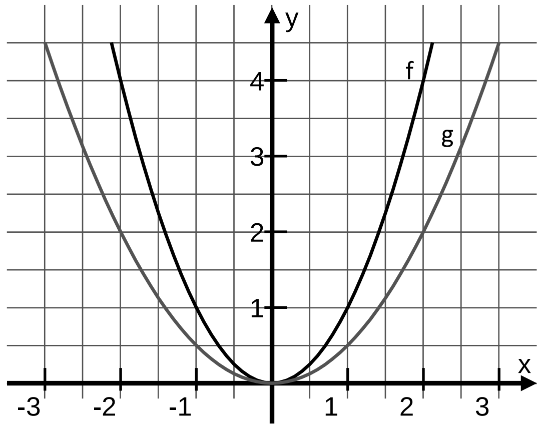
Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Objektvorstellung

Erkennen der Stauchung einer Parabel anhand der Gleichung

24

In der Abbildung sind die Graphen der Funktionen
f: $y = x^2$ und g: $y = 0{,}5 \cdot x^2$ dargestellt.



Der Graph von g verläuft etwas flacher als der Graph von f.

Das wird mit dem Begriff ***gestaucht*** beschrieben.

Gestauchte Parabeln entstehen, wenn der Funktionsterm x^2 mit einer Zahl multipliziert wird, deren **Betrag zwischen 0 und 1** liegt.

- Kreuze die Funktionen an, deren Graph gestaucht ist.

☐ $y = 0{,}7 \cdot x^2$ ☐ $y = x^2 + 0{,}2$ ☐ $y = 2{,}05 \cdot x^2$ ☐ $y = 0{,}3 \cdot x^2 + 1$

☐ $y = -0{,}4 \cdot x^2$ ☐ $y = 1 \cdot x^2$ ☐ $y = -3{,}5 \cdot x^2$ ☐ $y = \frac{3}{4} \cdot x^2$

- Erkläre für die Funktionen, die du *nicht* angekreuzt hast, warum deren Graph nicht gestaucht sein kann.

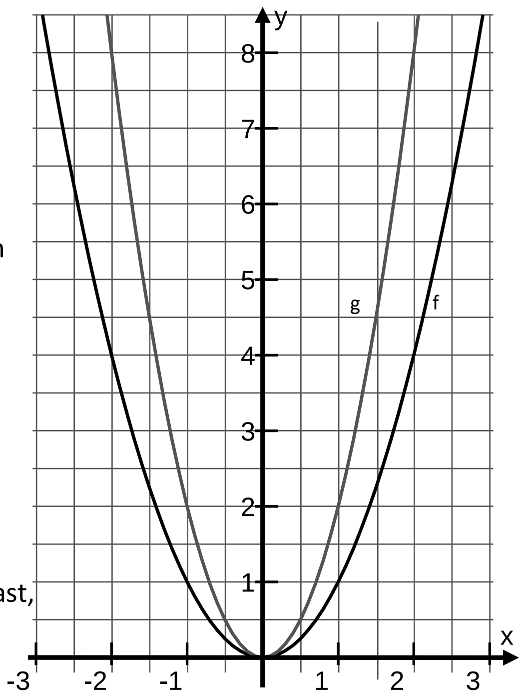
Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Objektvorstellung

Erkennen der Streckung einer Parabel anhand der Gleichung

25

In der Abbildung sind die Graphen der Funktionen
f: $y = x^2$ und g: $y = 2 \cdot x^2$ dargestellt.



Der Graph von g verläuft steiler als der Graph der Normalparabel f.
Das wird mit dem Begriff ***gestreckt*** beschrieben.
Gestreckte Parabeln entstehen, wenn der Funktionsterm x^2 mit einer Zahl multipliziert wird, deren **Betrag größer als 1** ist.

- Kreuze die Funktionen an, deren Graph gestreckt ist.

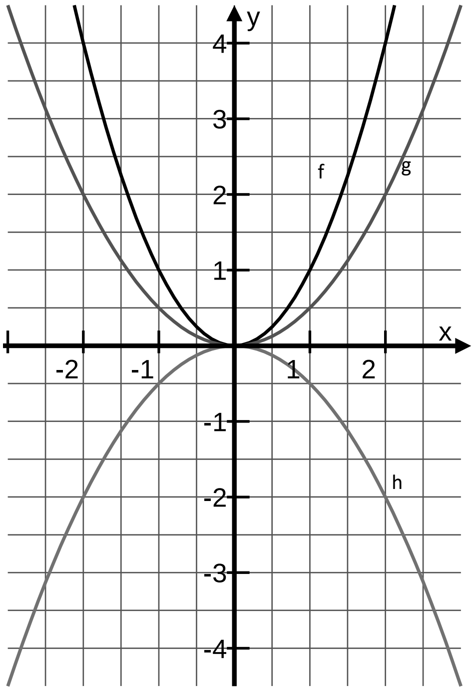
☐ $y = 7 \cdot x^2$ ☐ $y = x^2 + 2$ ☐ $y = -2{,}5 \cdot x^2$

☐ $y = \frac{8}{5} \cdot x^2$ ☐ $y = x^2 \cdot 1{,}3$ ☐ $y = \frac{2}{3} \cdot x^2$

- Erklärе für die Funktionen, die du *nicht* angekreuzt hast, warum deren Graph nicht gestreckt sein kann.

Erkennen der Öffnungsrichtung einer Parabel anhand der Gleichung **26**

Die Abbildung zeigt den Graphen der Normalparabel f: $y = x^2$ sowie die Graphen der Funktionen g: $y = 0{,}5 \cdot x^2$ und h: $y = -0{,}5 \cdot x^2$.



Die Graphen von f und g sind **nach oben geöffnete** Parabeln. Der Graph von h ist eine **nach unten geöffnete** Parabel.

- Beschreibe, an welcher Stelle der Funktionsgleichung du erkennen kannst, ob die Parabel nach oben oder nach unten geöffnet ist.
- Kreuze die Funktionen an, deren Graphen nach *unten* geöffnet sind.

☐ $y = 0{,}7 \cdot x^2$ ☐ $y = -x^2 + 0{,}2$ ☐ $y = 2 \cdot x^2 - 1$

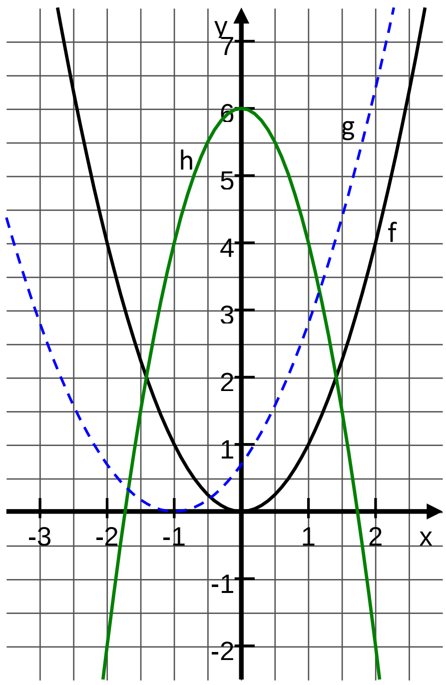
☐ $y = -0{,}4 \cdot x^2$ ☐ $y = 1 \cdot x^2$ ☐ $y = -3 \cdot x^2 + 5$

☐ $y = x^2 - 4x - 5$

Erkennen von Form und Öffnungsrichtung einer Parabel anhand der Gleichung **27**

In der Abbildung sind drei Graphen dargestellt.

f ist die Normalparabel $y = x^2$.



- Ordne den Graphen von g und h eine der folgenden 4 Funktionsgleichungen zu. Begründe deine Entscheidungen.

A $y = -0{,}5 \cdot x^2$ **C** $y = x^2 + 6$

E $y = -2x^2 + 6$ **F** $y = 0{,}7 \cdot (x + 1)^2$

Es bleiben zwei Funktionsgleichungen übrig.

- Erkläre, woran du erkennst, dass diese Gleichungen zu keinem der 3 Graphen gehören können.

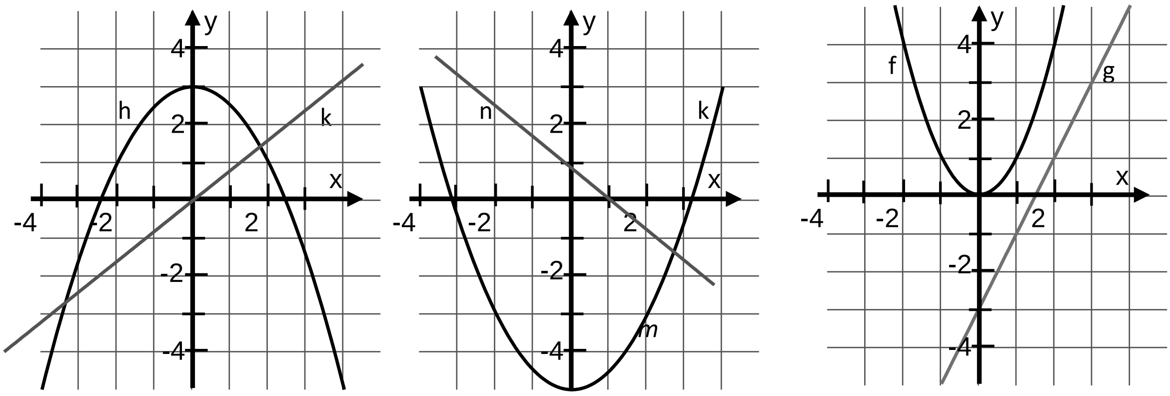
Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Objektvorstellung

Beschreiben typischer Eigenschaften von Graphen **28**

Die Graphen von ***proportionalen***, ***linearen*** und ***quadratischen*** Funktionen besitzen typische Eigenschaften.
In den nachfolgenden Abbildungen sind Graphen dieser drei Funktionsarten dargestellt.

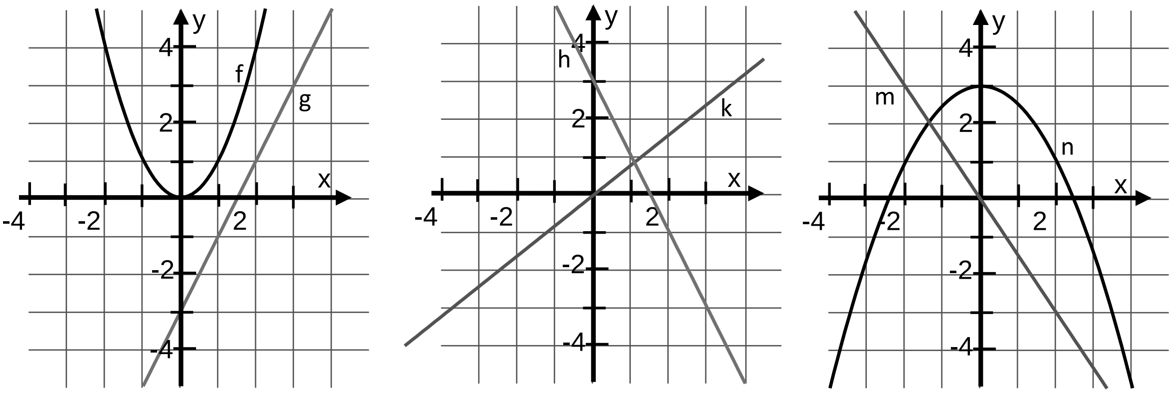
- Ordne die Graphen den Funktionsarten ***proportional***, ***linear*** oder ***quadratisch*** zu.
  Begründe.



Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Objektvorstellung

Zuordnen von Gleichungen und Graphen linearer und quadratischer Funktionen **29**



- Ordne die Funktionsgleichungen den Graphen zu.

A) $y = 0{,}8 \cdot x$ **B)** $y = -1{,}5 \cdot x$ **C)** $y = 2x - 3$

D) $y = -2x + 3$ **E)** $y = x^2$ **F)** $y = -0{,}5 \cdot x^2 + 3$

- Begründe deine Entscheidungen.

Nacheinanderausführen von Zuordnungsvorschriften

30

Fridolin sagt: Jede Zahl wird von mir verdoppelt und anschließend um eins erhöht.

Gustav sagt: Jede Zahl wird von mir quadriert.

Fridolin und Gustav überlegen, was passiert, wenn sie ihr Vorgehen hintereinander ausführen.

$$3 \xrightarrow{\text{Fridolin}} \boxed{2\cdot 3 + 1 = 5} \xrightarrow{\text{Gustav}} \boxed{5^2 = 25}$$

$$5 \xrightarrow{\text{Fridolin}} \boxed{} \xrightarrow{\text{Gustav}} \boxed{}$$

$$x \xrightarrow{\text{Fridolin}} \boxed{} \xrightarrow{\text{Gustav}} \boxed{}$$

- Fülle die Kästchen aus.

