Inhaltsverzeichnis

Vorwort

In einem kompetenzorientierten Mathematikunterricht hat die pädagogische Diagnose während des Lernprozesses einen hohen Stellenwert. Durch sie können Stärken und Schwächen der Schülerinnen und Schüler erfasst und bestehende Fördernotwendigkeiten im regulären Unterricht ermittelt werden. Besonders wichtig ist es, Fehlvorstellungen bei den Schülerinnen und Schülern zu erkennen, deren Entstehen zu vermeiden bzw. bereits vorhandene nicht tragfähige Vorstellungen zu überwinden. Im Anschluss an die Diagnose ist es Aufgabe der Lehrkräfte, passgenaue Förderschritte zu konzipieren, die sich zumeist auf kleine Gruppen oder auf einzelne Schülerinnen und Schüler beziehen und dabei die individuellen Lernvoraussetzungen, -bedürfnisse, -wege, -ziele und -möglichkeiten berücksichtigen. Die Entwicklung von Materialien zur Diagnose und Förderung ist ein aufwändiger und komplexer Prozess, der nicht immer durch jede Lehrkraft selbst geleistet werden kann. Aus diesem Grund hat das LISUM zum Rahmenlehrplan 1–10 für das Fach Mathematik passfähige Diagnose- und Fördermaterialien entwickelt.

Die vorliegenden Materialien zu den Leitideen „Größen und Messen“ und „Daten und Zufall“ bestehen jeweils aus drei Teilen:
Der **didaktische Text** (1) gibt einen Überblick über die inhaltlichen und didaktischen Schwerpunkte der jeweiligen Leitidee. In einem inhaltlichen Konzeptbild werden die zu entwickelnden Ideen und deren Vernetzungen als Modell für den Kompetenzerwerb dargestellt. Die dabei verwendeten Farben werden in der Förderkartei (3) zur besseren Orientierung wieder aufgegriffen. Die **Diagnoseaufgaben** (2) sind als Arbeitsbögen für alle Schülerinnen und Schüler im Regelunterricht nutzbar. Sie wurden passend zu den im Rahmenlehrplan 1–10 ausgewiesenen Standards entwickelt und ermöglichen sowohl eine produkt- als auch prozessorientierte Diagnostik, um das *Können* (einzelne Kompetenzen und Vorstellungen), aber auch die *Lernprozesse* der Schülerinnen und Schüler gezielt erfassen zu können. Die Förderschritte sollen passend zur Diagnose aus der **Förderkartei** (3) ausgewählt und individuell oder gruppenbezogen für die Schülerinnen und Schüler zusammengestellt werden. Die Bearbeitung der Förderaufgaben durch die Schülerinnen und Schüler sollte sinnvollerweise im Dialog mit der Lehrkraft erfolgen.

Alle Materialien in diesem Ordner sind auch auf dem Bildungsserver Berlin-Brandenburg in digitalisierter Form unter folgender Adresse bereitgestellt:
https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/rlp-online/c-faecher/mathematik/materialien/.

Liebe Kolleginnen und Kollegen,

wir hoffen, dass Sie das vorliegende Material bei der zielgerichteten Diagnose und Förderung Ihrer Schülerinnen und Schüler unterstützt und Sie anregt, entsprechende eigene Materialien zu entwickeln. Diese können beispielsweise für Übungszwecke im Förderprozess oder für eine noch gezieltere Feststellung der mathematischen Kenntnisse und Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler im Unterricht genutzt werden.

In diesem Sinne wünschen wir Ihnen viel Erfolg bei der Arbeit mit unserem Diagnose- und Fördermaterial für den Mathematikunterricht in den Jahrgangsstufen 1–10.

Susanne Wolter

Leiterin der Abteilung

Unterrichtsentwicklung Grundschule,
Sonderpädagogische Förderung und Medien

Renato Albustin

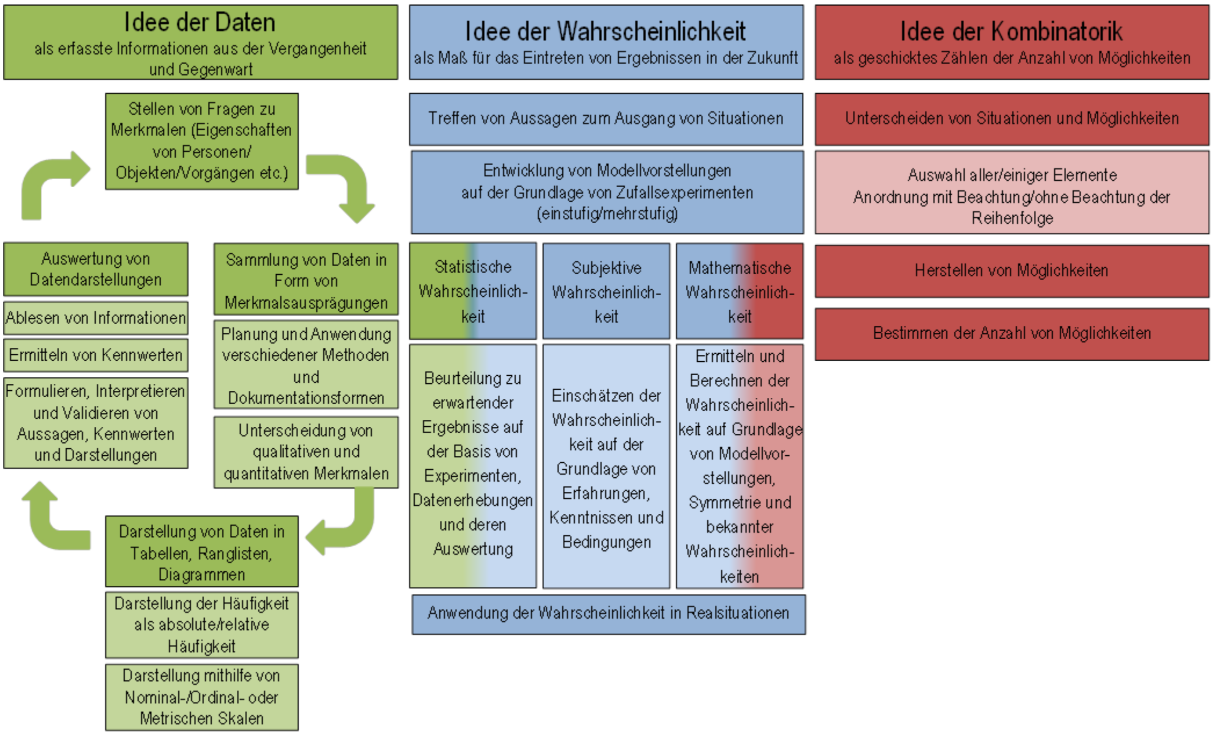
Leiter der Abteilung

Unterrichtsentwicklung Sekundarstufen I und II

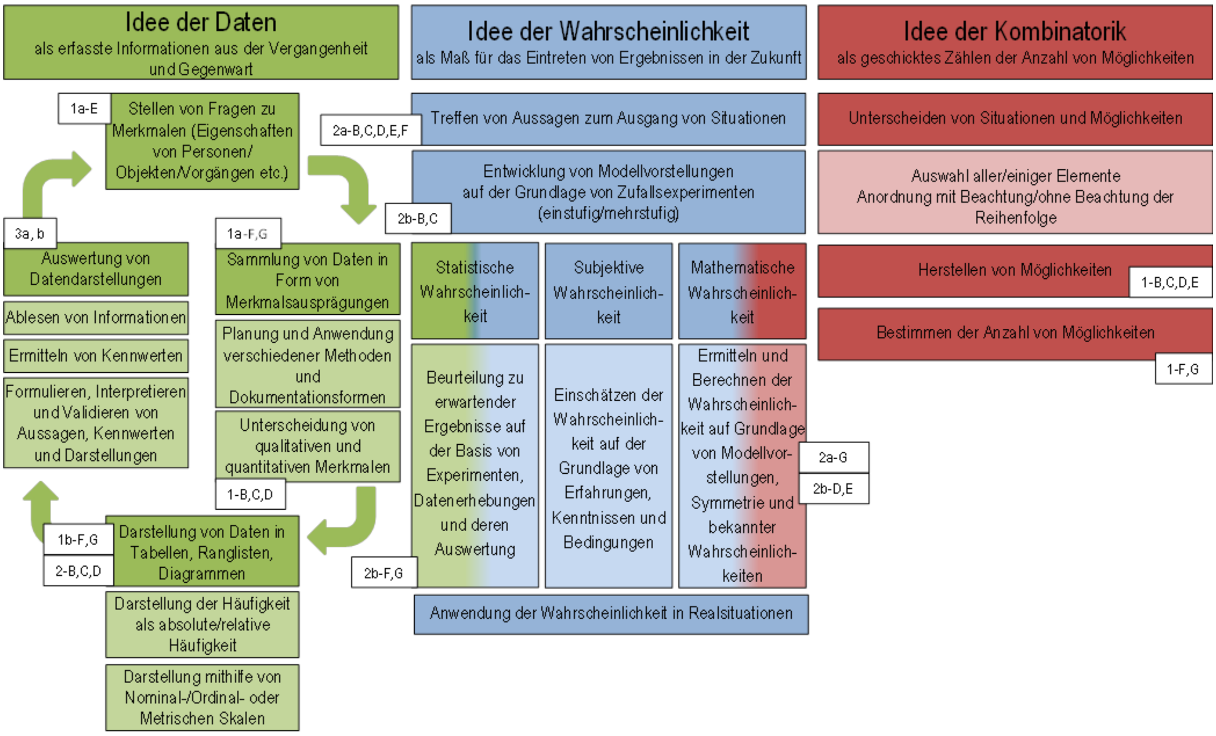
Hinweise zur Arbeit mit dem vorliegenden Material

Das Diagnose- und Fördermaterial wurde passend zu den Standards und Inhalten der Leitidee „Daten und Zufall“ aus dem Rahmenlehrplan 1–10 für das Fach Mathematik entwickelt.

In einem **inhaltlichen Konzeptbild** (farbige Grafik, größere Darstellung am Ende des Abschnitts 2) werden die zu entwickelnden Ideen und deren Vernetzungen in der Leitidee „Daten und Zufall“ dargestellt. Es dient den Lehrkräften zur didaktischen Orientierung.



Für die Niveaustufen B bis G des Rahmenlehrplans stehen **Diagnoseaufgaben** sowohl zum Thema „Daten“ als auch zum Thema „Zählstrategien und Wahrscheinlichkeiten“ in Form von Kopiervorlagen zur Verfügung. Die Diagnoseaufgaben können im Mathematikunterricht als Eingangsdiagnose zu Beginn einer Unterrichtseinheit, aber auch im Verlauf der Unterrichtsarbeit sowie als Abschlussdiagnose am Ende einer Unterrichtseinheit oder am Ende eines Schuljahres genutzt werden. Die Einordnung der Diagnoseaufgaben in das inhaltliche Konzeptbild bietet eine Orientierung für die Beurteilung der Antworten der Schülerinnen und Schüler (größere Darstellung am Ende des Abschnitts 3).



Ausgehend von den Diagnoseergebnissen erfolgt die gezielte, planvolle Förderung der Schülerinnen und Schüler. Jede Idee aus dem inhaltlichen Konzeptbild wird mithilfe der Förderaufgaben aus der **Förderkartei** bearbeitet. Zu jeder Farbe gibt es eine Förderkartei für die Grundschule und eine Förderkartei für die Sekundarstufe I. Förderaufgaben mit der gleichen farbigen Kennzeichnung sind als **aufeinander aufbauende Förderschritte** zu nutzen und dienen der Entwicklung der gleichen Idee. Die Aufgaben der Sekundarstufe I schließen an die Aufgaben der Grundschule an. Zu jedem Aufgabenpaket wird zu Beginn kurz beschrieben, worum es inhaltlich und didaktisch geht.

Alle in der Förderkartei formulierten Aufgaben und Aktivitäten lassen sich sowohl innerhalb der ganzen Klasse als auch in Kleingruppen oder in einer Einzelförderung einsetzen. Ausgangspunkt für die methodischen Entscheidungen ist immer die vorausgegangene Diagnose. Eine **kommunikationsintensive Gestaltung der Fördersituationen** ist von entscheidender Bedeutung für deren Gelingen. Um bestimmte Bereiche intensiver zu üben, möchten wir dazu anregen, die Förderaufgaben als Empfehlungen zu verstehen und als Vorlage für weitere Aufgaben zu nutzen, sie umzuformulieren oder zu ergänzen.

Die einzelnen Aufgabenpakete der Förderaufgaben enthalten Hinweise zu den zugeordneten Diagnoseaufgaben.

Didaktischer Kommentar von Prof. Kortenkamp und Prof. Kuzle

Wie wahrscheinlich ist es, beim Mensch-ärgere-Dich-nicht aus dem Häuschen zu kommen?

Diese einfache Frage ist für viele Menschen gar nicht einfach zu beantworten: In der ZEIT-Studie „Bürgerkompetenz Rechnen“ (Stiftung Rechnen, 2013) waren 34 % der repräsentativ befragten 18-65 Jahre alten Deutschen der Meinung, dass die Wahrscheinlichkeit „gleich 1/2“ ist, 9 % hielten es sogar für wahrscheinlicher aus dem Häuschen zu kommen als es nicht zu schaffen, und 17 % beantworteten die Frage lieber erst gar nicht. Nur 40 % der Befragten gaben in dem Multiple-Choice-Test die richtige Antwort – „kleiner 1/2“ –, und das auch dann, wenn man einzelne Personengruppen nach Altersklassen oder Bildungsabschlüssen aufgeschlüsselt betrachtete. Wie kann es sein, dass so eine einfache Frage auch noch von Universitätsprofessoren falsch beantwortet wird?

Unsere Eingangsfrage ist in der Tat ein besonders ergiebiger Ausgangspunkt für das Thema „Wahrscheinlichkeit“ und die damit in der Leitidee „Daten und Zufall“ verbundenen Themenkomplexe „Daten“ und „Kombinatorik“. Stochastische Problemstellungen, gerade bei (Würfel-)Spielen, begegnen Kindern und Erwachsenen in ihrem alltäglichen Umfeld und entspringen ihrer Lebenswelt (DZLM, o. J. [a]). Im Gegensatz zur Arithmetik fehlt es aber an der Ausbildung von Intuition im Umgang mit ihnen. Daher ist ein gezielter Aufbau von stochastischen Grundvorstellungen notwendig, der in Kombination mit einem grundlegenden Verständnis stochastischer Gesetzmäßigkeiten dazu führen kann, dass Schülerinnen und Schüler ein umfassendes Bild von Wahrscheinlichkeit aufbauen.