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Objektvorstellung

Nacheinanderausführen von Zuordnungsvorschriften

31

Fridolin sagt: Jede Zahl wird von mir verdoppelt und anschließend um eins erhöht.

Nun möchte Fridolin sein Vorgehen zweimal hintereinander ausführen.

$$3 \xrightarrow{\text{Fridolin}} \boxed{\underline{2\cdot 3 + 1}} \xrightarrow{\text{Fridolin}} \boxed{2\cdot(\underline{2\cdot 3 + 1}) + 1}$$

$$5 \xrightarrow{\text{Fridolin}} \boxed{} \xrightarrow{\text{Fridolin}} \boxed{}$$

$$x \xrightarrow{\text{Fridolin}} \boxed{} \xrightarrow{\text{Fridolin}} \boxed{?}$$

- Fülle die freien Kästchen aus.
- Ordne $\boxed{?}$ den richtigen Term zu. Begründe deine Entscheidung.

$\boxed{4(x + 2)}$ $\boxed{(4x + 1) + 1}$ $\boxed{2(2x + 1) + 1}$

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Objektvorstellung

Untersuchen der Nacheinanderausführung einer linearen und einer quadratischen Funktion **32**

Fridolin betrachtet die lineare Funktion f: $y = 3x + 2$.
Er möchte sie zweimal hintereinander ausführen.
Er überlegt:

$$x \xrightarrow{f} \boxed{\mathbf{3x + 2}} \xrightarrow{f} \boxed{3(3x + 2) + 2 = 9x + 8}$$

Nun möchte Gustav die quadratische Funktion g: $y = x^2$ zweimal hintereinander ausführen.

$$x \xrightarrow{g} \boxed{} \xrightarrow{g} \boxed{}$$

- Fülle die Kästchen aus.
- Überprüfe, ob der **Typ** der Funktion immer erhalten bleibt, wenn du eine Funktion zweimal hintereinander ausführst.

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Objektvorstellung

Untersuchen der Nacheinanderausführung von zwei linearen Funktionen **33**

Gegeben sind die Funktionen f: $y = x + 2$ und g: $y = 3x + 1$.

Fridolin und Gustav möchten diese Funktionen hintereinander ausführen. Sie überlegen, ob dabei die Reihenfolge eine Rolle spielt.

$$x \xrightarrow{f} \boxed{} \xrightarrow{g} \boxed{}$$

$$x \xrightarrow{g} \boxed{} \xrightarrow{f} \boxed{}$$

- Fülle die Kästchen aus.
- Vergleiche die Ergebnisse miteinander und entscheide, ob die Reihenfolge eine Rolle spielt.

Gegeben sind die beiden linearen Funktionen f: $y = 2x + 1$ und g: $y = 3x - 4$ sowie die quadratische Funktion h: $y = x^2$.

$$x \xrightarrow{f} \boxed{} \xrightarrow{g} \boxed{}$$

$$x \xrightarrow{f} \boxed{} \xrightarrow{h} \boxed{}$$

$$x \xrightarrow{h} \boxed{} \xrightarrow{g} \boxed{}$$

- Fülle die Kästchen aus.
- Gib an, welche Funktionsart entsteht, wenn
  a) man zwei lineare Funktionen hintereinander ausführt.
  b) eine lineare und eine quadratische Funktion hintereinander ausgeführt werden.

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

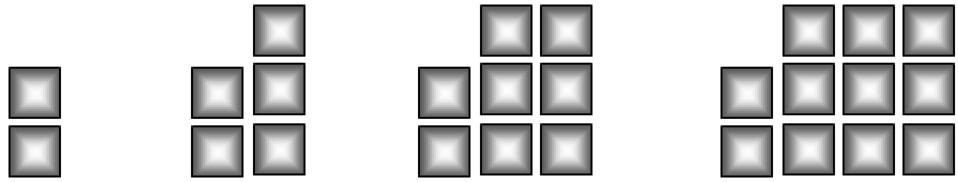
Übersicht über die Förderempfehlungen: 2a, b — E, F, G

Förderschritte zu den Diagnoseaufgaben

1. Fortsetzen von Zahlenfolgen mithilfe von Bildern
2. Erfassen der Struktur einer Zahlenfolge mithilfe von Bildern
3. Beschreiben einer Zahlenfolge mit einer Rechenvorschrift
4. Fortsetzen von Zahlenfolgen im Sachkontext mithilfe von Tabellen
5. Erkennen der Struktur einer Zahlenfolge mithilfe einer Grafik
6. Beschreiben der Zuordnung Etagenzahl – Höhe eines Hauses
7. Erkennen und Beschreiben einer gleichmäßigen Zunahme aus einer Grafik
8. Erkennen und Beschreiben einer gleichmäßigen Abnahme aus einer Grafik
9. Beschreiben des Anstieges einer Geraden mit verschiedenen Steigungsdreiecken
10. Ergänzen eines Diagramms zu einer beschriebenen Veränderung
11. Erfassen und Beschreiben einer Veränderung aus einer Tabelle
12. Ergänzen eines Diagramms zu sprachlich beschriebenen Veränderungen
13. Beschreiben eines Pflanzenwachstums anhand eines Diagramms
14. Beschreibung des Verlaufs eines Graphen und besonderer Punkte
15. Beschreiben von Pflanzenwachstum anhand verschiedener Wachstumskurven
16. Beschreiben der Art der Abhängigkeit zweier Größen anhand von Diagrammen
17. Untersuchen der Art der Abhängigkeit zweier Größen anhand einer Wanderroute
18. Beschreiben der Art der Abhängigkeit zweier Größen (gleichmäßige Geschwindigkeit)
19. Beschreiben der Art der Abhängigkeit zweier Größen (ungleichmäßige Geschwindigkeit)
20. Beschreiben der Art der Abhängigkeit zweier Größen (indirekte Proportionalität)
21. Identifizieren indirekt proportionaler Zuordnungen
22. Beschreiben der Art der Abhängigkeit zweier Größen anhand von Funktionsgraphen
23. Untersuchen von Parabeln auf Monotonie
24. Identifizieren von indirekter Proportionalität durch Vergleich von Wertepaaren
25. Untersuchen von Wertetabellen auf Monotonie

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Fortsetzen von Zahlenfolgen mithilfe von Bildern | **1**



1. Bild 2. Bild 3. Bild 4. Bild …

In einer Bilderfolge wurden die Kästchen gezählt und die Anzahlen in eine Tabelle eingetragen.

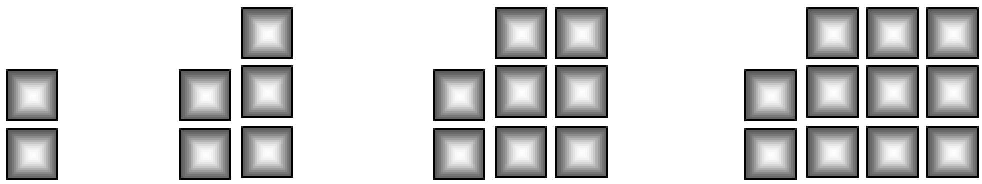
Nummer des Bildes	1	2	3	4	5
Anzahl der Kästchen	2		8	11	

+ ___

- Ergänze die fehlenden Zahlen in der Tabelle.
- Notiere an den Pfeilen jeweils die Veränderung.
- Vervollständige den Satz:

  Im nächsten Bild sind immer ______ Kästchen mehr als im Bild davor.

Erfassen der Struktur einer Zahlenfolge mithilfe von Bildern | **2**



1. Bild 2. Bild 3. Bild 4. Bild …

- Wie viele Kästchen sind in jedem Bild? Ergänze die Sätze.

  Im **1.** Bild sind **2** Kästchen.

  Im **2.** Bild sind **2 + 1 · 3** Kästchen.

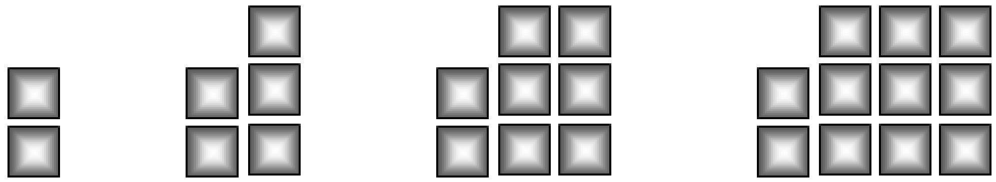
  Im **3.** Bild sind **2 + 2 · 3** Kästchen.

  Im **4.** Bild sind **2 +** ____ Kästchen.

  Im **5.** Bild sind **2 +** ____ Kästchen.

- Beschreibe, wie du die Anzahl der Kästchen im **10.** Bild bestimmen kannst.

Beschreiben einer Zahlenfolge mit einer Rechenvorschrift — **3**



1. Bild   2. Bild   3. Bild   4. Bild   …

Anika behauptet:

„Im nächsten Bild sind es immer 3 Kästchen mehr als im Bild davor.

Deshalb sind im Bild mit der Nummer **n** immer **2 + (n – 1) · 3** Kästchen.“

- Begründe anhand der Bilder, dass diese Behauptung richtig ist.

Fortsetzen von Zahlenfolgen im Sachkontext mithilfe von Tabellen — **4**

Julia möchte sich ein Tablet kaufen. Sie hat schon 180 € und spart jeden Monat weitere 15 € dazu.

Monat	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli
Gesamter Betrag in €	180						

- Trage den gesparten Gesamtbetrag für jeden Monat in die Tabelle ein.

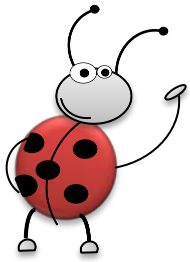
Collin spart schon länger für ein neues Handy.
Er schreibt jeden Monat auf, wie viel Geld er schon hat.

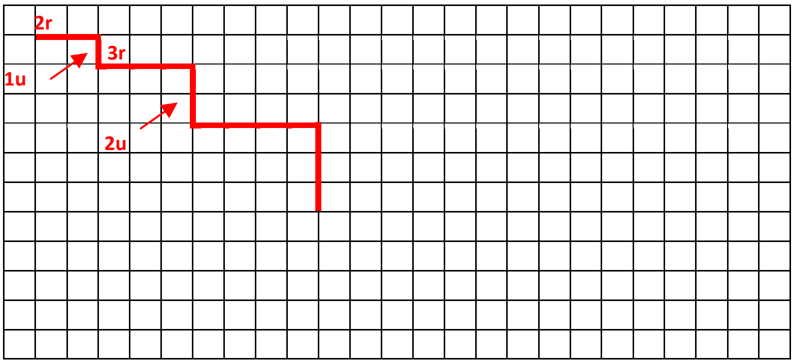
Monat	April	Mai	Juni	Juli	August	September	Oktober
Gesamter Betrag in €		125	150	175	200		

- Beschreibe, nach welchem Plan er sein Geld spart.
- Ergänze dann die Tabelle.
- Überlege, wie viel Geld er im März schon gespart hatte.

Erkennen der Struktur einer Zahlenfolge mithilfe einer Grafik — 5

Ein Käfer krabbelt wie dargestellt auf einem Karo-Raster abwechselnd nach rechts oder nach unten. In jedem Abschnitt läuft er die angezeigte Anzahl von Kästchen. Im ersten Abschnitt läuft er zwei Schritte nach rechts (2r). Die unten stehende Folge gibt die jeweiligen Kästchenzahlen an.





- Zeichne die nächsten Schritte des Käfers ein und ergänze die Folge um drei weitere Angaben.
  2r , 1u , 3r , 2u , 4r , 3u , … ____________________________
- Ergänze die Aussagen richtig:

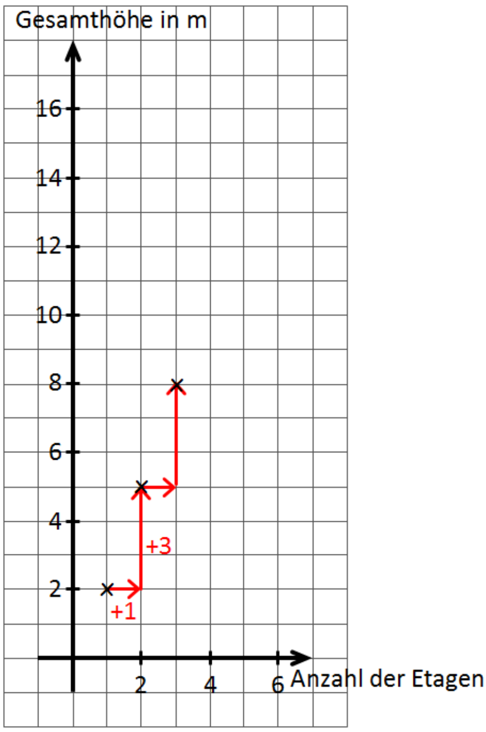
  Im 9. Abschnitt krabbelt der Käfer ____ Schritte nach rechts.