An der Frage nach dem Erfolg beim Mensch-ärgere-Dich-nicht kann man zum Beispiel gewisse Grundprinzipien des stochastischen Denkens herauskristallisieren. Neben dem „gefühlten“, intuitiven Wahrscheinlichkeitsbegriff, der zum Beispiel beinhalten kann, dass Sechsen schwieriger zu würfeln sind als Einsen, gibt es eine mathematische Wahrscheinlichkeit, die rein aus theoretischen Überlegungen ermöglicht, Vorhersagen zu machen. Da ein (fairer) Würfel symmetrisch ist, gibt es keinen Grund, weshalb eine Zahl wahrscheinlicher als die andere sein sollte. Bis hierhin reicht das stochastische Grundwissen der meisten Menschen. Doch wenn für *einen* Wurf die Wahrscheinlichkeit 1/6 ist, eine 6 zu würfeln, ist dann nicht die Wahrscheinlichkeit, in *drei* Würfen eine Sechs zu würfeln, gleich $3 \cdot 1/6 = 1/2$? Falls ja – wie groß wäre dann die Wahrscheinlichkeit, in sechs Würfen eine Sechs zu würfeln? Und in 12 Würfen? Die Verknüpfung von Modell und Vorstellung, der Weg zu Extremfällen und das bewusste Hervorrufen von kognitiven Dissonanzen bietet Ansatzpunkte für einen verständnisorientieren Unterricht, die auch in den hier vorliegenden Diagnose- und Fördermaterialien verfolgt werden.

Neben den wichtigen, aber schwer zu durchdringenden Begriffen der *Wahrscheinlichkeit* und des *Zufalls* erhält das Thema „Daten“ immer mehr an Bedeutung und auch Raum nicht nur im Mathematikunterricht, sondern in der gesamten schulischen Bildung. Dies hat auch mit den im Rahmen der Digitalisierung möglichen Verarbeitungsmöglichkeiten zu tun. Es ist möglich und immer wichtiger, große Datenmengen zu verarbeiten und zu analysieren, zum Beispiel indem sie auf wenige Kennwerte reduziert werden. Der Umgang mit grundlegenden Kennwerten wie verschiedenen Mittelwerten, Minimum und Maximum, Median und Quartilen muss mit geringen Datenmengen eingeübt, aber mithilfe digitaler Medien auch mit großen Datenmengen nachvollzogen werden. Dabei spielt die Darstellung der Daten in vielfältiger Weise – als Histogramm, Graph, Boxplot, … – eine wichtige Rolle zum Aufbau von Grundvorstellungen der Stochastik. Auch hierauf gehen die Diagnose- und Fördermaterialien ein. Damit helfen die Materialien, die Grundlage für einen kritischen Umgang mit Daten in der Informationsgesellschaft zu legen. *Datenkompetenz* ist ein grundlegendes Ziel mathematischer Bildung, welches auch schon in der Grundschule verfolgt werden muss, wie der Arbeitskreis Stochastik der GDM (2003) in seinen Empfehlungen schreibt.

Diagnose und Förderung

Diagnose sollte ein zentraler Baustein des Mathematikunterrichts sein. Hierzu sind Elemente der Diagnose *zielgerichtet* und zum *passenden Zeitpunkt* einzubinden, um die individuellen Leistungen und Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler zu erfassen und Fehlvorstellungen und die Entstehung von solchen zu verhindern bzw. bereits vorhandene zu überwinden. Dazu kann man zwischen einer eher *produktorientierten* oder eher *prozessorientierten Diagnostik* unterscheiden (Jordan & vom Hofe, 2008). Methoden, die auf die Erfassung individueller Lernergebnisse (z. B. Klassenarbeiten) zielen, gehören zu produktorientierter Diagnostik. Dabei wird das Ergebnis als „korrekt“ oder „nicht korrekt“ bzw. „kann“ oder „kann nicht“ bewertet. Da solche Produkte oft erst am Ende eines Lernprozesses entstehen, können sie nur bedingt für gezielte Fördermaßnahmen oder das Anpassen des Unterrichts an die individuellen Bedürfnisse der Schülerinnen und Schüler eingesetzt werden. Anderseits ist eine prozessorientierte Diagnostik auf die Erfassung individueller Lernprozesse ausgerichtet mit dem Ziel, die einem Ergebnis zugrundeliegenden Gedanken einer Schülerin oder eines Schülers besser zu verstehen (Jordan & vom Hofe, 2008). Die Lehrkräfte nutzen dafür unterschiedliche Methoden, wie z. B. Lerntagebücher oder diagnostische Interviews. *Diagnostische Interviews* stellen eine zeitaufwändige, aber sehr aufschlussreiche Methode dar, mit der im direkten Gespräch Schülervorstellungen bzw. -fehlvorstellungen in Erfahrung gebracht werden können. Nach Jordan und vom Hofe (2008) ist prozessorientierte Diagnostik der Schlüssel für eine systematische individuelle Förderung durch die Lehrkraft. Fördermaßnahmen zielen zumeist auf das einzelne Kind unter Berücksichtigung seiner spezifischen Lernvoraussetzungen, -bedürfnisse, -wege, -ziele und -möglichkeiten. Die Unterscheidung zwischen einer produktorientierten oder eher prozessorientierten Diagnostik ist nicht trennscharf – kein Produkt ohne Prozess, und auch ein Prozess ohne Produkt kann über das „Nicht-Produkt“ analysiert werden.

Die Entwicklung von Angeboten zur Diagnose und Förderung ist ein aufwändiger und komplexer Prozess, der nicht durch jede Lehrkraft selbst geleistet werden kann. Aus diesem Grund hat das LISUM Diagnose- und Fördermaterialien zur Thematik „Daten und Zufall“ entwickelt. Die entwickelten Diagnosematerialien sind dabei eine gute Mischung zwischen produkt- und prozessorientierter Diagnostik, um sowohl das *Können* (einzelne Kompetenzen und Vorstellungen) als auch die *Lernprozesse* der Schülerinnen und Schüler gezielt zu erfassen. Dementsprechend soll die Förderung an der Diagnose orientiert werden – nicht alle Schülerinnen und Schüler sollen sämtliche Aufgaben bearbeiten. Es empfiehlt sich hier, die zu behandelnden Förderaufgaben an die bearbeiteten Diagnoseaufgaben anzuknüpfen. Die Förderaufgaben sind im *Dialog* zwischen Lehrkraft und Schülerinnen und Schülern einzusetzen, in dem das Hinterfragen von Schülerantworten im Vordergrund stehen soll. Organisatorisch ist das gut in Kleingruppen umsetzbar. Dabei entsteht auch die Möglichkeit einer Kommunikation zwischen Schülerinnen und Schülern, die den Aufbau von Verständnis unterstützt. Diese Situationen bieten der Lehrkraft einen erneuten Einblick in den Fortschritt der Lernprozesse und unterstützen die Schülerinnen und Schüler darin, sich die Fortschritte des eigenen Lernens bewusst zu machen. Die vom LISUM entwickelten Diagnose- und Fördermaterialien können als Basis für die Entwicklung eigener, differenzierter Materialen für die eigene Lerngruppe genutzt werden, um bestimmte Bereiche intensiver zu üben, Kenntnisse und Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler genauer zu erheben und sie dadurch gezielter zu fördern.

Daten und Zufall – Rechnen mit Ungewissheiten

Das mathematisch noch junge Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung bietet eine Möglichkeit, mit Ungewissheiten umzugehen. Dabei wird ein für viele überraschender Kontrast zwischen der exakten Wissenschaft Mathematik und der „Unberechenbarkeit“ des Zufalls erzeugt. Wie kann man dies erklären?

Es ist kein Zufall, dass Daten und Zufall in einer Leitidee miteinander behandelt werden. Es geht in diesen beiden Teilbereichen der Stochastik um den Umgang damit, strukturelle Aussagen zu machen, die das Nicht-Wissen mit berücksichtigen.

Beginnen wir mit Daten: Diese werden erst dann wirklich interessant, wenn wir mit Datenmengen umgehen, die wir nicht vollständig überblicken können. Untersucht man zum Beispiel die Schuhgröße von Kindern, so arbeitet man mit Daten, die einzelnen Individuen zugeordnet werden können. Misst man diese nur bei einem Kind, so haben wir nur eine Maßzahl bestimmt. Misst man sie aber bei vielen Kindern – einer Klasse, der ganzen Schule, in ganz Deutschland oder in Japan – dann bedarf es Techniken, mit diesen Daten umzugehen. Die Reduktion der Urdaten auf einen oder wenige Kennwerte wie Minimum/Maximum, Median oder arithmetisches Mittel, versetzt uns in die Lage, mehrere Gruppen miteinander zu vergleichen. Üblicherweise müssen diese Werte gar nicht selbst bestimmt werden, sondern es bilden von dritten berechnete Kennwerte den Ausgangspunkt des Vergleichs von Populationen. Auch aus diesem Grund ist der Aufbau von Grundvorstellungen zu statistischen Kennwerten unerlässlich. Die Vermittlung des Begriffs des Minimums umfasst sowohl die Berechnung des Minimums, die vielfältige Darstellung und die Identifizierung des Minimums in verschiedenen Darstellungen. Der Aufbau solcher Grundvorstellungen wird durch das Fördermaterial zu verschiedenen Kennwerten mit verschiedenen Darstellungsformen, wie zum Beispiel dem Boxplot, der durch die Darstellung von Streuungsmaßen das Vergleichen von Verteilungen ermöglicht, unterstützt.

So wie im Themenbereich *Daten* der Zusammenhang zwischen Mengen von Messwerten und ihren Kennwerten hergestellt wird, wird im Bereich *Zufall* der Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeiten und Zufallsexperimenten geknüpft. Dabei ist eine besondere Herausforderung, dass die Begriffe „Zufall“ und „Wahrscheinlichkeit“ schon alltagssprachlich belegt und mit Vorstellungen verknüpft sind, die nicht immer mit den mathematischen Begriffen übereinstimmen. Anstatt dies als „falsch“ abzutun, muss an den Begriff der intuitiven Wahrscheinlichkeit angeknüpft werden, der mit der berechenbaren, mathematischen Wahrscheinlichkeit kontrastiert werden kann. Dabei ist der Fall *gleichwahrscheinlicher* Ergebnisse von Zufallsexperimenten als Grundvorstellung geeignet. Diese Gleichwahrscheinlichkeit – als Basis von Laplace-Experimenten – ist oft gegeben, zumeist aus Symmetriegründen. Bei einer geschickten Beschreibung von Experimenten kann sie zudem oft mit Mitteln der Kombinatorik – dem dritten Teilgebiet der Stochastik in der Schule, welches Daten und Zufall ergänzt (AK Stochastik, 2003) – dafür genutzt werden, auch kompliziertere Zufallsexperimente zu modellieren und Wahrscheinlichkeiten mathematisch über das Verhältnis von *günstigen* zu *allen möglichen* Ergebnissen des Zufallsexperiments zu berechnen.

So wie die Kombinatorik als Theorie des systematischen Zählens von Möglichkeiten die Grundlage für die Berechnung von mathematischen Wahrscheinlichkeiten ist, so ist die Auswertung von relativen Häufigkeiten, also einer weiteren Kennzahl von Daten, der Schlüssel zur Ermittlung von *statistischen Wahrscheinlichkeiten*. Hier ist es wiederum essentiell, aus der Kenntnis weniger Daten (zum Beispiel dem Ausgang von 1000 Würfelwürfen) auf die große Grundgesamtheit zu schließen: Die (statistische) Wahrscheinlichkeit kann als das relative Vorkommen eines bestimmten Ereignisses bei unendlich vielen Durchführungen des Experiments angesehen werden.

Für die unterrichtliche Behandlung von Daten und Zufall, insbesondere in der Primarstufe, ist der Aufbau von entsprechenden Grundvorstellungen mit passenden Darstellungen und Handlungen wesentlich. Grundvorstellungen (vom Hofe, 1995) vermitteln hier zwischen Realität und mathematischem Modell und sind dadurch charakterisiert, dass sie

(a) sinnkonstituierend für mathematische Begriffe durch die Anknüpfung an bekannte Sach- und Handlungszusammenhänge sind,

(b) den Aufbau von (visuellen) Repräsentationen unterstützen, die operatives Handeln auf der Vorstellungsebene ermöglichen, und

(c) die Fähigkeit zur Anwendung eines Begriffs auf die Wirklichkeit durch das Erkennen von Strukturen oder das Modellieren von Sachproblemen vermitteln.

Diese drei charakterisierenden Eigenschaften von Grundvorstellungen werden im vorliegenden Fördermaterial immer wieder aufgegriffen. So finden wir zum Beispiel im Fördermaterial zu „Daten und Zufall“ eine Übung, bei der mit einem Zehnerwürfel gewürfelt wird. Dadurch kann eine wichtige Grundvorstellung zu Ergebnissen und Ereignissen von Zufallsexperimenten aufgebaut werden: (a) der Begriff des Ergebnisses wird mit Leben gefüllt (das, was beim Würfeln herauskommt), (b) die Schülerinnen und Schüler werden in die Lage versetzt, sich verschiedene Ergebnisse (eine 5 gewürfelt) vorzustellen und zu verändern, indem sie das Würfeln nur noch gedanklich, auch mit anderen Würfeln, ausführen, und (c) sie erhalten Zugang zum Begriff des Ereignisses und der Laplace-Formel, die sie nutzen, um konkrete Wahrscheinlichkeiten zu berechnen. Grundvorstellungen vermitteln in beide Richtungen im Modellierungskreislauf (Blum, 1985; Schupp, 1988) zwischen Mathematik und Welt.