  Im 10. Abschnitt krabbelt der Käfer ____ Schritte nach ____________.

  Im __. Abschnitt krabbelt der Käfer 7 Schritte nach unten.

Abb.1: „Käfer“. Jeschek für Lisum, CC-BY-SA 4.0

Beschreiben der Zuordnung Etagenzahl – Höhe eines Hauses — 6



Mila sieht auf einem Bild, wie ein riesiges Hochhaus gebaut wird. Sie überlegt, wie hoch das Haus insgesamt wird.
Sie weiß, dass jede Etage 3 m hoch ist, nur die unterste Etage hat eine Höhe von 2 m über dem Erdboden.
Für ihre Überlegungen nutzt sie ein Diagramm.

Sie überlegt:

Wird die Anzahl der Etagen um 1 größer,

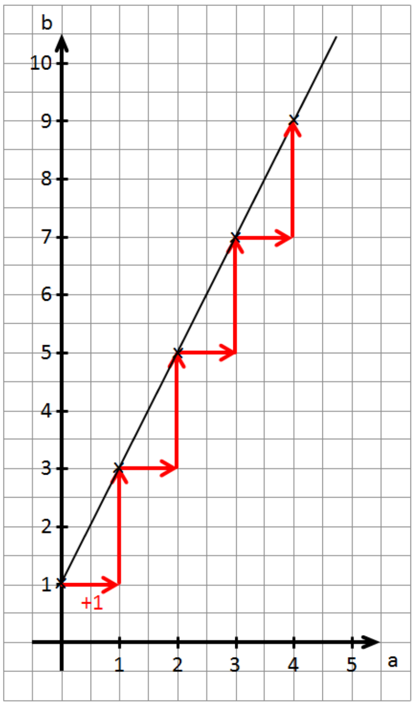
dann ______________ sich die Gesamthöhe um _______.

- Beschrifte die roten Pfeile im Diagramm.
- Trage auf die gleiche Weise weitere Punkte ein.

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Veränderungsvorstellung

Erkennen und Beschreiben einer gleichmäßigen Zunahme aus einer Grafik | **7**



Das Diagramm zeigt einen Zusammenhang zwischen den Größen a und b. Die Pfeile zeigen, wie sich b ändert, wenn a um 1 vergrößert wird.

- Schreibe an alle Pfeile die Veränderungen von a bzw. b.
- Beschreibe die gemeinsamen Veränderungen der beiden Größen für diese Zuordnung:

  Wenn a um 1 erhöht wird, dann wird b immer um

  ____ .

- Überlege:
  Wenn a um 3 erhöht wird, dann wird b

  ____ .

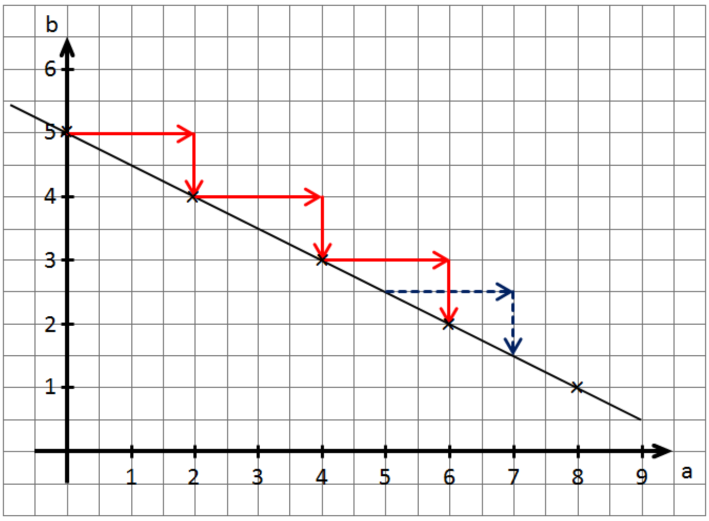
- Veranschauliche diese Veränderung mit Pfeilen in einer anderen Farbe.

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Veränderungsvorstellung

Erkennen und Beschreiben einer gleichmäßigen Abnahme aus einer Grafik | **8**

- Kennzeichne an den Pfeilen die Veränderungen von a und b.

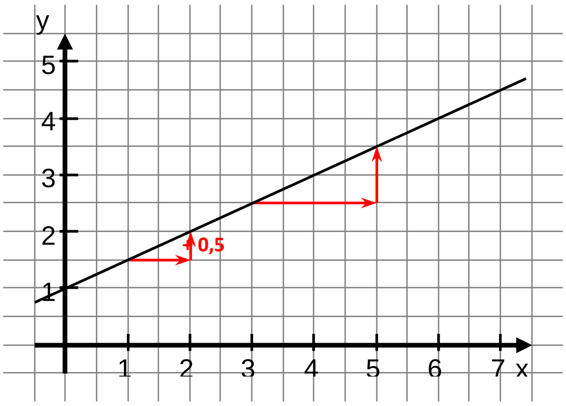


- Beschreibe die Veränderung:

  Wenn a um ____ erhöht wird, dann wird b ________________________________ .

- Betrachte die blauen (gestrichelten) Pfeile. Beschreibe auch hier die dargestellte Veränderung.
- Zeichne mit Farbe weitere Pfeile ein, die die gleiche Veränderung beschreiben.

Beschreiben des Anstieges einer Geraden mit verschiedenen Steigungsdreiecken | **9**



Die Pfeile zeigen das Beispiel: Wird x um 1 erhöht, dann wird y um 0,5 erhöht.

- Kennzeichne wie im Beispiel und formuliere die Veränderungen:

  Wird x um 2 erhöht, dann wird y um ____ erhöht.

  Wird x um 4 erhöht, dann wird y um ____ erhöht.

  Wird x um 5 erhöht, dann wird y um ____ erhöht.

- Suche weitere Beispiele.

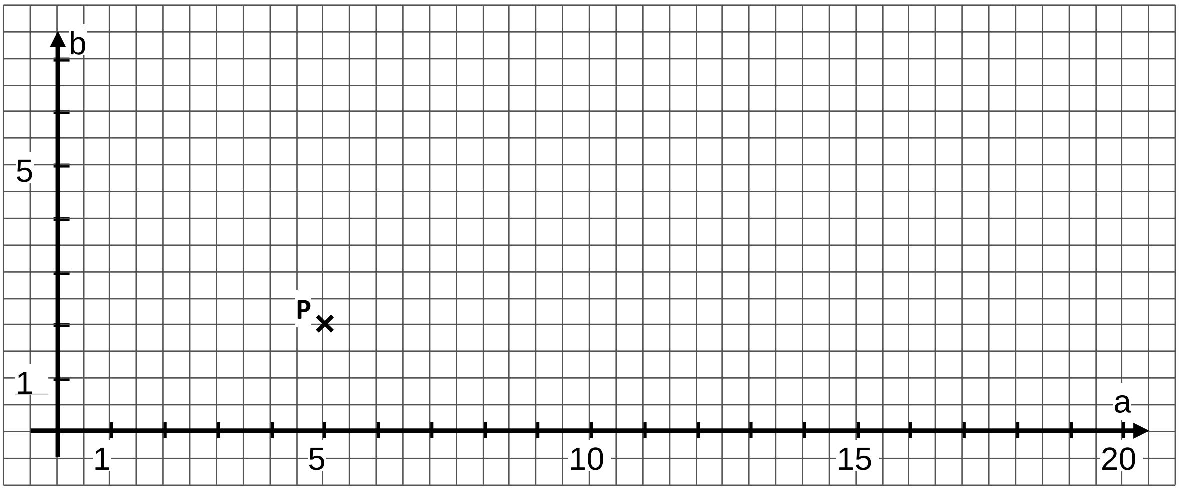
Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Veränderungsvorstellung

Ergänzen eines Diagramms zu einer beschriebenen Veränderung | **10**

Im Diagramm soll eine Zuordnung zwischen den Größen a und b dargestellt werden.
Der Punkt P(5|2) gehört zu dieser Zuordnung.
Für die Zuordnung gilt: **Wird a um 2 erhöht, dann wird b um 0,5 erhöht.**

- Erstelle mindestens drei weitere Punkte dieser Zuordnung im Diagramm.
- Gib auch einen Punkt der Zuordnung an, der links von P liegt.



Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Erfassen und Beschreiben einer Veränderung aus einer Tabelle — **11**

Die Tabelle beschreibt das Wachstum einer Pflanze, die zu Beginn der Beobachtungen 2 cm hoch ist.

Tag	0	1	3	7	10	12	15	16
Höhe in cm	2	4	7	11	21	24	26	27

+2

- Schreibe an die Pfeile, um wie viele cm die Höhe jeweils zugenommen hat.
- Beschreibe das Wachstum der Pflanze.

  Vom 1. bis zum 3. Tag wächst die Pflanze um ______ cm.

  Vom 3. bis zum 12. Tag wächst die Pflanze um ______ cm.

  Vom ______ bis zum ______ Tag wächst die Pflanze um 14 cm.

- Formuliere weitere Aussagen dieser Art.

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Veränderungsvorstellung

Ergänzen eines Diagramms zu sprachlich beschriebenen Veränderungen — **12**

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Das Wachstum einer Pflanze soll in einem Diagramm dargestellt werden. Gero liest aus dem Beobachtungsprotokoll vor und Laura trägt das Wachstum in ein Diagramm ein.

1. Nach einem Tag war die Pflanze 2 cm groß.
Sie macht ein Kreuz.

2. Vom 1. bis zum 3. Tag ist sie 3 cm gewachsen.

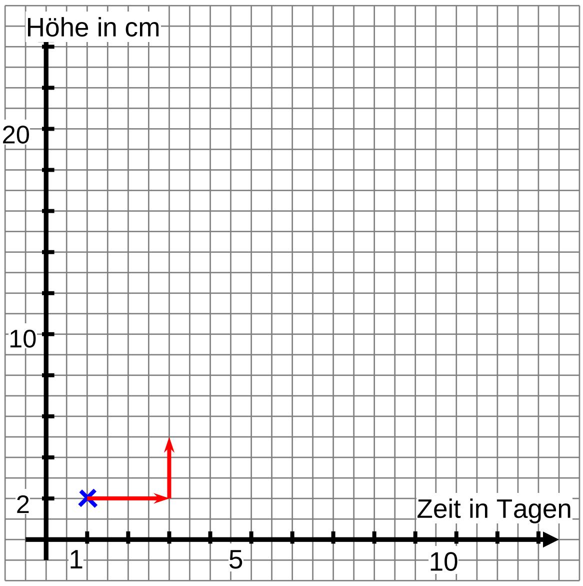
Laura überlegt: *„2 Tage sind vergangen und 3 cm sind dazugekommen…, also muss ich im Diagramm **2 Einheiten** nach rechts und **3 Einheiten** nach oben gehen.“*

Sie zeichnet Pfeile ein.

3. Vom 3. bis zum 7. Tag ist sie 4 cm gewachsen.

4. Vom 7. bis zum 10. Tag ist sie 10 cm gewachsen.

5. Vom 10. bis zum 12. Tag ist sie noch 3 cm gewachsen.



Die ersten beiden Werte hat Laura schon eingetragen.

- Ergänze das Diagramm so, wie Laura es begonnen hat.

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

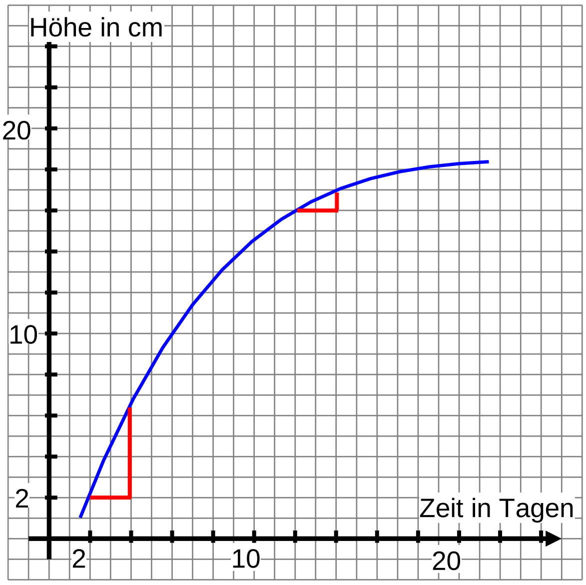
Idee der funktionalen Zusammenhänge
Veränderungsvorstellung

Beschreiben eines Pflanzenwachstums anhand eines Diagramms — **13**

Luna betrachtet ein Diagramm zum Wachstum einer Pflanze.

Sie sagt: *„Vom 2. bis zum 4. Tag ist die Pflanze ca. 4 cm gewachsen, aber vom 12. bis zum 14. Tag nur noch 1 cm".*

- Zeige im Diagramm, wie Luna diese Werte ablesen kann.
- Lies im Diagramm ab, wie viele cm die Pflanze vom 6. bis zum 8. Tag und vom 7. bis zum 11. Tag gewachsen ist. Kennzeichne im Diagramm genau wie Luna.
- Kennzeichne im Diagramm einen Zeitraum von sechs Tagen und lies ab, wie viele cm die Pflanze gewachsen ist.

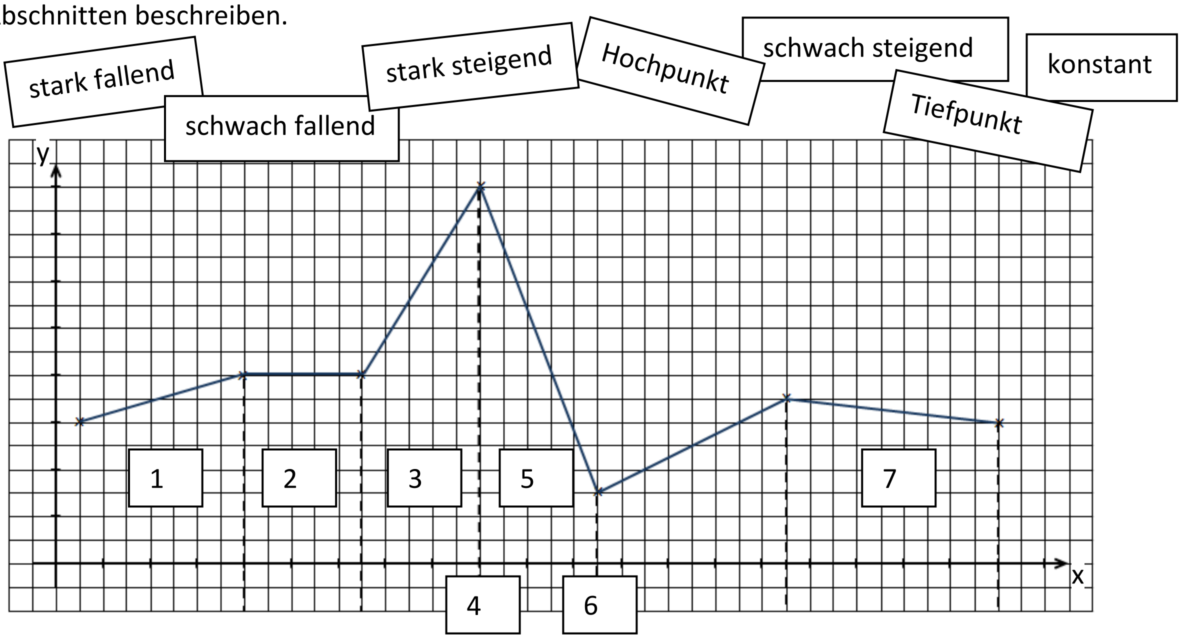


Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Veränderungsvorstellung

Beschreiben des Verlaufs eines Graphen und besonderer Punkte — **14**

Mit den Begriffen auf den Karten kannst du den Verlauf eines Graphen in verschiedenen Abschnitten beschreiben.



- Ordne den Abschnitten bzw. Punkten die passenden Begriffe zu.
- Beschreibe für die einzelnen Abschnitte des Graphen, wie sich y ändert wenn x größer wird.

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Beschreiben von Pflanzenwachstum anhand verschiedener Wachstumskurven

André und Merlin sprechen über das Diagramm zum Wachsen einer Pflanze.

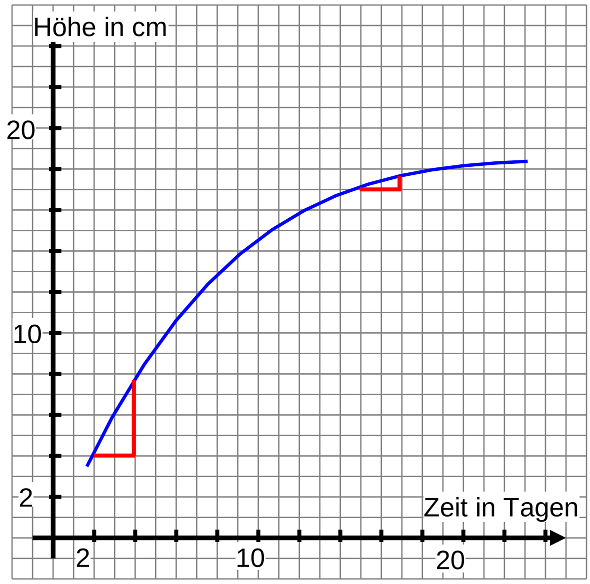
André fragt:

„Wächst die Pflanze immer langsamer?“

Merlin sagt:

„Na klar, das siehst du doch daran, dass immer weniger dazukommt, deshalb steigt die Linie nicht mehr so stark. Sie ist am Ende ganz flach“.

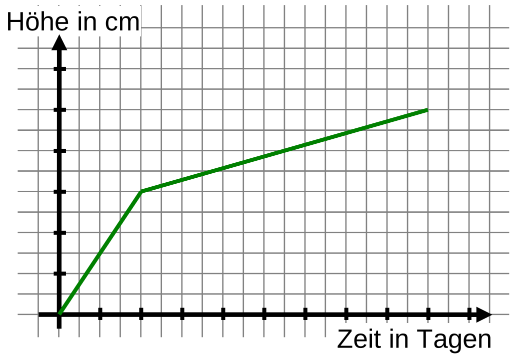
- Zeige am Diagramm genau, was Merlin meint. (Nutze die eingezeichneten Hilfslinien.)

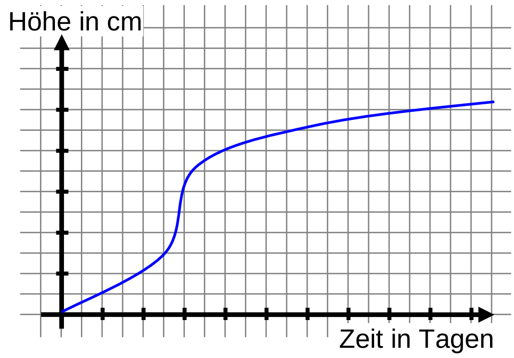


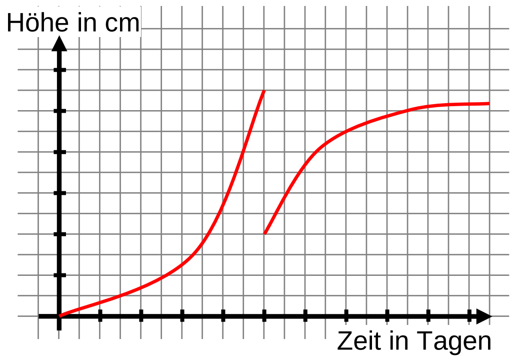
André merkt sich:

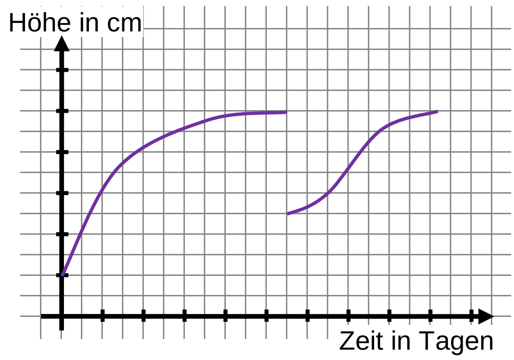
„Ist der Verlauf des Graphen steiler, wächst die Pflanze stärker.
Verläuft der Graph flacher, so wächst die Pflanze immer noch, aber nicht mehr so stark.“

- Beschreibe das Pflanzenwachstum für die vereinfacht dargestellten Wachstumskurven.





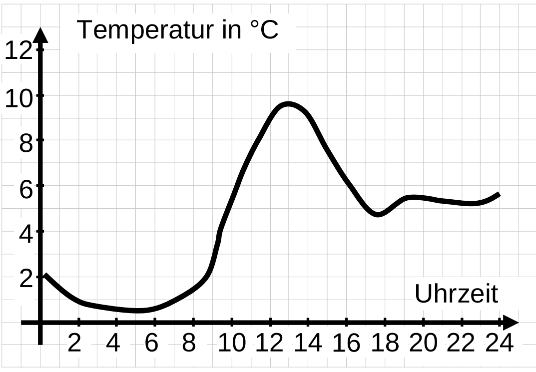


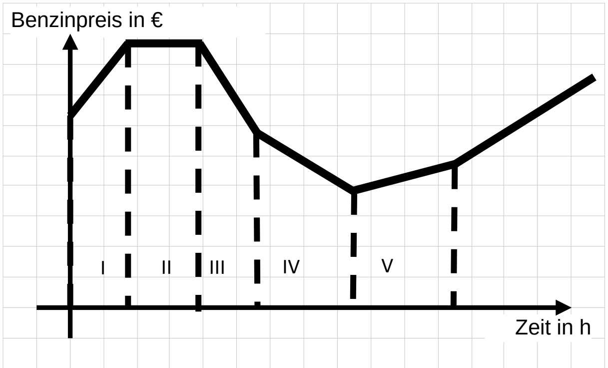


Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Beschreiben der Art der Abhängigkeit zweier Größen anhand von Diagrammen | **16**

- Betrachte das linke Diagramm und beschreibe, wie sich die Temperatur im Laufe der Zeit verändert: *„In der Nacht fällt die Temperatur fast auf 0° C. In den Morgenstunden steigt die Temperatur wieder an. Mittags um ca. 13:00 …“*
- Betrachte das rechte Diagramm und beschreibe die Veränderung des Benzinpreises in den Abschnitten I–V mit den passenden Begriffen, z. B. stark fallend, steigt schwach, am geringsten, bleibt konstant etc.

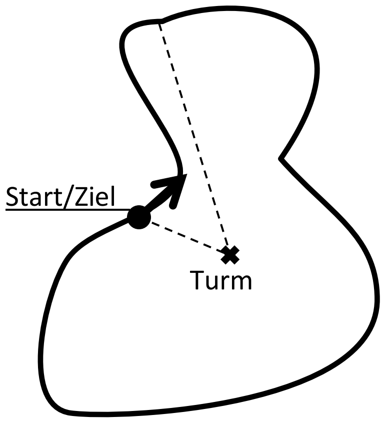




Untersuchen der Art der Abhängigkeit zweier Größen anhand einer Wanderroute | **17**

Familie Lustig wandert auf der dargestellten Route rund um einen Aussichtsturm.
Am Anfang wird ihre Entfernung zum Turm größer.
(Das zeigen die Hilfslinien in der Wanderkarte.)

- Zeige auf der Karte die Wegabschnitte, die zu folgenden Fällen passen:
  A – Die Entfernung zum Turm nimmt zu.
  B – Die Entfernung zum Turm nimmt ab.
  C – Die Entfernung zum Turm bleibt gleich.



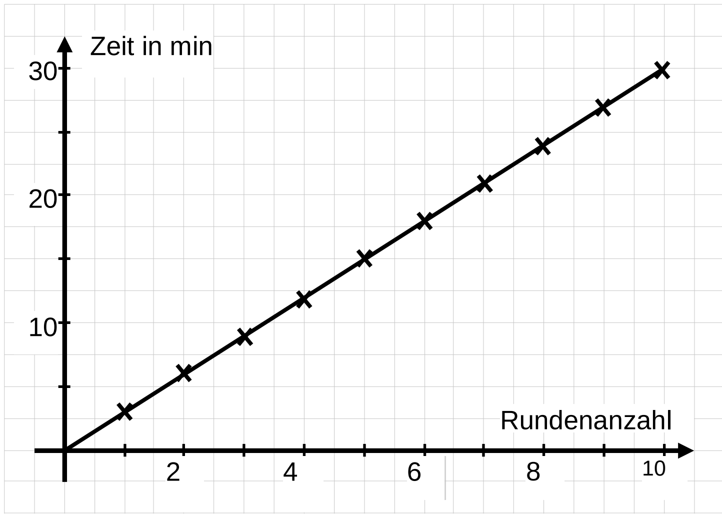
Es gibt weitere Wanderrouten rund um den Aussichtsturm.