Ein Modell für den Kompetenzerwerb

Im Rahmenlehrplan Berlin Brandenburg für das Fach Mathematik finden sich die Kernkompetenzen *Daten erheben und Daten darstellen, statistische Erhebungen auswerten, Zählstrategien anwenden und Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen bestimmen* im inhaltsbezogenen Kompetenzbereich „Daten und Zufall“ wieder. Das Ziel dieser Leitidee ist es, dass die Schülerinnen und Schüler Daten sammeln, dokumentieren, grafisch darstellen und mithilfe statistischer Kennwerte numerisch zusammenfassen, beschreiben und interpretieren (MBJS, 2015). Darüber hinaus sollen Zufallserscheinungen in alltäglichen Situationen ausgehend von Wahrscheinlichkeitsschätzungen und experimentellen Untersuchungen beschrieben werden. Dabei bilden kombinatorische Überlegungen sowie Verfahren und Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine Grundlage für die Zufallserscheinungen, welche entscheidend für „ein grundlegendes Verständnis für Simulationen und Prognosen“ sind (MBJS, 2015, S. 8).

Die Inhalte der Stochastik gliedern sich in drei Teilbereiche: Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kombinatorik, die auch oft in eigenen Unterrichtseinheiten thematisiert werden. Diese Teilbereiche sind allerdings nicht streng voneinander getrennt, sondern eng miteinander verbunden, wie in der Einführung schon verdeutlicht.

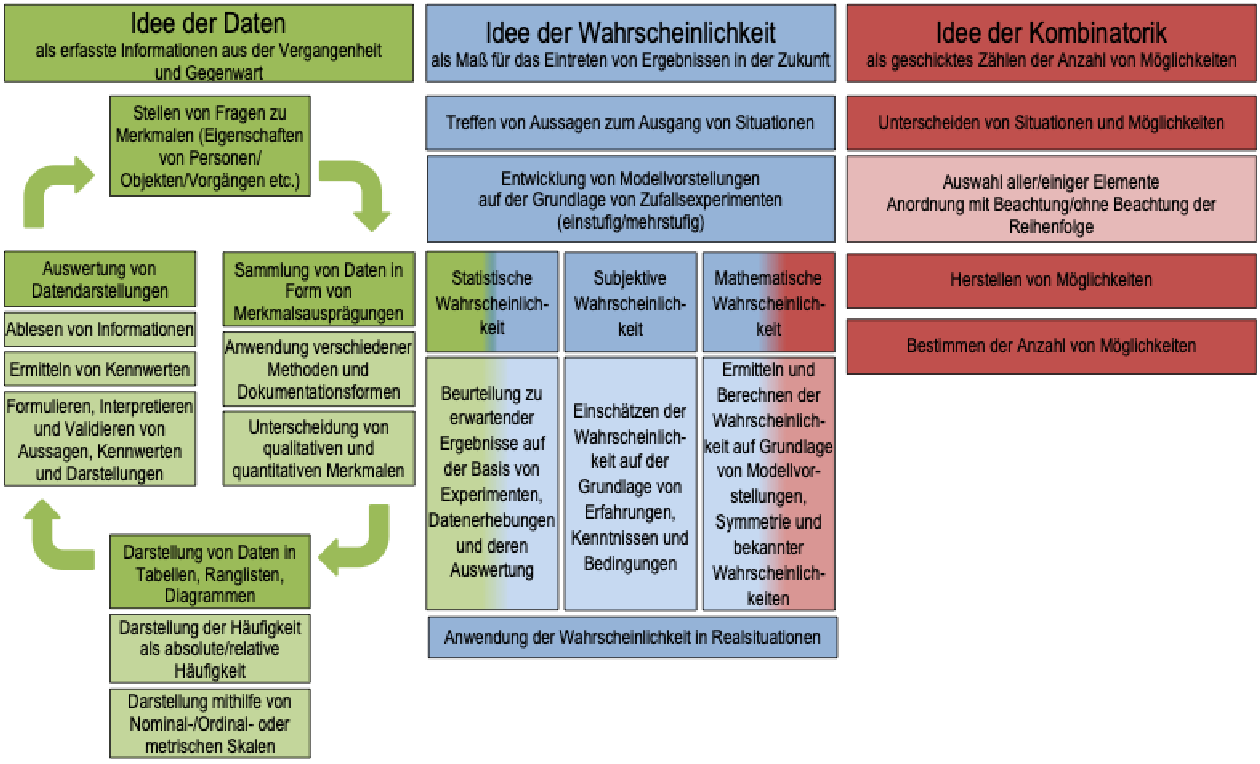


Abb. 1: Unterrichtskonzept zum Strukturieren der Aktivitäten im Bereich „Daten und Zufall“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Auf diesen Überlegungen aufbauend hat das LISUM ein Modell entwickelt, um die unterrichtlichen Aktivitäten im Bereich „Daten und Zufall“ zu strukturieren (siehe Abb. 1). Es geht hier nicht um die Festlegung einer Reihenfolge oder die strikte Trennung von Unterrichtsinhalten, sondern um eine Orientierung für Lehrkräfte für individuelle Fördermaßnahmen. Es werden Querbezüge zwischen unterschiedlichen Teilgebieten hergestellt. Im Modell stehen die drei folgenden Aspekte im Vordergrund: *Idee der Daten als erfasste Informationen aus der Vergangenheit und Gegenwart, Idee der Wahrscheinlichkeit als Maß für das Eintreten von Ergebnissen in der Zukunft* und *Idee der Kombinatorik als geschicktes Zählen der Anzahl von Möglichkeiten.*

In der ersten Spalte wird die *Idee der Daten als erfasste Informationen aus der Vergangenheit und Gegenwart* anhand eines Zyklus dargestellt. Dieser Zyklus umfasst vier Phasen: (1) Stellen von Fragen zu Merkmalen, (2) Sammeln von Daten in Form von Merkmalsausprägungen, (3) Darstellen von Daten in Tabellen, Ranglisten, Diagrammen und (4) Auswerten von Darstellungen. Die erste Phase steht am Anfang und umfasst die Motivation für die Durchführung einer statistischen Datenanalyse. Hierzu sollen interessante Fragen und Problemen aus der Lebenswirklichkeit der Schülerinnen und Schüler als Ausgangssituation benutzt werden. Die zweite Phase sieht die Sammlung von Daten in Form von Merkmalsausprägungen vor. Ebenfalls soll bereits in dieser Phase der Plan der Datenerhebung (u. a. das Design der Untersuchung, das Unterscheiden von qualitativen und quantitativen Merkmalen, das Aufstellen und Konstruieren der Messinstrumente) bedacht werden. In der dritten Phase folgt die Darstellung der Daten in z. B. Tabellen, Ranglisten, Diagrammen. Diese umfasst die Auswahl der passenden Skalen (Nominalskala, Ordinalskala, metrische Skala) und Darstellung von Daten als absolute bzw. relative Häufigkeit. Im vierten Schritt folgt die Auswertung der Daten. Dabei werden geplante und evtl. ungeplante Analysen durchgeführt, wie etwa das Ablesen von Informationen und das Ermitteln von Kennwerten, die dazu dienen, Hypothesen zu generieren. Am Ende des ersten Zyklus stehen Schlussfolgerungen, die die Interpretation der Ergebnisse sowie die Kommunikation weiterer neuer Ideen vorsehen. Diese Ideen können den Zyklus dann erneut starten. Wie bei den meisten Kreisläufen ist auch hier ein Einstieg in jeder der vier Phasen möglich – beginnt man zum Beispiel mit der Analyse von Grafiken aus der Zeitung, so beginnt man in der vierten Phase.

In der zweiten Spalte wird die *Idee der Wahrscheinlichkeit als Maß für das Eintreten von Ergebnissen in der Zukunft* dargestellt. Mit der Angabe der *Wahrscheinlichkeit* versucht man die Unsicherheit von Ereignissen zu beschreiben und zu erklären. Als ein quantitatives Maß gibt sie an, wie gewiss oder ungewiss es ist, dass ein bestimmtes Ereignis eintreten wird. Statistiken helfen dabei, das Phänomen „Zufall“ zu erforschen. So entstehen Verbindungen zwischen den Bereichen Statistik und Wahrscheinlichkeit. Als wichtige praktische Tätigkeit gilt in diesem Kontext das Experimentieren. Durch ein Zufallsexperiment kann ein zufälliger Vorgang untersucht werden. Dabei kann man verschiedene Zugänge zum Wahrscheinlichkeitsbegriff unterscheiden. Die Wahrscheinlichkeitsinterpretationen, die sich auf statistische Häufigkeiten zurückführen lassen, basieren auf Zufallsexperimenten, die unter den gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholt werden können. Angenommen die Zufallsversuche werden unter gleichen Bedingungen oft genug wiederholt, dann kann die relative Häufigkeit als Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens eines Ereignisses verwendet werden. Anderseits ist die *„subjektive*“ oder *„intuitive“ Wahrscheinlichkeit* von der statistischen Wahrscheinlichkeit zu unterscheiden, welche die Überzeugung einer einzelnen Person von dem Eintreten oder Nicht-Eintreten eines Ereignisses ausdrückt, die auf individuelle Erfahrungen mit der eigenen Person oder bestimmten Situationen (der sogenannten inneren statistischen Datenbank) basieren. Zuletzt redet man über die *mathematische Wahrscheinlichkeit* beim Ermitteln und Berechnen der Wahrscheinlichkeiten auf Grundlage von Modellvorstellungen. Hierbei werden zum Beispiel Symmetrie-Eigenschaften des Modells herangezogen, um die Gleichwahrscheinlichkeit zweier Ereignisse zu begründen, sowie letztlich die erst 1930 formulierten Kolmogorov-Axiome verwendet, um weitere Wahrscheinlichkeiten zu berechnen.

In der dritten Spalte wird die *Idee der Kombinatorik als geschicktes Zählen der Anzahl von Möglichkeiten* dargestellt. Hierzu ist festzustellen, (1) welche Möglichkeiten es gibt, Elemente einer endlichen Menge nach bestimmten Bedingungen auszuwählen oder anzuordnen und (2) wie viele Möglichkeiten es dafür insgesamt gibt. Bei der Klassifizierung von kombinatorischen Aufgaben sind folgende Fragen zu klären:

- *Werden alle gegebenen Elemente benötigt oder nur eine Auswahl?*
- *Werden die Elemente nur einmal verwendet oder dürfen sie mehrfach verwendet werden?*
- *Ist die Reihenfolge unerheblich oder muss die Reihenfolge beachtet werden?* (DZLM, o. J. [b])

Aus diesen Unterscheidungen ergeben sich verschiedene Zählstrategien: *Permutation*, *Variation* und *Kombination*. Bei der Idee der Kombinatorik geht es also maßgeblich um das systematische Abzählen von Möglichkeiten, das gerade bei Laplace-Wahrscheinlichkeiten die Grundlage zum Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bildet.

Aus dem LISUM-Modell ist erkennbar, wie und an welchen Stellen die Verbindungen zwischen den drei Ideen im Mathematikunterricht hergestellt werden sollen. Da aber Stochastik kein eigenständiges Stoffgebiet ist – „Stochastische Inhalte sollen nicht unverbunden neben den gängigen Inhalten des Mathematikunterrichts stehen, sondern mit diesen vernetzt werden“ (AK Stochastik, 2003, S. 21) – kann die Arbeit mit Daten und auf Daten aufbauenden Modellbildungen als Unterrichtsprinzip in verschiedenste Gebiete des Mathematikunterrichts integriert werden.

Einsatz der Diagnose- und Fördermaterialien

Die vom LISUM entwickelten Diagnose- und Fördermaterialien decken die genannten Bereiche und Kompetenzen auf verschiedenen Niveaustufen (B-G) und damit die Schullaufbahn von der Grundschule bis zur Sekundarstufe ab. Es ist aber nicht notwendig, das gesamte Material mit allen Schülerinnen und Schülern durchzuarbeiten! Um möglichst effektiv die notwendigen Förderschritte gehen zu können, wird über das Diagnosematerial zunächst grob festgestellt, in welchem Bereich evtl. Förderbedarf besteht.

Die Diagnosematerialien bestehen aus einer Kombination von quantitativen und qualitativen Aufgaben. Dadurch können die erkennbaren Stärken und Schwächen der Schülerinnen und Schüler den Lehrkräften Hinweise auf bestehende Fördernotwendigkeiten geben. Dabei geht es nicht nur um „richtig" oder „falsch“ bzw. „kann“ oder „kann nicht“, sondern darum, das Denken der Schülerinnen und Schüler sichtbar zu machen, zu verstehen, wo sich die Schülerin oder der Schüler befindet und wo die Schwierigkeiten liegen. Dazu wurden alle Diagnoseaufgaben in das oben beschriebene vom LISUM entwickelte Modell und in den neuen Rahmenlehrplan eingeordnet.

Auch die Förderaufgaben sind entsprechend des Modells geordnet. Durch die farbige Gestaltung ist leicht nachvollziehbar, welche Idee mit den entsprechenden Förderaufgaben verfolgt wird.

Zum Beispiel sollen die Schülerinnen und Schüler im Diagnosematerial zum Themenbereich „Daten" (Niveaustufe B im Aufgabenteil 2) die Anzahl der gegebenen Gegenstände in die Tabelle eintragen und schließlich ins Diagramm übertragen. Hinsichtlich des LISUM-Modells geht es um die grüne Spalte zur Idee der Daten und das Feld „Darstellung von Daten in Tabellen, Ranglisten, Diagrammen". Mit dieser Aufgabe können Sie also feststellen, ob die Schülerin oder der Schüler die vorgegebenen Daten aus einem Text in unterschiedliche Darstellungen – hier Tabelle, Diagramm – übertragen kann. Falls die Schülerin oder der Schüler keine sinnvolle Antwort in der Tabelle oder in dem Diagramm gibt (z. B. die Darstellung der Häufigkeit der Schülerin oder des Schülers beginnt nicht bei der Null, die Achse mit der Darstellung der Ergebnisse ist nicht gleichmäßig eingeteilt oder enthält nicht alle Ergebnisse), können Sie die an dieser Stelle passende Förderaufgabe aus dem grünen Teil mit der Schülerin oder mit dem Schüler erarbeiten bzw. bearbeiten, wie etwa das Ordnen von bunten Zetteln in einem Diagramm (Aufgabe 20 im Fördermaterial). Dabei soll die Schülerin oder der Schüler alle Zettel in der gleichen Farbe aneinander ohne Lücken an der Tafel anheften. Durch die enaktive Tätigkeit des Ordnens der Zettel gleicher Farben übereinander entstehen Säulen und somit ein Säulendiagramm. Bei der gemeinsamen Bearbeitung der Förderaufgaben kann die Diagnose verfeinert werden.

Um solche diagnostischen Informationen wirksam werden zu lassen, werden in den didaktischen Handreichungen (Fördermaterialien) zielgerichtete Fördermaßnahmen empfohlen, indem zu typischerweise erwarteten Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler konkrete Anregungen zur unterrichtlichen Bearbeitung gegeben werden. Für jede Idee aus dem LISUM-Modell ergeben sich allerdings verschiedene Schwerpunkte, sodass sowohl die Diagnose als auch die Förderung im Gespräch zwischen Lehrkräften und Schülerinnen und Schülern erarbeitet und bearbeitet werden sollen.

Spezielle Hinweise zu den im Material angesprochenen Teilbereichen

Kombinatorik

Die Kombinatorik wird oft als Kunst des Zählens oder geschickten Zählens betrachtet, die sich mit den Fragen nach zulässigen kombinatorischen Möglichkeiten (*Welche gibt es?)* und deren Anzahl (*Wie viele Möglichkeiten gibt es?)* befasst. Der Begriff „geschicktes Zählen" verdeutlicht, wie dabei vorgegangen werden soll: möglichst geschickt bzw. möglichst einfach (DZLM, o.J. [c]). Es geht somit darum, möglichst einfache Wege zur Anzahlbestimmung zu finden, was schon im Niveau A thematisiert wird (RLP, 2015). Es geht also maßgeblich um das systematische Abzählen von Möglichkeiten, das eine Grundlage zur Entwicklung allgemeiner geistiger Fähigkeiten (Herbart, 1841) und zum Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bildet (AK Stochastik, 2003). Somit sind die elementaren kombinatorischen Inhalte in allen Zweigen der Schulmathematik bedeutsam und sollen in angemessener Weise in den Stochastikunterricht der Primar- und Sekundarstufe integriert werden.

Bei kombinatorischen Aufgabenstellungen stehen vor allem die Lösungsprozesse im Vordergrund. Ziel ist es, ausgehend vom Probieren und dem ersten noch sehr unsystematischen Finden einzelner Anordnungen, die Schülerinnen und Schüler an systematische Vorgehensweisen heranzuführen. Dabei können sie Strategien entwickeln, um damit alle Anordnungen sicher zu finden.

Für die Entwicklung dieser Strategien ist es hilfreich, die Situationen handelnd zu begreifen sowie zeichnerisch und symbolisch darzustellen. Dabei ist es wichtig, Situationen und Anordnungen immer wieder miteinander zu vergleichen. Durch die Bearbeitung von Situationen der gleichen Art erlangen die Schülerinnen und Schüler ein tiefgreifendes Verständnis für die gemeinsamen mathematischen Strukturen der Situationen.

Das allgemeine Zählprinzip der Kombinatorik stellt eine wichtige Grundvorstellung für das Abzählen von Möglichkeiten dar. Werden Elemente aus zwei oder mehr unterschiedlichen Mengen auf jede mögliche Art und Weise einander zugeordnet, so kann die Gesamtzahl der Möglichkeiten als Produkt der Kardinalität der Mengen berechnet werden. Eine klassische Aufgabenstellung zu dieser Grundvorstellung ist zum Beispiel: *Es gibt vier T-Shirts, zwei Hosen und drei Paar Schuhe zur Auswahl. Wie viele Möglichkeiten gibt es, sich verschieden anzuziehen?* Die Situation kann unterschiedlich dargestellt werden, zum Beispiel durch das Legen der Objekte, bildlich, symbolisch mit Buchstaben oder mit einem Baumdiagramm. Das Auflisten und Abzählen ist der elementarste Lösungsweg, der den Lernenden zur Verfügung steht. Eine systematische Auflistung (mit Material oder schriftlich) stellt sicher, dass Figuren nicht doppelt gezählt oder vergessen werden. Zudem ergibt sich durch die Art der Darstellung auch die Verknüpfung zum Rechteckmodell der Multiplikation als zentraler Grundvorstellung aus der Arithmetik. Die zum Beispiel gehörende Multiplikation würde 4 · 2 · 3 = 24 lauten. Sie ergibt sich letztendlich aus der Kardinalität des Kreuzproduktes der drei Mengen (T-Shirts, Hosen, Schuhe).

Für die geschickte Bestimmung aller Möglichkeiten für das Lösen kombinatorischer Aufgabenstellungen ist eine Vielfalt an Grundsituationen (Variation, Permutation, Kombination) charakteristisch. Bei einer Anordnung (*Permutation*) werden alle Elemente der Grundmenge betrachtet, wohingegen bei Auswahlen (Variationen oder Kombinationen) nur eine Stichprobe der Grundmenge im Fokus des Interesses liegt. Je nachdem, ob die Reihenfolge der Elemente berücksichtigt wird (Variation) oder nicht (Kombination), gibt es geordnete und ungeordnete Stichproben. Bei Anordnungen (Permutationen) wird dagegen immer die Reihenfolge berücksichtigt. Dabei müssen bei Permutationen, Variationen und Kombinationen jeweils zwei Fälle unterschieden werden:

- Permutation/Variation/Kombination *ohne Wiederholung*, wenn die Objekte untereinander unterscheidbar sind und
- Permutation/Variation/Kombination *mit Wiederholung*, wenn die Objekte (teilweise) nicht unterscheidbar sind.

Diese Anzahlen können für übersichtliche Situationen noch naiv bestimmt werden, spätestens bei großen oder gar unbestimmten Anzahlen von zu kombinierenden Objekten werden aber Formeln verwendet, deren Entstehung in einfachen Fällen nachvollzogen werden sollte.

1. Fall: Es wird keine Auswahl getroffen

Wenn keine Auswahl an Objekten getroffen wird, so berechnet man die verschiedenen Anordnungsmöglichkeiten der Objekte mithilfe der *Permutation*. Ein passendes Beispiel für eine Permutation ohne Wiederholung wäre: „In einer Urne befinden sich sechs verschiedenfarbige Kugeln. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Kugeln in einer Reihe anzuordnen?" Um die Anzahl verschiedener Kombinationsmöglichkeiten von *n* unterscheidbaren Objekten zu berechnen, ergibt sich induktiv die Formel $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 1$, die mit $n!$ („n Fakultät") abgekürzt wird: Zuerst wird aus n Elementen eines ausgewählt, aus den verbleibenden (n-1) Elementen ein weiteres, und so fort, bis nur noch ein Element übrig bleibt.

Sind nicht alle Objekte unterscheidbar, so muss die Anzahl der Permutationen korrigiert werden, indem durch die nicht unterscheidbaren Permutationen dividiert wird. Ein passendes Beispiel wäre: „In einer Urne befinden sich drei grüne und zwei gelbe Kugeln. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Kugeln in einer Reihe zu ordnen?" Wären alle Kugeln unterscheidbar, so ergäben sich 5! Möglichkeiten, die durch die Permutationen der drei und zwei Objekte dividiert werden, wodurch sich $\frac{5!}{3! \cdot 2!}$ Möglichkeiten ergeben. Allgemein gilt für n Objekte, bei denen Gruppen von $k_1, k_2, k_3, ..., k_i$ Objekten ununterscheidbar sind, dass die Anzahl der Möglichkeiten $\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_i!}$ beträgt.

2. Fall: Es wird eine Auswahl getroffen

Werden nicht alle Elemente einer Gesamtmenge berücksichtigt, so berechnet man die *Kombination* oder die *Variation*.

Die Kombination gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, eine bestimmte Menge von unterscheidbaren Objekten aus einer größeren Gesamtmenge auszuwählen. Ein passende Fragestellung ist: *„In einer Urne befinden sich 16 verschiedenfarbige Kugeln. Es werden drei der Kugeln gezogen. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür?"* Da es für die erste Kugel 16 Möglichkeiten, für die zweite nur noch 15, für die dritte nur noch 14 gibt – dies kann handlungsorientiert nachvollzogen werden – erhält man zunächst 16·15·14 Möglichkeiten, oder, anders geschrieben, $\frac{16!}{13!} = \frac{16!}{(16-3)!}$, oder allgemein für die Auswahl von k aus n Elementen $\frac{n!}{(n-k)!}$. Zu beachten ist aber, dass für die ausgewählten Elemente die Reihenfolge der Auswahl irrelevant ist, was schließlich zur Formel $\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ führt, die mit dem Binomialkoeffizienten „n über k" oder „k aus n" in Zeichen $\binom{n}{k}$ abgekürzt wird. Ist die Reihenfolge hingegen nicht irrelevant, so erhält man $\frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten für die sogenannte Variation.

Erlaubt man, dass Objekte mehrfach ausgewählt werden dürfen, so erhält man die Kombination bzw. Variation *mit Wiederholung*. Für die Variation mit Wiederholung, also die *k*-fache Auswahl aus *n* Elementen ergibt sich aus dem allgemeinen Zählprinzip der Kombinatorik die einfache Formel n^k. Für die Kombination mit Wiederholung, also für eine Auswahl von k Elementen aus n Elementen ohne Beachtung der Reihenfolge können wiederum Binomialkoeffizienten verwendet werden. Eine entsprechende Fragestellung wäre: „*In einer Urne befinden sich sieben verschiedenfarbige Kugeln. Es werden drei der Kugeln gezogen, wobei die gezogene Kugel nach jedem Zug wieder zurückgelegt wird*.“ Um zu berechnen, wie viele Möglichkeiten es gibt, *k* Objekte aus einer Gesamtmenge von *n* Objekten auszuwählen, wobei die Objekte mehrmals ausgewählt werden dürfen, kann man den Binomialkoeffizienten $\binom{n+k-1}{k}$ nutzen. Diese Formel lässt sich zum Beispiel über eine geeignete Umformulierung der Fragestellung auf Differenzen zeigen.

Für das Lösen kombinatorischer Aufgabenstellungen stehen Schülerinnen und Schülern unterschiedliche Strategien zur Verfügung:

- Das (systematische) Auflisten und Abzählen,
- die geschickte Darstellung in Tabellen- oder Matrixform oder als Baumdiagramm,
- das Verwenden kombinatorischer Zählstrategien oder
- das Nutzen der kombinatorischen Formeln.

Im Unterricht der Grundschule und Sekundarstufe I spielt die mathematische Bezeichnung dieser Grundsituationen keine wichtige Rolle. Vielmehr müssen die Schülerinnen und Schüler in der Lage sein, diese zu unterscheiden und für verschiedene Situationen die richtige Interpretation zu finden, nötigenfalls über den Rückbezug auf das allgemeine Zählprinzip. Somit bieten kombinatorische Kontexte ein gutes Übungsfeld für das Problemlösen und Modellieren, vielfältige Möglichkeiten der Differenzierung und die Möglichkeit, das Interesse an Mathematik durch die Möglichkeit zum spielerisch-experimentellen Vorgehen zu wecken. Es eignen sich zum Beispiel einfache Spielmaterialien wie Bausteine oder Anziehpuppen.

Wahrscheinlichkeit

Der Wahrscheinlichkeitsbegriff gehört nicht nur in der Schule zu den sehr schwer zu fassenden mathematischen Konstrukten. Dies resultiert zum einen daraus, dass „Wahrscheinlichkeit“ umgangssprachlich und im Alltag für alle Menschen schon bekannt und mit gewissen Erwartungen belegt ist, zum anderen aber die mathematisch korrekte Beschreibung der Phänomene eine sehr präzise Sprache und Formalisierung benötigt. Gleichzeitig birgt die Alltagsnähe und hohe Anwendbarkeit der mathematischen Begriffe viele Chancen für einen reichhaltigen und interessanten Unterricht, bei dem die Schülerinnen und Schüler Erfahrungen sammeln können und diese mit den formalen Werkzeugen, die sie im Laufe der Zeit erwerben, immer sicherer mathematisieren können.

Der Begriffsaufbau beginnt bereits in den ersten Klassen der Grundschule. Hier werden die Vorerfahrungen der Schülerinnen und Schüler zunächst im Rahmen der *subjektiven Wahrscheinlichkeit,* einer Einschätzung des Grads der Sicherheit, mit dem man das Eintreffen eines Ergebnisses erwartet, beschrieben. Eine Besonderheit ist dabei, dass – im Gegensatz zum sonstigen Eindruck der Schülerinnen und Schüler von Mathematik – es nicht eine feste, richtige Lösung für den Ausgang eines Experiments gibt, sondern gerade *die Möglichkeit verschiedener Ergebnisse* den Begriff der Wahrscheinlichkeit ausmacht. Dies muss im Unterricht in allen Jahrgangsstufen immer wieder neu erfahren und gefestigt werden. Dazu werden Situationen diskutiert, in denen nur eines oder mehrere Ergebnisse möglich sind, und Experimente durchgeführt und ihre Ergebnisse protokolliert, um zu explorieren, wie man die Wahrscheinlichkeit der einzelnen Experimente fassen kann. Als Grundfrage kann hier dienen, welche Ergebnisse nie, selten, häufig oder immer auftreten.

Neben der Bedeutung der Begriffe „Ergebnis“ und den daraus entstehenden „Ereignissen“ geht es auch darum, den Gebrauch des Wortes „wahrscheinlich“ zu präzisieren, welches üblicherweise für „sehr wahrscheinlich“ verwendet wird (s. a. Krüger, Sill & Sikora, S. 69). Die subjektive Wahrscheinlichkeit, die die Skala von „unmöglich“ über „fast unmöglich“, „weniger wahrscheinlich“, „50:50“, „eher wahrscheinlich“, „fast sicher“ bis „sicher“ abdeckt, kann und soll an verschiedenen Alltagssituationen und in speziellen Experimenten, wie Münzwurf, Würfeln mit verschiedenen Gegenständen und dem Drehen am Glücksrad, diskutiert werden und somit das Phänomen „möglicher, aber nicht sicherer“ Ereignisse ausgeleuchtet werden. Der spezielle Charakter dieser Experimente – insbesondere die Wiederholbarkeit und die Möglichkeit, verschiedenen Ergebnissen verschiedene Wahrscheinlichkeiten zuzuordnen – sollte dabei mit Situationen im Alltag verglichen werden. Es lohnt sich weiterhin, dies mit Unsicherheiten durch mangelnde Information zu vergleichen: Ist der Geburtstag der Mutter zufällig, bloß weil man ihn nicht kennt?