- Zeichne eine Route, bei der die Entfernung zum Turm immer gleich bleibt.
- Zeichne eine andere Route, bei der die Entfernung zum Turm erst immer größer und dann immer kleiner wird.
- Zeichne eine beliebige Route und beschreibe, wie sich der Abstand zum Turm beim Wandern entlang dieser Route verändert.

Abb.2: Wegskizze“, Lisum, CC-BY-SA 4.0

Beschreiben der Art der Abhängigkeit zweier Größen (gleichmäßige Geschwindigkeit) **18**

Jonas trainiert für ein Radrennen und fährt im Gelände zehn Runden. Sein Freund stoppt die Zwischenzeiten und trägt sie nach jeder Runde in ein Diagramm ein.

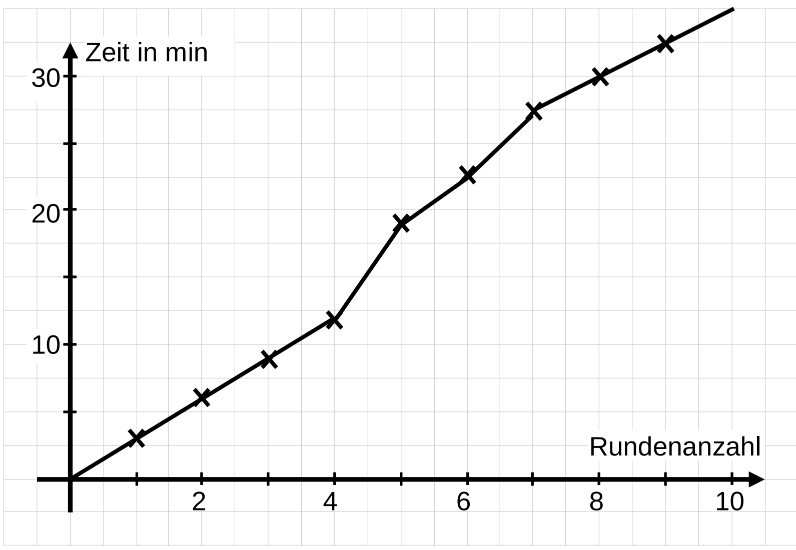


- Lies im Diagramm ab, welche Zeit Jonas für die erste Runde, die dritte Runde und die achte Runde benötigt hat.
- Erkläre, wie du am Graphen im Diagramm erkennen kannst, dass Jonas ganz gleichmäßig gefahren ist.

Beschreiben der Art der Abhängigkeit zweier Größen (ungleichmäßige Geschwindigkeit) **19**

Jonas trainiert für ein Radrennen und fährt im Gelände zehn Runden.
Sein Freund stoppt die Zwischenzeiten und trägt sie nach jeder Runde in ein Diagramm ein.

Anschließend sagt er zu Jonas:
„Heute bist du nicht so gleichmäßig gefahren.“



- Lies aus dem Diagramm ab, welche Zeit Jonas für die 3. Runde, die 5. Runde und die 8. Runde benötigt hat.
- Beschreibe, wie du im Diagramm erkennen kannst, dass die Rundenzeiten für die 5. und 6. Runde größer waren als davor und danach.

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Veränderungsvorstellung

Beschreiben der Art der Abhängigkeit zweier Größen (indirekte Proportionalität) **20**

5000 g Nüsse werden für den Verkauf in Tüten abgepackt.

Werden die Tüten mit 250 g gefüllt, werden es 20 Tüten, denn: $250 \cdot 20 = 5000$

Werden die Tüten nur mit 125 g gefüllt, werden es 40 Tüten, denn: $125 \cdot 40 = 5000$

Werden die Tüten mit 500 g gefüllt, werden es 10 Tüten, denn: $500 \cdot 10 = 5000$

Werden die Tüten mit x g gefüllt, werden es 5000 : x Tüten, denn: $x \cdot (5000 : x) = 5000$

Zuordnungen $a \to b$, für die $a \cdot b$ = konstant gilt, heißen **indirekt proportionale** Zuordnungen.
(Zum Beispiel ist „Menge Nüsse pro Tüte → Anzahl benötigter Tüten“ indirekt proportional.)

- Ergänze die Sätze für indirekt proportionale Zuordnungen:

Wird die eine Größe verdoppelt, dann wird die zugeordnete Größe ________________.

Wird die eine Größe halbiert, dann wird die zugeordnete Größe ________________.

Wird die eine Größe verdreifacht, dann wird die zugeordnete Größe ________________.

Wird die eine Größe ______________ , dann wird die zugeordnete Größe ________________.

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Veränderungsvorstellung

Identifizieren indirekt proportionaler Zuordnungen **21**

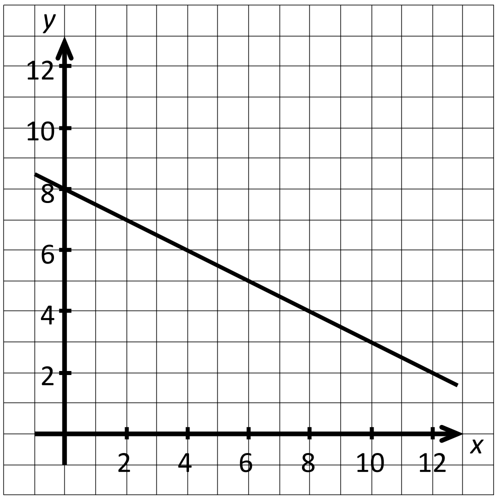
- Untersuche, ob die Zuordnungen $a \to b$ indirekt proportional sind.
  Prüfe dafür, wie sich die Größe b verändert, wenn sich die erste Größe a verdoppelt, halbiert, verdreifacht, …

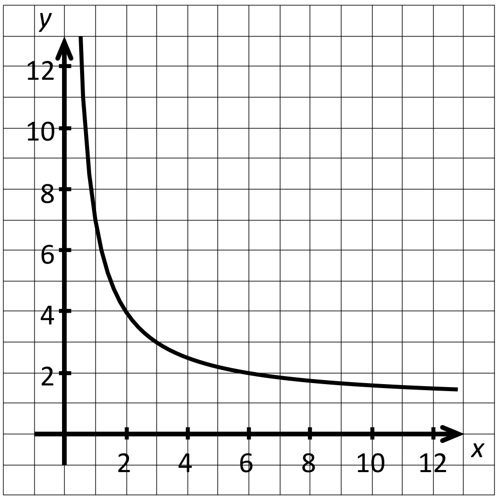
Beispiel	**Größe a**	**Größe b**
120 Orangen werden gleichmäßig aufgeteilt und in Netze verpackt.	Anzahl der Netze	Anzahl der Orangen pro Netz
Jan läuft 1200 m.	Zeit	Entfernung zum Ziel
Ein Auto fährt 500 km weit.	Geschwindigkeit	Fahrzeit
Ein Rechteck ist 24 cm² groß.	Länge in cm	Breite in cm
36 Bonbons werden gerecht verteilt.	Anzahl der Kinder	Anzahl der Bonbons je Kind
Aus einem Fass laufen pro Minute 2 Liter Wasser.	Auslaufzeit	Wasserstand im Fass
Eine Strecke wird in gleichlange Abschnitte geteilt.	Anzahl der Abschnitte	Länge eines Abschnitts
Eine Strecke wird in gleichlange Abschnitte geteilt.	Länge eines Abschnitts	Anzahl der Abschnitte

Beschreiben der Art der Abhängigkeit zweier Größen anhand von Funktionsgraphen | **22**

Gegeben sind zwei verschiedene Funktionsgraphen.

- Beschreibe jeweils, wie sich die y-Werte verändern, wenn die x-Werte immer größer werden.





Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

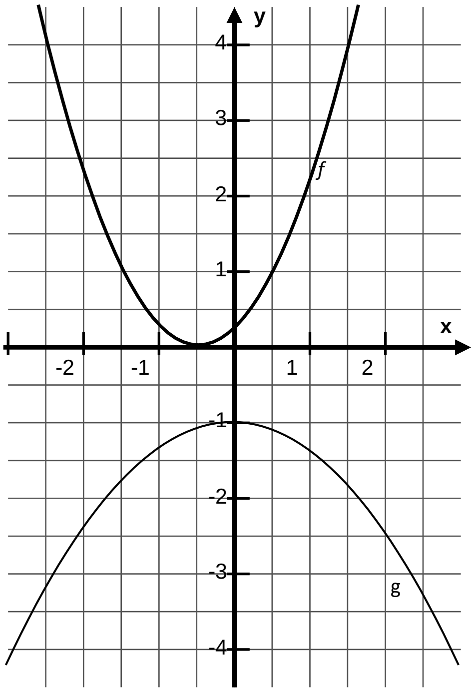
Idee der funktionalen Zusammenhänge
Veränderungsvorstellung

Untersuchen von Parabeln auf Monotonie | **23**

Im nebenstehenden Koordinatensystem sind die Graphen zweier quadratischer Funktionen f und g dargestellt.

- Beschreibe den Verlauf des jeweiligen Graphen. Benutze dafür die Satzbausteine aus dem Satzbaukasten.
- Gib die Stelle (x-Wert) an, an der sich das Steigungsverhalten ändert.

Satzbaukasten
monoton steigend
monoton fallend
Je größer die Werte für x werden, desto…
Je kleiner die Werte für x werden, desto …



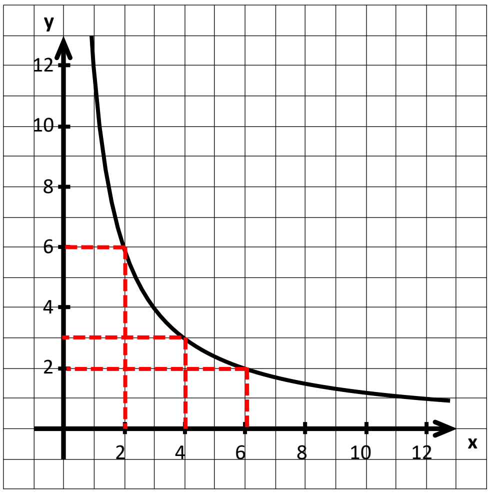
Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

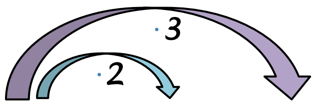
Identifizieren von indirekter Proportionalität durch Vergleich von Wertepaaren

Verdoppelt man bei einer indirekt proportionalen Zuordnung den x-Wert, so halbiert sich der y-Wert.

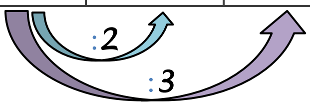
Verdreifacht man den x-Wert, wird der y-Wert gedrittelt.

Werden diese Wertepaare im Diagramm eingetragen, erhält man eine spezielle Kurve. Diese heißt **Hyperbel**.

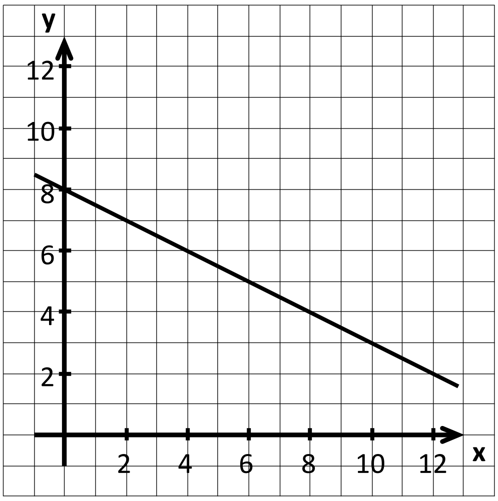


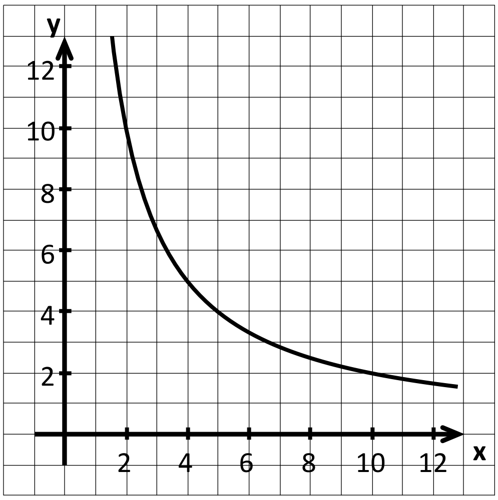


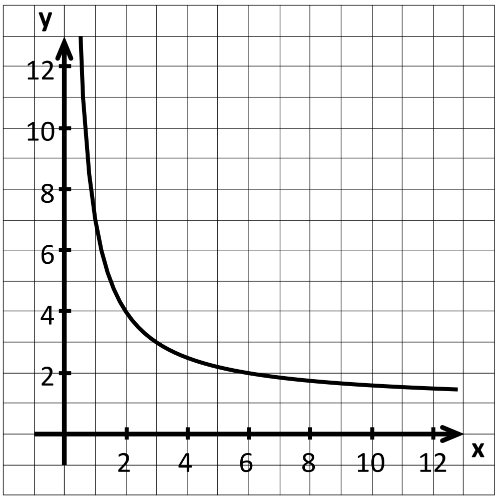
x	2	4	6
y	6	3	2

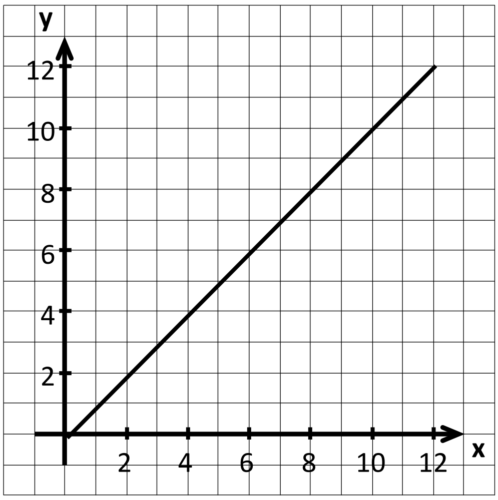


- Untersuche, ob die folgenden Darstellungen zu indirekt proportionalen Zuordnungen gehören. Prüfe dafür, ob der oben beschriebene Zusammenhang gilt.









Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Untersuchen von Wertetabellen auf Monotonie

In den folgenden Wertetabellen findest du Wertepaare zweier quadratischer Funktionen f und g.

x	– 4	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3
f(x)	7	2	– 1	– 2	– 1	2	7	14

x	– 4	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3
g(x)	– 33	– 19	– 9	– 3	– 1	– 3	– 9	– 19

- Kennzeichne den Bereich, in dem die y-Werte immer kleiner werden, rot und den Bereich, in dem die y-Werte immer größer werden, grün.
- Beschreibe, wie sich die y-Werte verhalten, wenn der x-Wert immer größer/kleiner wird.
- Gib jeweils die Stelle (x-Wert) an, an der sich das Steigungsverhalten ändert.

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Veränderungsvorstellung

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Übersicht über die Förderempfehlungen: 1a, b — E, F, G

Förderschritte zu den Diagnoseaufgaben

1. Erfassen und Beschreiben von Bilderfolgen mit Worten
2. Strukturieren von Zahlenfolgen mit Bildern
3. Beschreiben von Bilderfolgen mit Termen
4. Erstellen von Zahlenfolgen mit Termen
5. Beschreiben von Zahlenfolgen mit Worten und Termen
6. Darstellen einer proportionalen Zuordnung mit Mengendiagrammen
7. Darstellen einer Zuordnung mithilfe von Pfeilen
8. Beschreiben der Eindeutigkeit einer Zuordnung
9. Erkennen der Eineindeutigkeit einer Zuordnung
10. Darstellen proportionaler Zuordnungen in einer Tabelle
11. Erstellen eines Graphen zu einer Wertetabelle (direkte Proportionalität)
12. Ermitteln von Wertepaaren zu einer indirekten Proportionalität
13. Erstellen eines Graphen zu einer Wertetabelle (indirekte Proportionalität)
14. Darstellen einer (linearen) Zuordnung in einer Wertetabelle und in einem Koordinatensystem
15. Darstellen verschiedener Zuordnungen in Wertetabellen
16. Darstellen verschiedener Zuordnungen in Koordinatensystemen (verschiedene Achseneinteilungen)
17. Beschriften von Koordinatenachsen
18. Ablesen von Wertepaaren einer proportionalen Zuordnung im Koordinatensystem
19. Eintragen von Wertepaaren in ein Koordinatensystem
20. Ablesen von Informationen aus dem Graphen zu einer Zuordnung im Sachkontext
21. Ablesen und Ergänzen von Werten in einer Wertetabelle im Sachkontext
22. Ausfüllen einer Wertetabelle auf Grundlage einer Zuordnung im Sachkontext
23. Ablesen von Informationen aus einer Wertetabelle (Werte interpolieren)
24. Wechsel der Darstellung von Wertetabelle zu Gleichung im Sachkontext
25. Erstellen einer Wertetabelle zu einer linearen Funktion im Sachkontext
26. Wechsel der Darstellungsform von Wertetabelle zu Graph im Sachkontext
27. Wechsel der Darstellungsform von Wertetabelle zu Graph im Sachkontext (abschnittsweise definierte Funktion)
28. Untersuchen des Zusammenhanges von Zuordnungsvorschrift und Form einer Parabel (gestaucht)
29. Untersuchen des Zusammenhanges von Zuordnungsvorschrift und Form einer Parabel (gestreckt)
30. Untersuchen des Zusammenhanges von Zuordnungsvorschrift und Form einer Parabel (unten geöffnet)

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Zuordnungsvorstellung

Erfassen und Beschreiben von Bilderfolgen mit Worten — **1**

- Beschreibe zu jedem Bild die Symbolfolge und setze sie fort.

Bild 1	● ● ● ● △ △ △ ■ ■ ● ● ● ● △ △ △ ■ ■
Bild 2	● ● ● △ △ ■ ● ● ● △ △ ■ ● ● ● △ △ ■
Bild 3	● ● △ ● ● △ ● ● △ ● ● △ ● ● △ ● ● △

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Zuordnungsvorstellung

Strukturieren von Zahlenfolgen mit Bildern — **2**

Lisa hat eine Tüte Schokolinsen. Sie isst um 13.00 Uhr drei davon.
Zu jeder folgenden Stunde isst sie immer eine mehr als zuvor.
Wie viele wird sie um 14.00 Uhr, 15.00 Uhr, 16.00 Uhr, 19.00 Uhr essen?

- Zeichne in die Tabelle die Linsen, die sie zu den jeweiligen Uhrzeiten isst.

	Schokolinsen
13.00 Uhr	●●●
14.00 Uhr	
15.00 Uhr	
16.00 Uhr	
19.00 Uhr	

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Zuordnungsvorstellung

Beschreiben von Bilderfolgen mit Termen — **3**

Lisa hat 25 Schokolinsen. Sie isst zuerst vier Stück.
Danach isst sie immer zwei Stück mehr als beim vorigen Mal.

- Stelle in der Tabelle als Bilderfolge dar, wie viele Schokolinsen sie jeweils noch hat.

	Bild	Term
Bild 1		
Bild 2		
Bild 3		
Bild 4		

- Ordne jedem Bild einen Term zu.

25 – 4 – (4 + 2) – (4 + 2 + 2)	25 – 4 – (4 + 2)	25 – 4	25

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Zuordnungsvorstellung

Erstellen von Zahlenfolgen zu Termen — **4**

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Die Gleichungen geben Zuordnungen an.

- Fülle die Wertetabellen aus.

Gleichung: **a = 2 · n**

n	1	2	3	4	5
a					

Gleichung: **b = 2 · n + 3**

n	1	2	3	4	5
b					

Auch die folgende Tabelle beschreibt eine Zuordnung.

n	1	2	3	4	5
c	10	20	30	40	50

Jonas behauptet: „Die Zuordnung kann auch durch die Gleichung **c = 10 · n** beschrieben werden.“

- Hat Jonas recht? Begründe.

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Zuordnungsvorstellung

Beschreiben von Zahlenfolgen mit Worten und Termen — 5

In den Tabellen sind Wertepaare dargestellt. Jeder Zahl n wird eine Zahl a bzw. b zugeordnet.

n	0	1	2	3	4	5
a	0	2	4	6	8	10

- Beschreibe mit Worten, wie die Zuordnung genau erfolgt.

Jeder Zahl n …

n	0	1	2	3	4	5
b	1	3	5	7	9	11

- Gib eine Gleichung an, die diese Zuordnung beschreibt.

b =

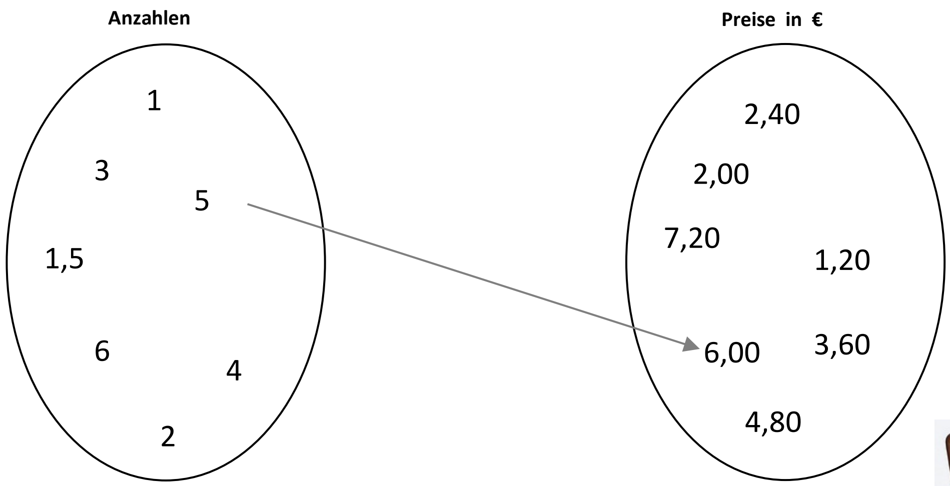
Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Zuordnungsvorstellung

Darstellen einer proportionalen Zuordnung mit Mengendiagrammen — 6

In einem Spielzeugladen werden Schlümpfe verkauft. Ein Schlumpf kostet 1,20 €.



Jeder Anzahl von Schlümpfen wird ihr Preis zugeordnet.

- Zeichne die Pfeile.
- Welche Werte ergeben keinen Sinn? Begründe.

Abb.: 1 „Schlumpf“ https://pixabay.com/de/schlumpf-schl%C3%BCmpfe-figur-spielzeug-2098272/ (20.12.2017) - CC0

Darstellen einer Zuordnung mithilfe von Pfeilen **7**

Die Handball-AG einer Schule trainiert einmal pro Woche. Es kommen immer unterschiedlich viele Kinder. Jedes Dreier-Team trainiert mit einem Ball.

- Verbinde die passenden Kästen miteinander.

1. Woche 9 Kinder	0 Bälle
2. Woche 27 Kinder	3 Bälle
3. Woche 57 Kinder	7 Bälle
4. Woche 0 Kinder	9 Bälle
5. Woche 33 Kinder	11 Bälle
6. Woche 21 Kinder	19 Bälle

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Zuordnungsvorstellung

Beschreiben der Eindeutigkeit einer Zuordnung **8**

Laura erklärt: „Von einer **eindeutigen** Zuordnung spricht man, wenn jedem Wert **genau ein** zweiter Wert zugeordnet wird.“

Lisa schlussfolgert: „Das ist genauso, wenn ich jedem Kind seinen Geburtstag zuordne.“

Karl ergänzt: „Oder ich ordne mein Lehrbuch einem Unterrichtsfach zu.“

- Finde weitere Beispiele für eindeutige Zuordnungen.

Emil fragt: „Ist es auch eine eindeutige Zuordnung, wenn ich jedem Geburtstag ein Kind zuordne?“

- Beantworte Emils Frage und begründe.

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Zuordnungsvorstellung

Erkennen der Eineindeutigkeit einer Zuordnung — **9**

Laura erklärt: „Von einer **<u>ein</u>eindeutigen** Zuordnung spricht man, wenn jedem Wert **genau ein** zweiter Wert zugeordnet wird und dies **auch umgekehrt** so ist.“

Lisa schlussfolgert: „Das ist genauso, wenn einem Auto ein Kennzeichen gegeben wird und man am Kennzeichen genau das Auto erkennen kann.“

Karl ergänzt: „Jedes Telefon hat genau eine Nummer und diese Nummer führt auch nur zu genau diesem Telefon.“

- Finde weitere Beispiele.
- Entscheide, ob die folgenden Zuordnungen <u>ein</u>eindeutig oder nur eindeutig sind.

  - Jeder Person wird ein Alter zugeordnet.
  - Jedem Schüler wird eine eigene Schülermailadresse zugeordnet.
  - Jedem Lehrer wird genau ein Raum zugeordnet, in dem nur er unterrichtet.
  - Jedem Schüler wird ein Klassenlehrer zugeordnet.
  - Jedem Angestellten wird eine Personalnummer zugeordnet.

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Zuordnungsvorstellung

Darstellen proportionaler Zuordnungen in einer Tabelle — **10**

Für eine proportionale Zuordnung gilt immer: $y = k \cdot x$
Dabei ist k eine feste Zahl und heißt Proportionalitätsfaktor.