Diese Tätigkeit des Experimentierens setzt sich über alle Jahrgangsstufen hinweg fort, wobei die Komplexität der Zufallsexperimente steigt und diese später auch in mehrstufigen Experimenten zusammengefügt werden. Für die darauf aufbauende Quantifizierung von Wahrscheinlichkeiten im Rahmen der *mathematischen Wahrscheinlichkeit* steht in der Schule hauptsächlich die Regel von Laplace zur Verfügung. Hierfür wird der Begriff des *Zufallsexperiments* benötigt. Idealerweise sind dies Experimente, deren Ergebnisse nur vom Zufall gesteuert werden, und die unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholbar sind (Fischer, Lehner & Puchert S. 78) – doch diese Definition ist nicht die zentrale Anforderung. Entscheidend ist hingegen, dass zu einem Zufallsexperiment immer eine Menge von möglichen Ergebnissen, die Ergebnismenge, gehört. In der Sekundarstufe I wird üblicherweise nur mit endlichen Ergebnismengen gearbeitet. Für die klassischen Zufallsexperimente sind die Ergebnismengen zum Beispiel $\Omega_M = \{K, Z\}$ für den Münzwurf, bei dem „Kopf“ oder „Zahl“ mögliche Ergebnisse sind, oder $\Omega_W = \{1,2,3,4,5,6\}$ für den Wurf eines Würfels. Rein formal kann nun jedem Ergebnis eine Wahrscheinlichkeit, also eine Zahl im Intervall [0,1], zugeordnet werden, mit der Bedingung, dass die Summe aller Einzelwahrscheinlichkeiten 1 ergeben muss – denn es ist „sicher“, dass eines der Elemente der Ergebnismenge als Ergebnis des Zufallsexperiments herauskommt. Die weitere Grundzutat der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist die Additivität von Wahrscheinlichkeiten – die Wahrscheinlichkeit, dass eines der Ergebnisse $\{E_1, E_2, E_3\}$ herauskommt, ist die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten: $P(\{E_1, E_2, E_3\}) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)$. Hierbei werden Ereignisse als Teilmengen der Ergebnismenge beschrieben und es werden ihnen über die Summenregel Wahrscheinlichkeiten zugewiesen. Diese mathematische Beschreibung ist die Essenz der Kolmogorov-Axiomatisierung (Krüger, Sill & Sikora, S. 239, Fischer, Lehner & Pucher, S. 81, Büchter & Henn S.183), die in der Schule nicht formal behandelt wird, aber leicht erschlossen werden kann und über eine Grundvorstellung zur Verfügung stehen muss.

Der mathematische Wahrscheinlichkeitsbegriff erlaubt eine Berechnung von Wahrscheinlichkeiten als Maß für die Sicherheit des Eintretens eines Ereignisses, wenn die Wahrscheinlichkeit für jedes einzelne Ergebnis bekannt ist. Im einfachsten Fall ist die Wahrscheinlichkeit für jedes Ergebnis – zum Beispiel aus Symmetriegründen, wie beim Münzwurf, beim Würfeln, beim Ziehen aus einer Urne – die gleiche. Aus den Kolmogorov-Axiomen folgt dann, dass diese Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ beträgt, wenn *n* die Anzahl der möglichen Ergebnisse ist. Auch Zufallsgeräte, die auf Verhältnissen basieren (zum Beispiel das Glücksrad), können durch eine hinreichend feine Unterteilung letztendlich auf Laplace-Wahrscheinlichkeiten zurückgeführt werden.

Aus dieser Basisüberlegung ergeben sich zusammen mit den kombinatorischen Werkzeugen (siehe vorhergehender Absatz) vielfältige Anwendungsmöglichkeiten. Die Laplace-Formel, bei der die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses als Quotient der Anzahl der Elemente der Ereignismenge und der Anzahl der Elemente der Ergebnismenge berechnet wird, entsteht unmittelbar aus der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei Laplace-Experimenten. Geht man dann zu mehrstufigen Zufallsexperimenten über, so ergeben sich wiederum aus den kombinatorischen Eigenschaften die erste und zweite Pfadregel. Dies kann zum Beispiel bei der Modellierung der Wahrscheinlichkeiten für das Würfeln mit zwei Würfeln nachvollzogen werden. Das eigentliche Zufallsexperiment hat die Ergebnismenge {2,3,…,12}. Betrachtet man aber die zugrundeliegende Tätigkeit, so erkennt man, dass es sich im Grunde um ein Laplace-Experiment mit der Ergebnismenge $\{(1,1), (1,2), \ldots (6,5), (6,6)\} = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$ handelt, bei dem Paare mit gleicher Summe zu einem Ereignis zusammengefasst werden. Weiterhin legt die zweite Darstellung als kartesisches Produkt nahe, dass dasselbe Experiment auch als zweistufiges Experiment, bei dem jeweils mit einem Würfel gewürfelt wird, angesehen werden kann. Es lohnt sich, bei übersichtlichen Beispielen wie diesem auch in der Schule die vollständigen Ergebnisräume aufzuschreiben und ihre Entstehung im Unterricht zu thematisieren und zu diskutieren. Ebenso ist es hilfreich, die Parallelen zwischen Baumdiagrammen in der Kombinatorik und in der Wahrscheinlichkeitsrechnung explizit anzusprechen.

In Fällen, in denen die Wahrscheinlichkeit einzelner Ergebnisse nicht a priori bekannt ist, kann diese über das empirische Gesetz der Großen Zahlen (Büchter/Henn, S. 174) bestimmt werden. Dieses besagt, dass sich die relative Häufigkeit eines Ergebnisses eines oft wiederholten Zufallsexperiments (daher der Wunsch nach Wiederholbarkeit!) bei der Wahrscheinlichkeit dieses Ergebnisses stabilisiert. Dieses Gesetz ist so nicht beweisbar, aber empirisch erfahrbar. Aus diesem Grund gehört es mit zu den Grunderfahrungen im Unterricht, Zufallsexperimente zu wiederholen und ihren Ausgang zu protokollieren, um über die relativen Häufigkeiten der Ergebnisse einen Zugang zur *statistischen* oder *frequentistischen* Wahrscheinlichkeit zu erhalten. Damit wird wieder an die Grunderfahrungen angeknüpft, wie überhaupt stets das fragegeleitete Experimentieren, Modellieren, Protokollieren und Auswerten in der Wahrscheinlichkeitsrechnung besonderen Raum im Unterricht einnimmt.

Daten

So wie die Kombinatorik die Entwicklung des Themas mathematische Wahrscheinlichkeit unterstützt, so ist der Umgang mit Daten Grundlage für die statistische Wahrscheinlichkeit, so wie auch im LISUM-Modell dargestellt. Das Thema „Daten“ umfasst aber weit mehr als nur die quantitative Behandlung von relativen Häufigkeiten. Ausgehend von (für die Schülerinnen und Schüler relevanten) *Fragen* kann das Sammeln von Daten als das *Erfassen* von Merkmalsausprägungen zu verschiedenen Merkmalen als Schüleraktivität gestaltet werden. Dabei werden verschiedene Methoden der Erfassung und Dokumentation eingeübt. Weiterhin kann und soll dabei auf die unterschiedliche Natur von Merkmalen eingegangen werden. Neben *nominalen* Merkmalen, die eine Merkmalsausprägung in Worten beschreibbar machen (z. B. Farben), gibt es *ordinale* Merkmale, die über eine Reihenfolge verfügen (z. B. Schulnoten). Ist es sinnvoll, mit einem ordinalen Merkmal auch noch zu rechnen, dann spricht man von einem *metrischen* oder *kardinalen* Merkmal (z. B. Körpergrößen, aber nicht Schulnoten!). Auch metrische Merkmale werden in der Fachliteratur weiter unterschieden, je nachdem ob man nur Abstände vergleichen kann (intervallskaliert, z. B. Zeitangaben im Kalender), auch Verhältnisse vergleichen kann (verhältnisskaliert, zum Beispiel Preise, Längen, Gewichte) oder sogar eine natürlich gegebene Einheit hat (absolut skaliert, zum Beispiel Anzahlen) (vgl. Krüger, Sill & Sikora, S. 226f.). Obgleich die Art der Merkmale im Unterricht thematisiert wird, sind die Bezeichnungen für die dazugehörigen Skalen nicht zwangsläufig Unterrichtsinhalt (Krüger, Sill & Sikora, S. 228).

Liegen solcherart erfasste Daten vor, die entweder selbst gewonnen wurden oder aus fremden Quellen wie dem Internet stammen, so ist normalerweise mindestens eine *Darstellung* der Daten, üblicherweise aber auch eine *Reduktion* der Daten auf gewisse Kennwerte notwendig. Abhängig von den verwendeten Skalen können verschiedene Darstellungen verwendet und Kennwerte bestimmt werden:

- Für Nominalskalen sind Strichlisten und Häufigkeitstabellen sowie Säulen-, Balken- und Kreisdiagramme geeignet. Aus diesen lassen sich der am häufigsten vorkommende Wert (Modus) und relative Häufigkeiten gewinnen.

- Für Ordinalskalen sind zusätzlich Minimum, Maximum, Median und Quartile bestimmbar, die besonders gut in einem Boxplot dargestellt werden können. Dazu empfiehlt es sich von der unsortierten Urliste von Merkmalsausprägungen auf eine Rangliste überzugehen, aus der sich die o. g. Kennwerte leicht ablesen lassen.

- Auf metrischen Skalen ist zusätzlich die Berechnung von Spannweite (Differenz von Minimum und Maximum) und Quartilsabstand möglich, ebenso die Berechnung des arithmetischen Mittels (vorzugsweise auf verhältnisskalierten Merkmalen). Das arithmetische Mittel kann hierbei gut mit dem Median kontrastiert werden.

Die Berechnung von Kennwerten ermöglicht den Vergleich und die *Auswertung* von verschiedenen Datenerhebungen, die zur Beantwortung der zu Beginn gestellten Fragen führen sollen. Dabei sollte immer wieder der unvermeidbare Informationsverlust auf dem Weg von der Datenerhebung über die Datendarstellung und Datenreduktion auf die Datenauswertung thematisiert werden, auch zum Beispiel über operationalisierte Übungen, bei denen nach der Auswirkung von Datenänderungen auf die Kennwerte gefragt wird. Damit wird auch die Grundlage für das Erkennen von Manipulationen von und mit Daten gelegt, welches im Unterricht ebenfalls zu diskutieren ist.

Literatur und weiterführende Literatur

Arbeitskreis Stochastik der GDM (2003). Empfehlungen zu Zielen und zur Gestaltung des Stochastikunterrichts. *Stochastik in der Schule, 23*(3), 21–26. http://stochastik-in-der-schule.de/sisonline/struktur/jahrgang23-2003/heft3/Langfassungen/2003-3_ak-empfehl.pdf [19.7.2018]

Büchter, A. & Henn, H.-W. (2007). Elementare Stochastik. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

Büchter, A., Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (2005). Den Zufall im Griff? – Stochastische Vorstellungen fördern. *Praxis der Mathematik in der Schule, 4*, 1–7.

Fischer, G., Lehner, M. & Puchert, A. (2015). Einführung in die Stochastik. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum

Herbart: Umriss pädagogischer Vorlesungen. Zweite vermehrte Ausgabe. Göttingen: Druck und Verlag der Dieterichschen Buchhandlung, 1841

Jordan, A. & vom Hofe, R. (2008). Diagnose von Schülerleistungen. *mathematik lehren, 150*, 4–12.

Krüger, K., Sill, H.-D. & Sikora, Chr. (2015). Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Wissenschaft Berlin, Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg (2015). (Hrsg.). *Rahmenlehrplan Jahrgangsstufen 1-10. Teil C, Mathematik.* Berlin, Potsdam.

Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen.* Braunschweig: Schroedel.

Ulm, V. (2010). Stochastik in der Grundschule. Dokumentation der Tagung der Regionalkoordinatoren von „SINUS an Grundschulen“. http://www.sinus-an-grundschulen.de/uploads/media/Workshop_Ulm_Stochastik.pdf [19.7.2018]

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte.* Heidelberg, Berlin, Oxford: Spektrum Akademischer Verlag.