- Bestimme den Proportionalitätsfaktor in der Wertetabelle.

x	1	2	3	4	5	6
y	3	6	9	12	15	18

- Bestimme aus der angefangenen Tabelle den Proportionalitätsfaktor und setze die Tabelle dann fort.

x	1	2	3	4	5	6
y	4	8				

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

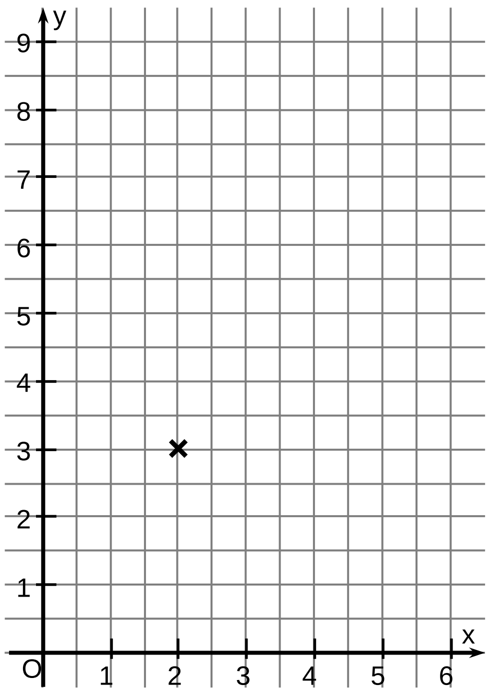
Idee der funktionalen Zusammenhänge
Zuordnungsvorstellung

Erstellen eines Graphen zu einer Wertetabelle (direkte Proportionalität) **11**

- Stelle die Zuordnung aus der Tabelle im Koordinatensystem dar.

x	0	1	2	3	4	5	6
y	0	1,5	3	4,5	6	7,5	9

- Prüfe, ob sich alle Punkte durch eine Gerade verbinden lassen.



Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Zuordnungsvorstellung

Ermitteln von Wertepaaren zu einer indirekten Proportionalität **12**

Bei einer indirekt proportionalen Zuordnung gilt für alle Wertepaare: „Das Produkt aus dem vorgegeben Wert (x) und dem zugeordneten Wert (y) ist immer gleich (Produktgleichheit).“

- Trage weitere Werte so in die Tabelle ein, dass die Zuordnung indirekt proportional ist.

x	24	12	8	6	4	2
y	1					

Eine Klasse hat Kekse für den Basar gebacken. 80 Kekse sollen gleichmäßig in Tüten verteilt werden.

- Vervollständige die Tabelle.
- Finde ein weiteres Wertepaar.

Zahl der Kekse pro Tüte	Anzahl der Tüten
4	
5	
8	
10	

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Zuordnungsvorstellung

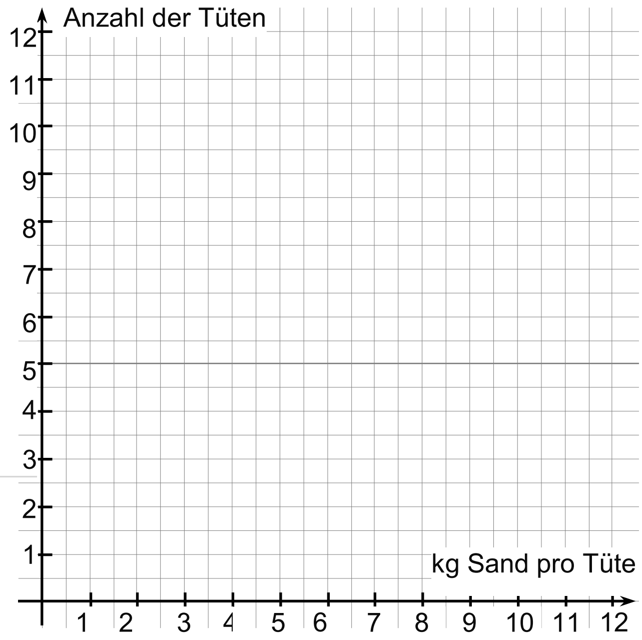
Erstellen eines Graphen zu einer Wertetabelle (indirekte Proportionalität) — **13**

12 kg Sand sollen gleichmäßig in Tüten verteilt werden.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten der Aufteilung:

kg Sand pro Tüte	12	4	3	2	1,5	1
Anzahl der Tüten	1	3	4	6	8	12

- Stelle die Zuordnung im Koordinatensystem dar.
- Prüfe, ob sich alle Punkte durch eine Gerade verbinden lassen.



Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Zuordnungsvorstellung

Darstellen einer (linearen) Zuordnung in einer Wertetabelle und in einem Koordinatensystem — **14**

Eine Zuordnung ist durch die Gleichung $\mathbf{y = \frac{1}{4} \cdot x + 2}$ gegeben.

- Fülle die Wertetabelle aus.

x	0	1	2	3	4	5	6
y							

- Stelle die Zuordnung in einem Koordinatensystem dar.

Darstellen verschiedener Zuordnungen in Wertetabellen

Die drei Gleichungen beschreiben jeweils eine Zuordnung.

- Vervollständige dazu passend die Wertetabellen.

$\mathbf{a = x \cdot (x - 3)}$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
a							

$\mathbf{b = \frac{x^2}{5}}$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
b							

$\mathbf{c = 50x + 75}$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
c							

Darstellen verschiedener Zuordnungen in Koordinatensystemen

Nachfolgend sind drei Funktionen durch ihre Gleichung und je eine dazugehörige Wertetabelle gegeben.

- Lege für jede dieser Funktionen ein eigenes Koordinatensystem an.
  Stelle die Funktionen im Koordinatensystem dar.

$\mathbf{a = x \cdot (x - 3)}$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
a	18	10	4	0	−2	−2	0

$\mathbf{b = \frac{x^2}{5}}$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
b	1,8	0,8	0,2	0	0,2	0,8	1,8

$\mathbf{c = 50x + 75}$

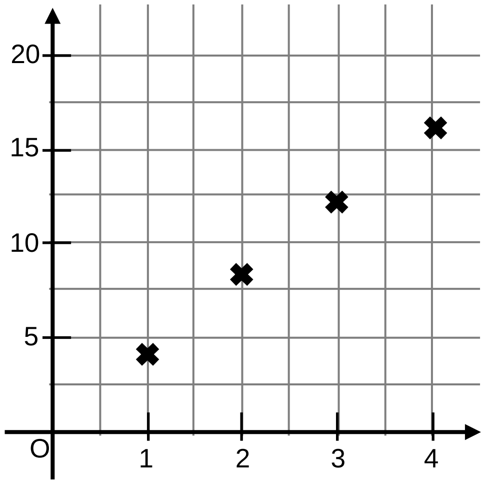
x	−3	−2	−1	0	1	2	3
c	−75	−25	25	75	125	175	225

Beschriften von Koordinatenachsen

Beim Telefonieren werden jeder Gesprächszeit ihre Kosten zugeordnet.

Diese Zuordnung soll im Diagramm dargestellt werden.

- Ordne jeder Achse eine passende Beschriftung zu.



Kosten in ct

Anzahl der Anrufe

Zeit in min

Kosten pro Monat

Zeit je Telefongespräch

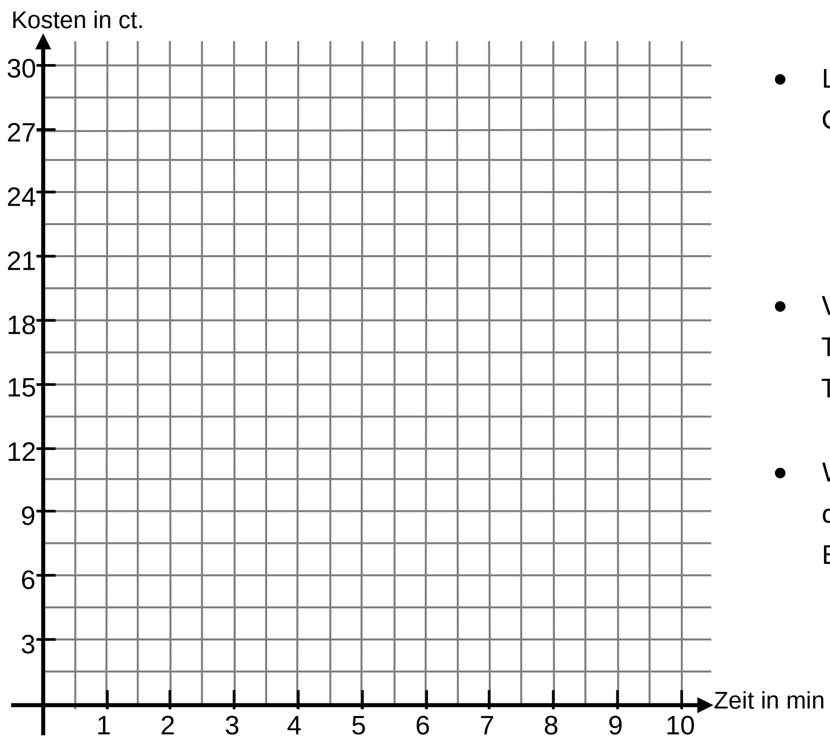
Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Zuordnungsvorstellung

Ablesen von Wertepaaren einer proportionalen Zuordnung im Koordinatensystem

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Beim Telefonieren werden jeder Gesprächszeit ihre Kosten zugeordnet.



- Lies die Kosten für folgende Gesprächszeiten ab:
  - 1 Minute
  - 2 Minuten
  - 4 Minuten

- Vervollständige die Grafik. Trage die Kosten für Telefonate bis 10 Minuten ein.

- Wie viel kostet ein Telefonat, das 14 Minuten dauert? Begründe.

Eintragen von Wertepaaren in ein Koordinatensystem

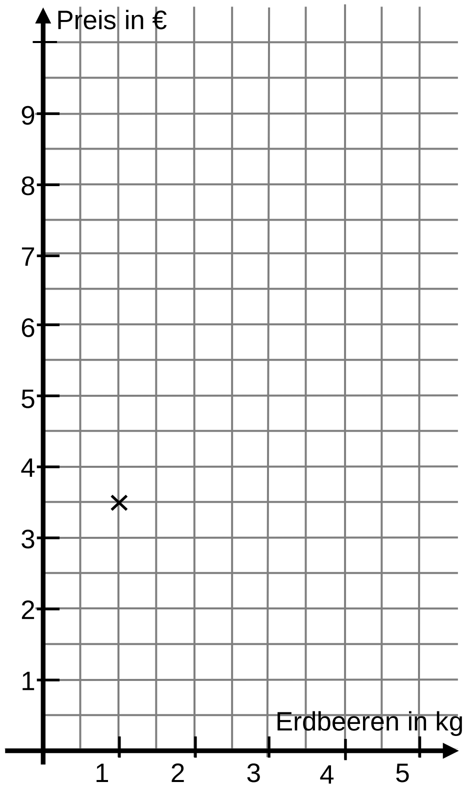
19

Auf einer Erdbeerplantage darf man, gegen Bezahlung, für sich selbst Erdbeeren pflücken. Ein leerer Korb kostet 2,00 €. Jedes gepflückte Kilogramm Erdbeeren kostet 1,50 €.

Erdbeeren in kg	1	2	3	4	5
Endpreis in Euro	3,50	5,00	6,50	8,00	9,50

Elias hat für verschiedene Mengen die Preise in die Tabelle eingetragen.

- Trage die Wertepaare der Tabelle in das Koordinatensystem ein.



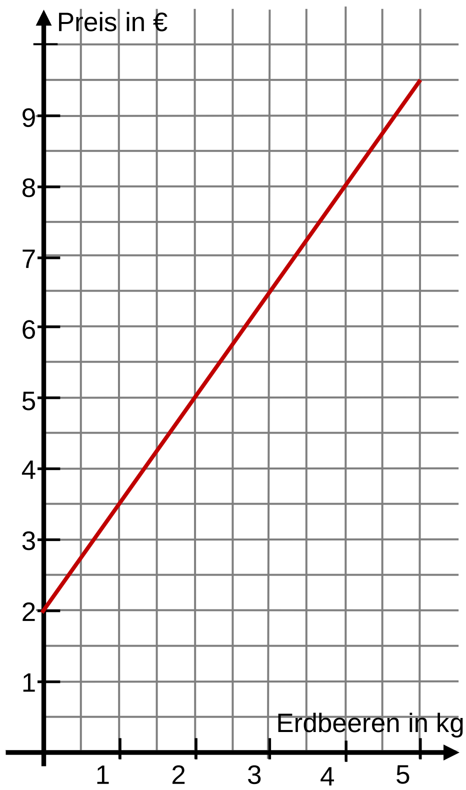
Ablesen von Informationen aus dem Graphen zu einer Zuordnung im Sachkontext

20

Auf einer Erdbeerplantage darf man, gegen Bezahlung, für sich selbst Erdbeeren pflücken. Ein leerer Korb kostet 2,00 €. Jedes gepflückte Kilogramm Erdbeeren kostet 1,50 €.

Der Zusammenhang wurde im Koordinatensystem dargestellt.

- Erkläre die Bedeutung des Punktes (0|2) in diesem Zusammenhang.
- Du lässt dir einen Korb geben und möchtest 3 kg Erdbeeren pflücken.
  Lies im Koordinatensystem ab, welchen Preis du zahlen musst.
- Beim Wiegen wird festgestellt, dass es nur 2,5 kg sind. Lies ab, wie viel zu bezahlen ist.
- Angenommen, du hast 9,00 € dabei.
  Bestimme, wie viel kg Erdbeeren (mit Korb) du pflücken könntest.



Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Zuordnungsvorstellung

Ablesen und Ergänzen von Werten einer Wertetabelle im Sachkontext **21**

In der Nähe eines Flughafens ist ein Parkhaus. Bei der Einfahrt zahlt man immer einen Grundpreis. Der Gesamtpreis hängt von der Parkzeit und der Parkkategorie (Standard – überdacht – bewacht) ab.

Grundpreis (in €)	10		10	10
Parkzeit (in Tagen)	1	2	4	7
Kosten Parkplatz – Standard (5 € pro Tag)	15	20		45
Kosten Parkplatz – überdacht (7 € pro Tag)	17	24	38	59
Kosten Parkplatz – bewacht (9 € pro Tag)	19	28	46	

- Ergänze die fehlenden Werte in der Tabelle.
- Lies folgende Kosten ab:
  - 2 Tage – bewachter Parkplatz
  - 7 Tage – überdachter Parkplatz
  - 1 Tag – Standardparkplatz

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Zuordnungsvorstellung

Ausfüllen einer Wertetabelle auf Grundlage einer Zuordnung im Sachkontext **22**

In der Nähe eines Flughafens ist ein Parkhaus. Bei der Einfahrt zahlt man immer einen Grundpreis. Der Gesamtpreis hängt von der Parkzeit und der Parkkategorie (Standard oder überdacht) ab.

- Fülle die Tabelle aus.

Grundpreis (in €)	12	12	12	12	12
Parkzeit (in Tagen)	1	2	4	7	14
Kosten Parkplatz – Standard (6 € pro Tag)					
Kosten Parkplatz – überdacht (8 € pro Tag)					

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Ablesen von Informationen aus einer Wertetabelle (Werte interpolieren) **23**

Ein Unternehmen, das Haushalte mit Erdgas versorgt, verlangt für verschiedene Verbrauchszahlen folgende Preise:

Verbrauch in kWh	1 000	5 000	10 000	20 000	30 000
Preise in €	141	264	434	774	1 223

(Quelle: „testsieger.de – Stadtwerke Rostock“)

- Lies den Preis für 20 000 kWh aus der Tabelle ab.
- Jemand kann pro Jahr ca. 600 € für Erdgas ausgeben.
  Überlege, wie viele kWh er dann ungefähr verbrauchen kann.
- Überlege, welcher Preis in etwa zu erwarten ist, wenn der Verbrauch bei 25 000 kWh liegt.

Wechsel der Darstellung von Wertetabelle zu Gleichung im Sachkontext **24**

Ein Auto verbraucht 6 Liter Benzin je 100 km.

- Vervollständige die Wertetabellen.

gefahrene Strecke s in km	100	200	300	500	1000
Benzinverbrauch b in Litern		12			

gefahrene Strecke s in km	50	200	380	475	650
Benzinverbrauch b in Litern		12			

- Beschreibe die Zuordnung „Strecke s → Benzinverbrauch b“ durch eine Gleichung.

b = ______________________________

Erstellen einer Wertetabelle zu einer linearen Funktion im Sachkontext **25**

Ein Haushalt bezahlt für seinen Stromanschluss monatlich eine Grundgebühr von 20,00 €. Dazu kommt der Preis für den verbrauchten Strom. 1 kWh kostet 0,30 €.

- Erstelle eine Wertetabelle für die monatlichen Kosten bei verschiedenen Verbrauchszahlen (bis 200 kWh). Überlege dir eine sinnvolle Einteilung.

Stromverbrauch in kWh	0					200
Preis in €						

Wechsel der Darstellungsform von Wertetabelle zu Graph im Sachkontext **26**

In einem Geschäft kosten 100 g Käse 2,50 €.

- Erstelle eine Wertetabelle, die einige Preise für Mengen bis 600 g angibt.

Menge in g					
Preis in €					

- Lege für diese Zuordnung ein Koordinatensystem an. Überlege dir eine sinnvolle Achseneinteilung.
- Stelle den Zusammenhang zwischen der Käsemenge und dem zu zahlenden Preis im Koordinatensystem dar.

Wechsel der Darstellungsform von Wertetabelle zu Graph im Sachkontext **27**

Conny kauft eine Packung Käse.
Bei Packungen, die bis zu 300 g Käse enthalten, bezahlt man 2,50 € je 100 g.
Bei Packungen, die mehr als 300 g Käse beinhalten, bezahlt man 2,00 € je 100 g.

- Erstelle eine Wertetabelle, die die Preise für verschiedene Mengen Käse zeigt.

Packungsgröße in g	100	200	300	350	400	500	700
Preis in €							

- Stelle die Zuordnung von Packungsgröße und zu zahlendem Preis in einem Koordinatensystem dar.

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Zuordnungsvorstellung

Untersuchen des Zusammenhanges von Zuordnungsvorschrift und Form einer Parabel **28**

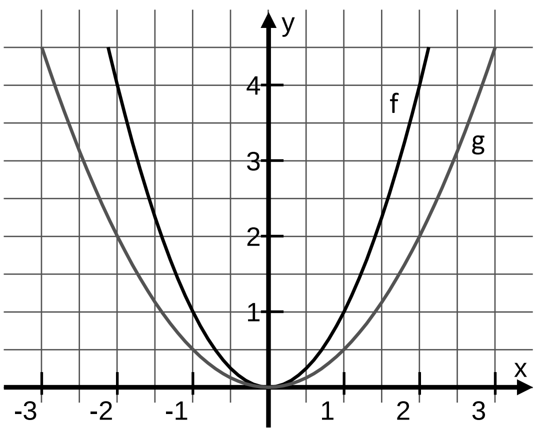
Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

In der Abbildung sind die Graphen der Funktionen
f: $y = x^2$ und g: $y = 0{,}5 \cdot x^2$ dargestellt.
Zu ihnen gehören die folgenden zwei Wertetabellen.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y_1 = f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y_2 = g(x)$	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y_3 = h(x)$							



- Markiere die Punkte aus den Wertetabellen in der Darstellung.
- Vervollständige die Wertetabelle für die Funktion h: $y = 0{,}25 \cdot x^2$ und zeichne den Graphen.
- Erläutere, wie sich die Funktionsgleichungen von f, g und h und wie sich der Verlauf der Graphen von f, g und h unterscheiden.

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Zuordnungsvorstellung

Untersuchen des Zusammenhanges von Zuordnungsvorschrift und Form einer Parabel

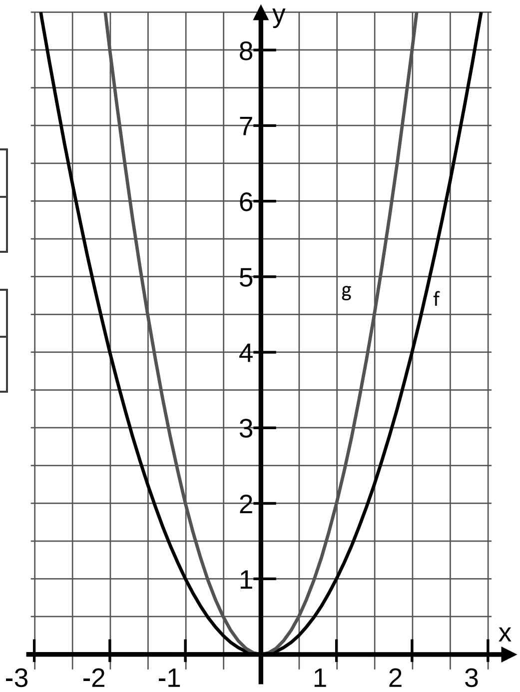
29

In der Abbildung sind die Graphen der Funktionen
f: $y = x^2$ und g: $y = 2 \cdot x^2$ dargestellt.

Zu ihnen gehören die nachfolgenden Wertetabellen.

x	–2	–1,5	–1	0	0,5	1	1,5	2
f(x)	4	2,25	1	0	0,25	1	2,25	4

x	–2	–1,5	–1	0	0,5	1	1,5	2
g(x)	8	4,5	2	0	0,5	2	4,5	8



- Markiere die Punkte aus den Wertetabellen in der Darstellung.
- Erstelle eine Wertetabelle für die Funktion h: $y = 3 \cdot x^2$ und zeichne die Graphen von f und h in ein Koordinatensystem.
- Erläutere, wie sich die Funktionsgleichungen von f, g und h und wie sich der Verlauf der Graphen von f, g und h unterscheiden.

Gleichungen und Funktionen
Sekundarstufe I

Idee der funktionalen Zusammenhänge
Zuordnungsvorstellung

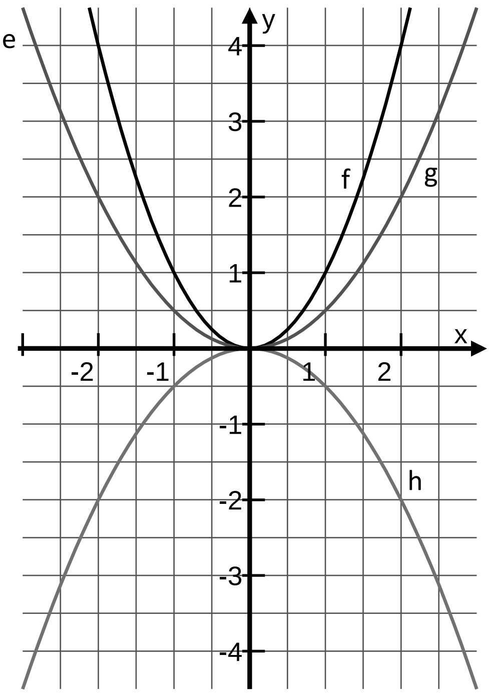
Untersuchen des Zusammenhanges von Zuordnungsvorschrift und Form einer Parabel

30

Die Abbildung zeigt die Normalparabel zu f: $y = x^2$ sowie die Graphen der Funktionen g: $y = 0{,}5 \cdot x^2$ und h: $y = -0{,}5 \cdot x^2$.

- Vervollständige die folgende Wertetabelle für *h*.

x	–3	–2	–1	0	0,5	1	2	2,5
y = h(x)								–3,1



- Markiere die Punkte aus der Tabelle in der Darstellung.
- Erläutere, wie sich die Funktionsgleichungen von g und h und wie sich der Verlauf der Graphen von g und h unterscheiden.

Impressum

Herausgeber:
Landesinstitut für Schule und Medien
Berlin-Brandenburg (LISUM)
14974 Ludwigsfelde-Struveshof
Tel.: 03378 209-0
Fax: 03378 209-149
www.lisum.berlin-brandenburg.de

Autorinnen und Autoren:

Barbara Becker, Katja Brinkmann, Ute Freibrodt, Heike Janke, Fanny Jeschek, Prof. Ulrich Kortenkamp, Prof. Ana Kuzle, Steffen Meyer, Susanne Mielke, Gretel Ost, Katja Pardey, Petra Radefahrt, Mike Reblin, Christin Riehn, Dr. Irina Schultheiß, Prof. Andreas Schulz, Steffen Tschakert, Maria Wrobel, Ina Rohde

Redaktion: Ute Freibrodt, Mike Reblin, Ines Rieger, Steffen Tschakert

Grafiken: Sibylle Rossmann, cc by 4.0

Titelbild: © goodluz. Teacher with kids in class giving writing lesson. Verfügbar unter: https://stock.adobe.com/de/images/teacher-with-kids-in-class-giving-writing-lesson/130493559?prev_url=detail, Zugriff am: 1.10.2021

Druck: ARNOLD group – arnoldgroup.de. Gedruckt mit mineralölfreien Bio-Druckfarben.

ISBN: 978-3-944541-86-0

Landesinstitut für Schule und Medien Berlin-Brandenburg (LISUM), Ludwigsfelde 2021

Genderdisclaimer
Sämtliche Personenbezeichnungen gelten gleichermaßen für alle Geschlechter: männlich, weiblich und divers (m/w/d).