Webseiten

https://primakom.dzlm.de/inhalte/daten-häufigkeit-wahrscheinlichkeit [12.10.2018]

https://primakom.dzlm.de/inhalte/daten-h%C3%A4ufigkeit-wahrscheinlichkeit/kombinatorik/hintergrund [12.10.2018]

https://kira.dzlm.de/mathe-mehr-als-ausrechnen/prozessbezogene-kompetenzen-f%C3%B6rdern-beispielaufgaben/prozessbezogene-1 [12.10.2018]

Stiftung Rechnen (2013). http://stiftungrechnen.de/mehr-erleben/projektarchiv/studie-buergerkompetenz-rechnen/ [12.10.2018]

Idee der Daten
als erfasste Informationen aus der Vergangenheit und Gegenwart

- Stellen von Fragen zu Merkmalen (Eigenschaften von Personen/ Objekten/Vorgängen etc.)
- Sammlung von Daten in Form von Merkmalsausprägungen
  - Planung und Anwendung verschiedener Methoden und Dokumentationsformen
  - Unterscheidung von qualitativen und quantitativen Merkmalen
- Darstellung von Daten in Tabellen, Ranglisten, Diagrammen
  - Darstellung der Häufigkeit als absolute/relative Häufigkeit
  - Darstellung mithilfe von Nominal-/Ordinal- oder Metrischen Skalen
- Auswertung von Datendarstellungen
  - Ablesen von Informationen
  - Ermitteln von Kennwerten
  - Formulieren, Interpretieren und Validieren von Aussagen, Kennwerten und Darstellungen

Idee der Wahrscheinlichkeit
als Maß für das Eintreten von Ergebnissen in der Zukunft

- Treffen von Aussagen zum Ausgang von Situationen
- Entwicklung von Modellvorstellungen auf der Grundlage von Zufallsexperimenten (einstufig/mehrstufig)

Statistische Wahrscheinlich-keit	Subjektive Wahrscheinlich-keit	Mathematische Wahrscheinlich-keit
Beurteilung zu erwartender Ergebnisse auf der Basis von Experimenten, Datenerhebungen und deren Auswertung	Einschätzen der Wahrscheinlich-keit auf der Grundlage von Erfahrungen, Kenntnissen und Bedingungen	Ermitteln und Berechnen der Wahrscheinlich-keit auf Grundlage von Modellvor-stellungen, Symmetrie und bekannter Wahrscheinlich-keiten

- Anwendung der Wahrscheinlichkeit in Realsituationen

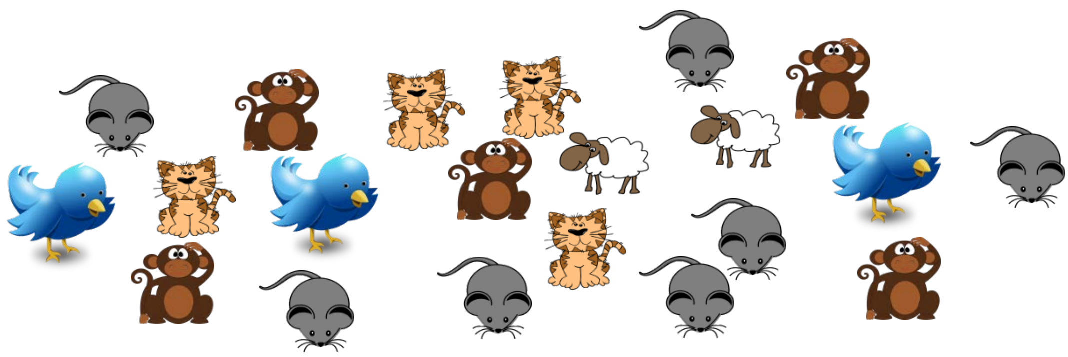
Idee der Kombinatorik
als geschicktes Zählen der Anzahl von Möglichkeiten

- Unterscheiden von Situationen und Möglichkeiten
- Auswahl aller/einiger Elemente
  Anordnung mit Beachtung/ohne Beachtung der Reihenfolge
- Herstellen von Möglichkeiten
- Bestimmen der Anzahl von Möglichkeiten

Diagnoseaufgaben

„Daten“
nach Niveaustufen des RLP 1–10
sortiert

1)



- Wie viele Tiere gibt es von jeder Art?
  Mache eine Strichliste.

2) In einer Kiste sind 7 rote Steckwürfel, 5 blaue Steckwürfel und 4 gelbe Steckwürfel.

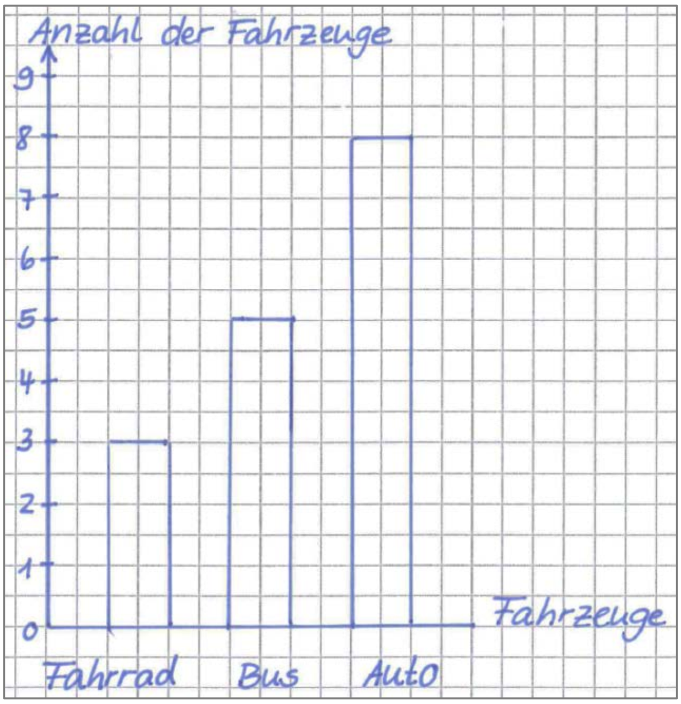
- Trage die Anzahlen in die Tabelle ein.

Farbe der Steckwürfel	gelbe Steckwürfel	rote Steckwürfel	blaue Steckwürfel
Anzahl der Steckwürfel			

- Vervollständige das Diagramm.

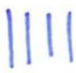
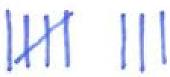
Bild 1: „Katze“, pixabay.com, CC0 Bild 2: „Affe“, pixabay.com, CC0 Bild 3: „Vogel“, pixabay.com, CC0 Bild 4: „Elefant“, pixabay.com, CC0
Bild 5: „Maus“, pixabay.com, CC0 Bild 6: „Diagramm“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

3a)



- Eine Säule zeigt genau 5 Fahrzeuge.
  Male die passende Säule aus.
- Wie viele Autos sind in diesem Diagramm dargestellt? ✏ __________

3b)

- Von welchem Obst gibt es die größte Anzahl? ✏ ____________________
- Ergänze die Sätze.

Es gibt am meisten ____ .

Es gibt mehr _______________________ als _______________________.

Es gibt doppelt so viele ___________________ wie __________________ .

Bild 7: „Säulendiagramm", LISUM, CC-BY-SA 4.0 Bild 8: „Kirsche", pixabay.com, CC0 Bild 9: „Banane", pixabay.com, CC0 Bild 10: „Apfel", pixabay.com, CC0
Bild 11: Strichliste", LISUM, CC-BY-SA 4.0

1) Max hat eine Umfrage gemacht und gefragt:
„Wie bist du heute zur Schule gekommen?“.

Pia: Bus	Carla: Fahrrad	Tim: Fahrrad	Mesut: zu Fuß
Sarah: zu Fuß	Dennis: Bus	Tanya: Bus	
Hakan: Auto	Selina: zu Fuß	Erik: Auto	Sam: zu Fuß

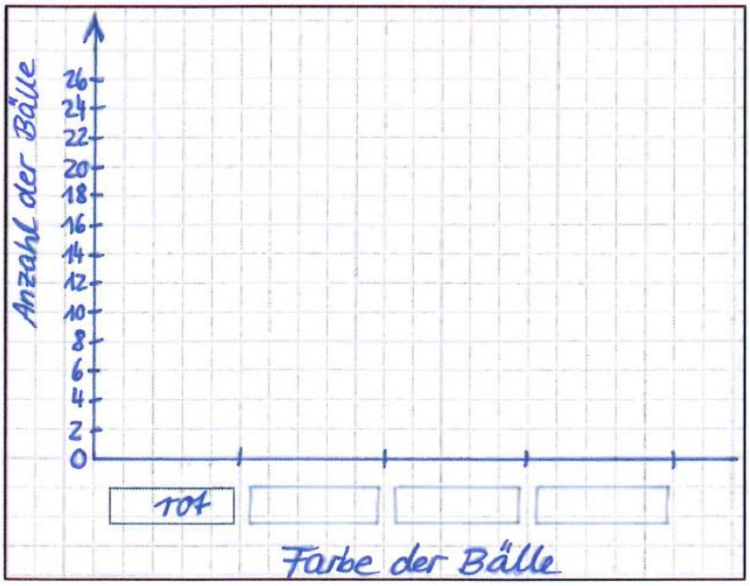
- Stelle die Ergebnisse in einer Strichliste dar.

2) In einer Kiste sind 10 rote Bälle, 15 blaue Bälle, 21 weiße Bälle, 12 gelbe Bälle.

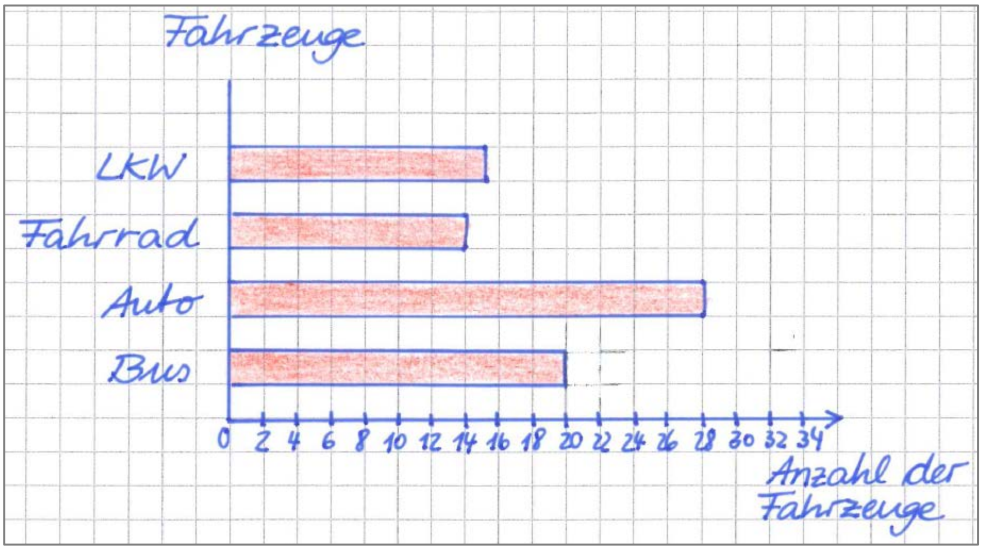
- Ergänze die Tabelle.

Farbe der Bälle				
Anzahl der Bälle				

- Erstelle ein passendes Diagramm.



3a)



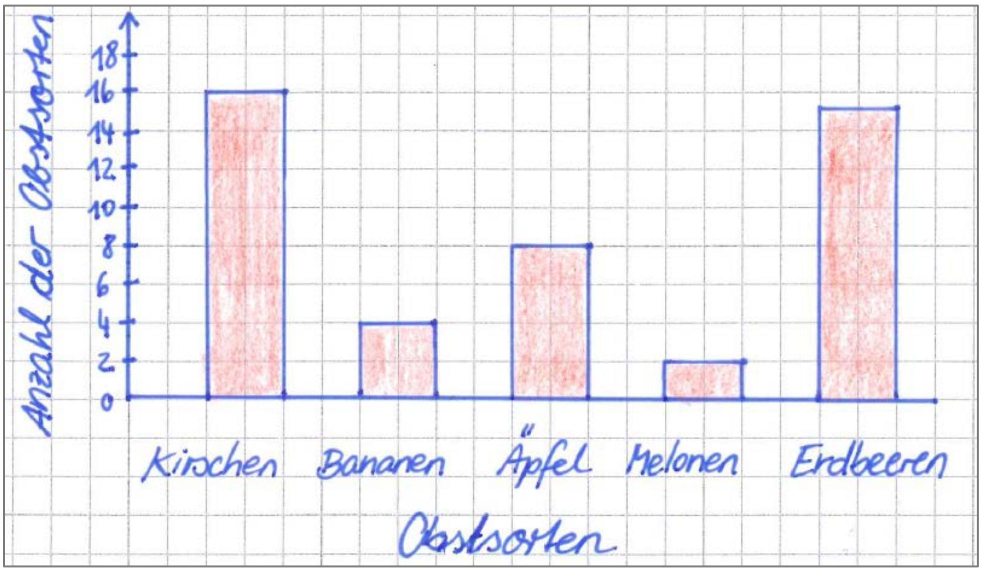
- Wie viele Fahrräder sind in diesem Diagramm dargestellt? ✎ ___________
- Von welchem Fahrzeug gibt es genau 15? ✎ ______________________
- Ergänze den Satz:

  Es gibt halb so viele ____________________ *wie* ________________ .

- Formuliere eine weitere Frage, die du mit dem Diagramm beantworten kannst.

  ✎ ____

3b)



- Welches ist der häufigste Wert? ✎ __________________
- Welches ist der seltenste Wert? ✎ ___________________

Bild 1: „Diagramm", LISUM, CC-BY-SA 4.0
Bild 2: „Balkendiagramm", LISUM, CC-BY-SA 4.0
Bild 3: „Säulendiagramm", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Leitidee Daten und Zufall (D) – Diagnoseaufgaben zu Daten

1) Kinder, die kleiner als 150 cm sind, müssen einen Kindersitz benutzen.

- In welche Gruppen könntest du die Kinder einteilen?
- Ordne die Kinder deinen Gruppen zu.

Pia 131 cm | Tim 128 cm | Carla 157 cm | Mesut 149 cm

Sarah 124 cm | Dennis 146 cm | Tanya 141 cm

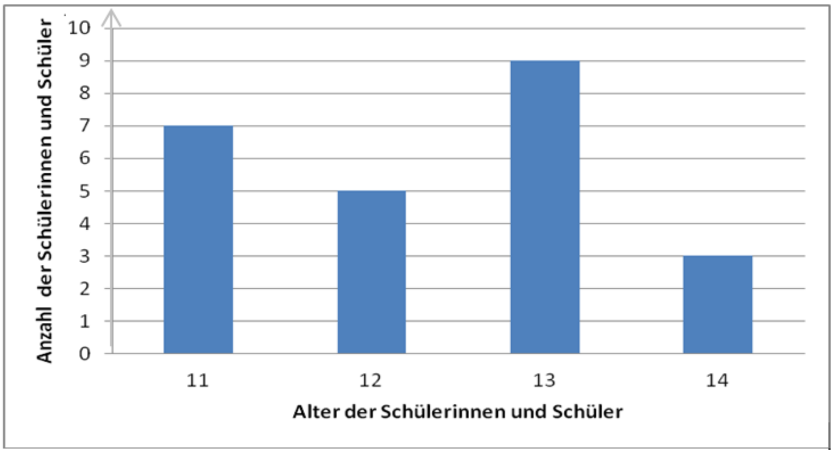
Hakan 155 cm | Selina 143 cm | Sam 150 cm

2a) Trage die Anzahl der Kinder aus Aufgabe 1 in die Tabelle ein.

Größe in cm	121 – 130	131 – 140	141 – 150	151 – 160
Anzahl der Kinder				

2b) Stelle die Werte aus der Tabelle in einem Diagramm dar.

3a) In einer Sportgruppe wurde das Alter der Kinder erfasst.



- Wie viele Kinder sind insgesamt in der Sportgruppe? ✎ ____________________

- Schreibe drei verschiedene Aussagen auf, die zu diesem Diagramm passen.

✎ ____

____

____

3b)

- Gib das Minimum der Werte an. ✎ ____________________

- Beschreibe, wie du die Spannweite der Werte ermitteln kannst.

1a) Zum Thema „Medienkonsum“ soll in deiner Schule eine Umfrage durchgeführt werden.
Welche der folgenden Fragen sind für eine entsprechende statistische Erhebung ungeeignet?

A: Siehst du oft fern?

B: Hast du ein Smartphone?

C: Wie ist dein Medienkonsum?

D: Wie viele Stunden am Tag bist du online?

☐ 0 bis 2 h ☐ 2 bis 4 h ☐ 4 h und mehr

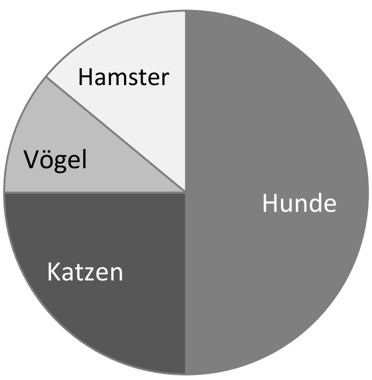
- Begründe

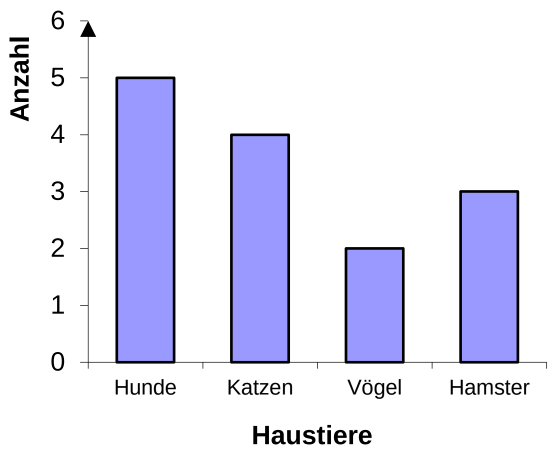
1b) Das Statistische Bundesamt hat in einer deutschlandweiten Umfrage die Anzahl der Kinder pro Familie ermittelt.

Anzahl der Kinder in der Familie	1	2	3	4	mehr als 4
Anteil in %	53	36	8	2	1

Stelle die Daten in einem geeigneten Diagramm dar.

2) Gehören beide Diagramme zur gleichen Datensammlung? Begründe.





3a) In Tempo-30-Bereichen verschiedener Städte wurden die Geschwindigkeiten der Fahrzeuge gemessen.
In einer Stadt A wurden 240 Fahrzeuge erfasst.
In einer Stadt B wurden 75 Fahrzeuge erfasst.

Die Tabelle zeigt die Ergebnisse:

Geschwindigkeit in km/h	bis 30	über 30
Anzahl der Fahrzeuge in A	180	60
Anzahl der Fahrzeuge in B	25	50

- In welcher Stadt war der Anteil der Geschwindigkeitsüberschreitungen kleiner?
- Begründe deine Aussage.

3b)

Pia 10 €	Carla 20 €	Tim 25 €	Mesut 20 €
Sarah 25 €	Dennis 20 €	Tanja 20 €	
Anne 120 €	Inga 20 €		
Sam 20 €			

Im Durchschnitt bekommt jeder in der Gruppe 30 € Taschengeld.

- Stimmt diese Aussage?

- Warum sind die meisten Kinder der Gruppe mit dieser Aussage unzufrieden?

- Welcher Kennwert würde die Situation besser beschreiben? Begründe.

1a) Zum Thema „Internetnutzung" soll in deiner Schule eine Umfrage durchgeführt werden.
Beschreibe eine dafür geeignete Stichprobe.

Beschreibe eine dafür ungeeignete Stichprobe. Begründe.

Schreibe eine geeignete und eine ungeeignete Frage für eine entsprechende statistische Erhebung auf.

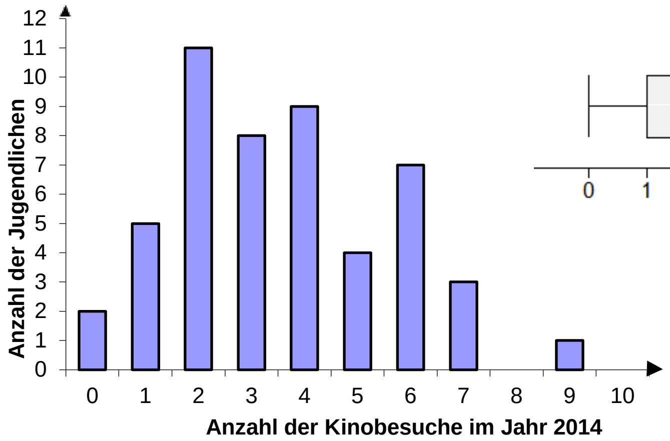
- geeignet:

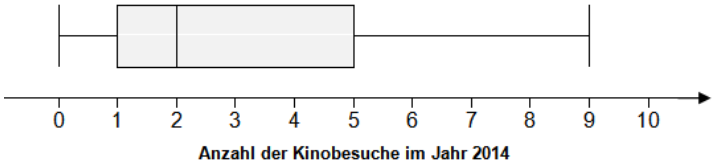
- ungeeignet:

1b) Die Größe der einzelnen Kinder einer Sportgruppe wurde gemessen.
Der Reihe nach geordnet ergaben sich folgende Messwerte:
135 cm, 138 cm, 138 cm, 141 cm, 142 cm, 143 cm, 143 cm, 144 cm, 147 cm, 148 cm,
149 cm, 150 cm, 150 cm, 153 cm, 154 cm , 154 cm, 154 cm, 155 cm, 156 cm, 160 cm.

- Gib eine Klasseneinteilung an, mit der die Daten übersichtlich dargestellt werden können.
- Gib zu jeder Klasse die Anzahl an.

2) Gehören beide Diagramme zur gleichen Datensammlung? Begründe.





3a) In Tempo-50-Bereichen verschiedener Städte wurden die Geschwindigkeiten der Fahrzeuge gemessen.

In einer Stadt A wurden 250 Fahrzeuge erfasst.
In einer Stadt B wurden 75 Fahrzeuge erfasst.

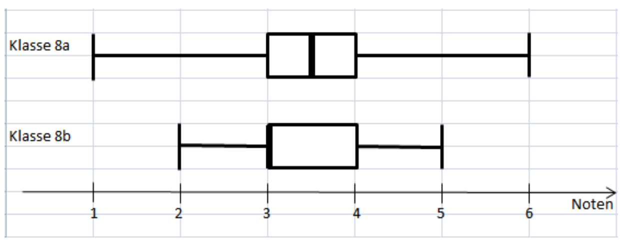
Die Tabelle zeigt die Ergebnisse:

Geschwindigkeit in km/h	bis 40	41 bis 50	51 bis 60	61 bis 70
Anzahl der Fahrzeuge in A	60	100	65	25
Anzahl der Fahrzeuge in B	5	30	24	16

- In welcher Stadt gab es anteilig weniger Geschwindigkeitsüberschreitungen?
- Begründe deine Aussage.

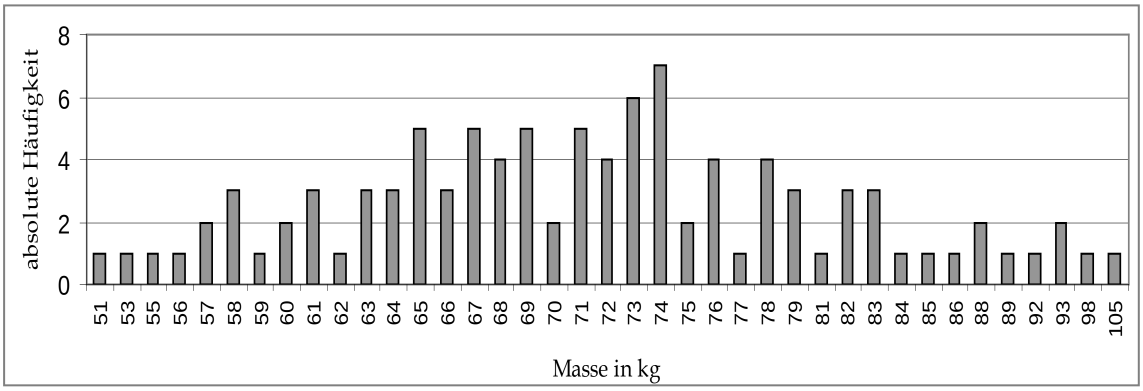
3b) In den Klassen 8a und 8b wurde die gleiche Klassenarbeit geschrieben. In den beiden Boxplots im Bild rechts wurden die Ergebnisse dargestellt.

Welche Klasse hat deiner Meinung nach besser abgeschnitten? Begründe.



1a) Das Thema „Freizeitverhalten“ soll in deiner Schule untersucht werden.
◦ Nenne die wichtigsten Schritte, die bei der Planung einer solchen Umfrage zu beachten sind.

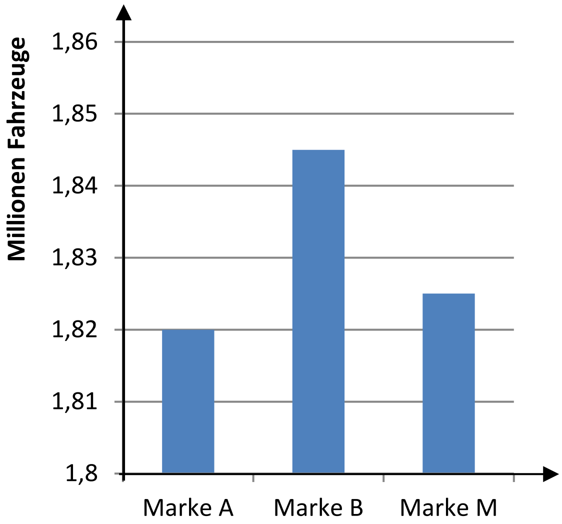
1b) 100 Jugendliche wurden gewogen.
Ein mögliches Diagramm zu diesen Messwerten sieht so aus.



◦ Begründe, warum hier eine Klasseneinteilung sinnvoll ist.

◦ Schlage eine geeignete Klasseneinteilung vor.

2) In dem Diagramm sind die Verkaufszahlen eines Absatzjahres von drei deutschen Automarken dargestellt. Ein Automagazin veröffentlicht das untere Diagramm mit dem Kommentar: „Automarke B verkauft alleine so viel wie A und M zusammen“.



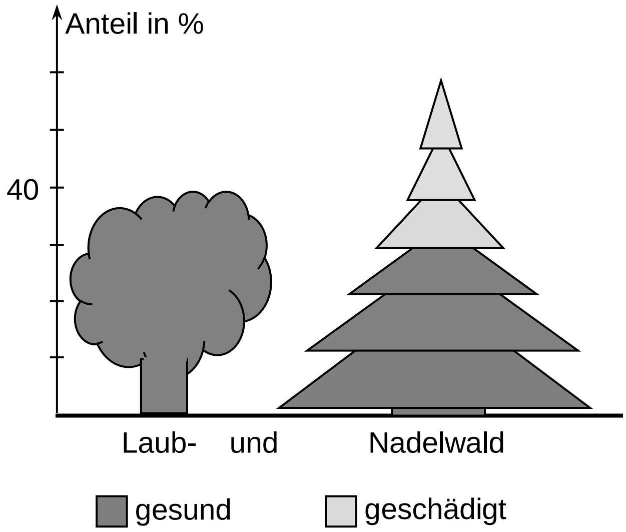
◦ Beschreibe die Manipulation im linken Diagramm.

◦ Wie müsste die Darstellung verändert werden, damit man erkennen kann, dass der obige Kommentar falsch ist?

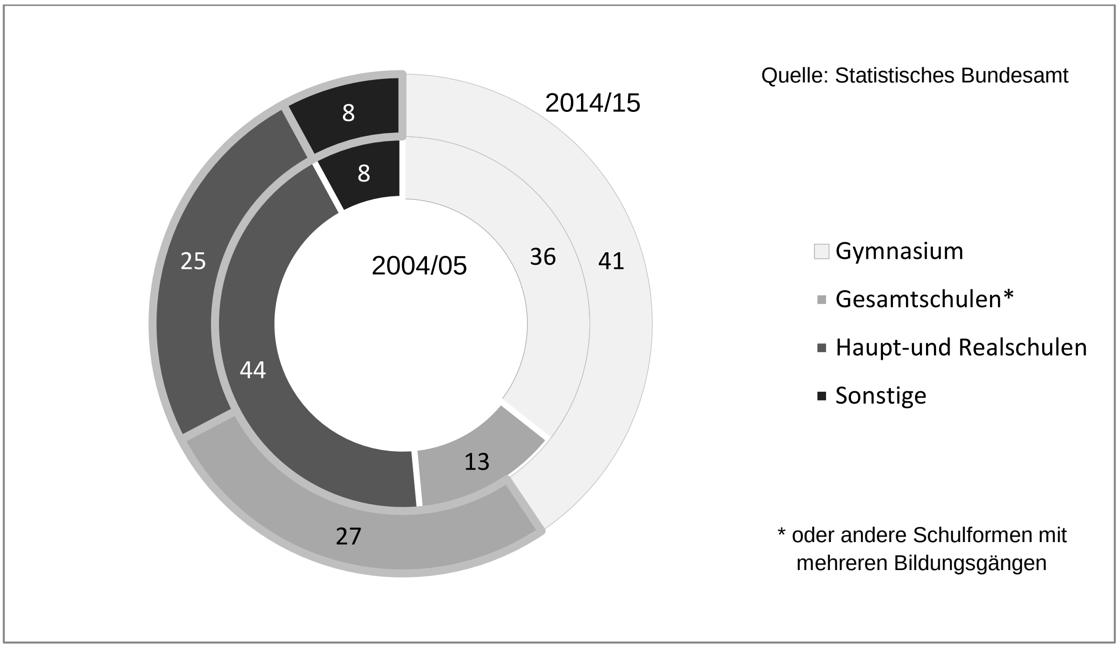
◦ Zeichne ein eigenes Diagramm.

3a) Besorgte Bürger fragen bei einer Behörde nach: „Stimmt es, dass fast 50 % der Nadelwälder geschädigt sind?“
Als Antwort wird das nebenstehende Diagramm veröffentlicht.

- ◦ Formuliere eine Antwort, die sich aus dem Diagramm ablesen lässt.
- ◦ Wie müsste ein Diagramm aussehen, das die Antwort klarer ausdrückt?



3b) Dargestellt sind die Anteile der Schülerinnen und Schüler (in Prozent), die von der Grundschule auf die nächste Schulform wechseln.



- ◦ Beschreibe, welche Entwicklung der Schulformen im Diagramm erkennbar ist.

Diagnoseaufgaben

„Zufall“
nach Niveaustufen des RLP 1–10
sortiert

1) Für die Sportler gibt es rote, blaue und grüne T-Shirts.
Es gibt schwarze und braune Hosen.
Ziehe die Sportler unterschiedlich an.

- Male passend aus.

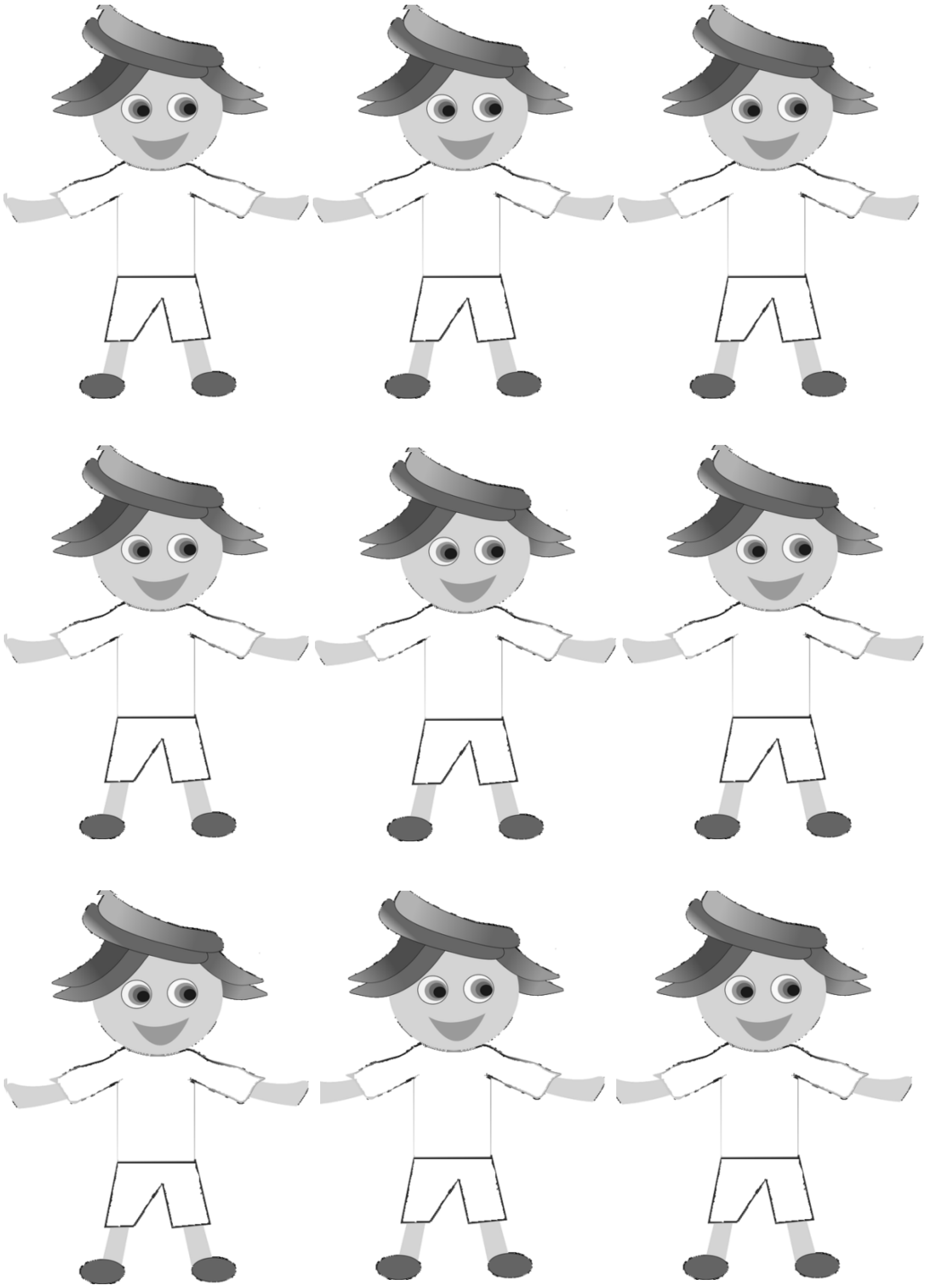
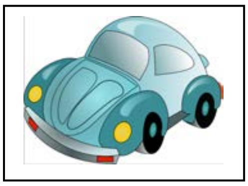
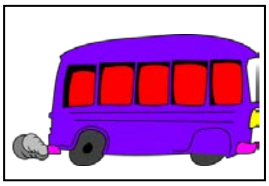
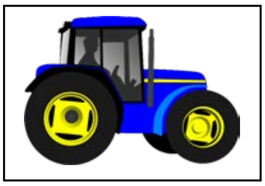
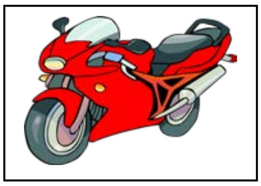


Bild 1: „Männchen“, pixabay.com, CC0

2a)    

Diese Karten werden umgedreht und gemischt. Eine Karte wird gezogen.
Kann es sein, dass auf der gezogenen Karte ein Flugzeug abgebildet ist?

- Kreuze passend an.

  ☐ Es ist sicher, dass ein Flugzeug abgebildet ist.

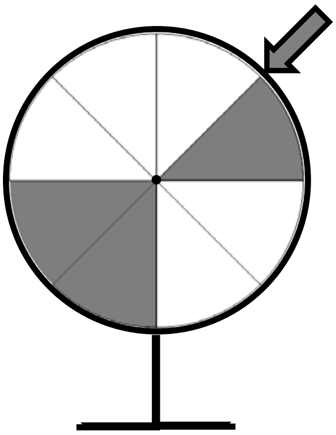
  ☐ Es ist möglich, aber nicht sicher, dass ein Flugzeug abgebildet ist.

  ☐ Es ist unmöglich, dass ein Flugzeug abgebildet ist.

- Begründe deine Entscheidung.

✎ ____

____

2b) 

Du drehst das Glücksrad.

- Bei welcher Farbe hast du die größte Gewinnchance?
  Begründe.

✎ ____

____

____

Bild 2: „Auto", pixabay.com, CC0   Bild 3: „Bus", pixabay.com, CC0   Bild 4: „Traktor", pixabay.com, CC0   Bild 5: „Motorrad", pixabay.com, CC0   Bild 6: „Glücksrad", LISUM, CC-BY-SA 4.0

1) 5 8 3

Welche dreistelligen Zahlen kannst du mit diesen Ziffernkarten legen?

- Schreibe möglichst viele verschiedene Zahlen auf.

2a) Finde zu jedem Beispiel mindestens zwei Möglichkeiten.

Was kann passieren, wenn Esra auf ein Tor schießt?

Möglichkeiten: ✏ ______________________________

____

Was kann passieren, wenn Theo mit einem Würfel würfelt?

Möglichkeiten: ✏ ______________________________

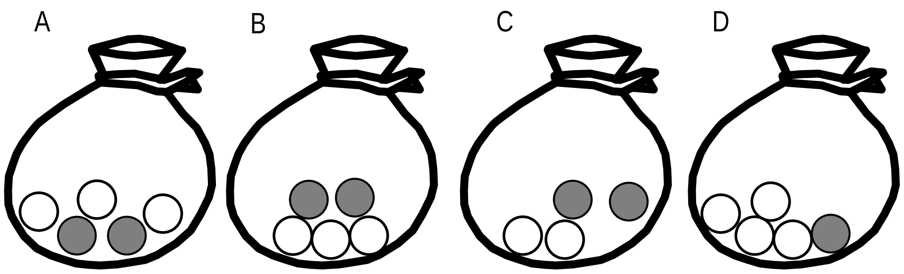
____

Was kann passieren, wenn du Schach spielst?

Möglichkeiten: ✏ ______________________________

____

2b) Du möchtest mit verbundenen Augen eine weiße Kugel ziehen.



Bei welchem Säckchen ist die Chance am größten?

- Begründe.

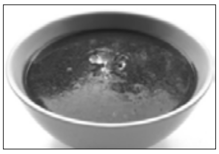
✏ ______________________________

____

Bild 1: „Vier Säckchen“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

1) Vorspeisen:


Salat


Tomaten-suppe

Hauptspeisen:


Pizza


Bratwurst


Nudeln

Stelle verschiedene Menüs aus je einer Vorspeise und einer Hauptspeise zusammen.

- Finde alle Möglichkeiten. Schreibe sie geordnet auf.

2a) Beschreibe eine Situation, …

- in der es genau zwei mögliche Ergebnisse gibt.

  ____

- in der es genau drei mögliche Ergebnisse gibt.

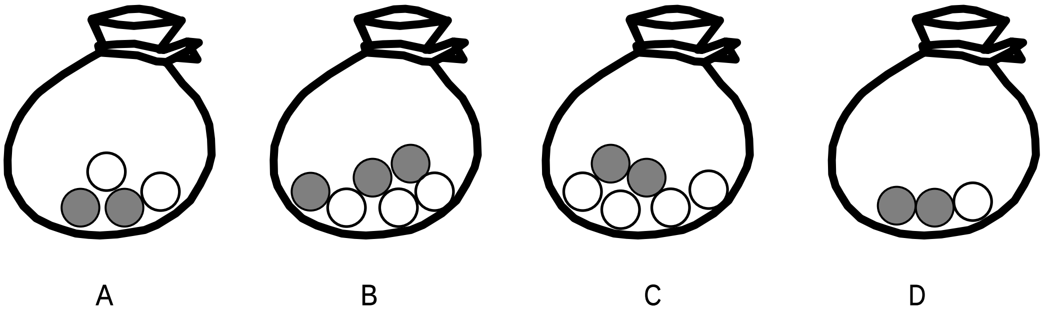
  ____

- in der es mehr als drei mögliche Ergebnisse gibt.

  ____

Bild 1: „Salat", pixabay.com, CC0 Bild 2: „Suppe", pixabay.com, CC0 Bild 3: „Pizza", pixabay.com, CC0 Bild 4: „Bratwurst", pixabay.com, CC0 Bild 5: „Nudeln", pixabay.com, CC0

2b)



Du ziehst mit verbundenen Augen eine Kugel aus einem Säckchen.
Du gewinnst, wenn du eine weiße Kugel ziehst.

- Aus welchem Säckchen würdest du ziehen? Begründe.

____

____

____

____

Bild 6: „Vier Säckchen", LISUM, CC-BY-SA 4.0

1)



Drei Münzen werden nacheinander geworfen. Jede dieser Münzen kann Wappen (W) oder Zahl (Z) zeigen.

- Schreibe alle möglichen Ergebnisse dieses Zufallsexperimentes übersichtlich auf.
- Kennzeichne in deiner Darstellung alle Wurfvarianten mit zweimal „Zahl“.

2a) Beschreibe eine Situation, …

- in der es sich um einen einstufigen Zufallsversuch handelt.

____

____

____

- in der es sich um einen zweistufigen Zufallsversuch handelt.

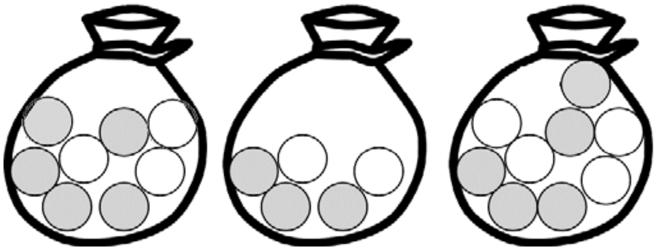
____

____

____

Bild 1: „Münze 10 ct“, pixabay.com, CC0
Bild 2: „Münze 20 ct“, pixabay.com, CC0
Bild 3: „Münze 50 ct“, pixabay.com, CC0

2b)



A B C

- Bei welchem Säckchen ist die Wahrscheinlichkeit eine weiße Kugel zu ziehen am größten?
- Begründe.

Bild 4: „Drei Säckchen“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

1) Ein Menü kann aus Vorspeise, Hauptspeise und Dessert bestehen.

Folgende Speisen werden angeboten:

Vorspeisen	Hauptspeisen	Dessert
Salat	Hähnchen	Eis
Tomatensuppe	Pizza	Obst

- Fertige ein Baumdiagramm an und finde mit dessen Hilfe heraus, wie viele Menüs man zusammenstellen kann.

- Angenommen, man kann auf das Dessert verzichten.

  Wie wird sich die Anzahl der Menüs dadurch verändern?

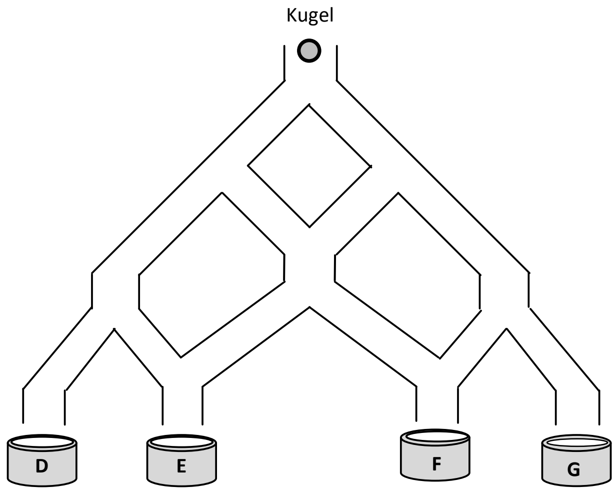
  ____

- Stelle das Ergebnis deiner Überlegungen im Baumdiagramm mit einer anderen Farbe dar.

2a) Hier ist ein Glücksspielapparat skizziert.

Oben wird eine Kugel eingeworfen, die dann zufällig auf einem der Wege nach unten in einen der Töpfe fällt.

Es gibt 8 verschiedene Wege.



- Erstelle dazu ein Baumdiagramm.

- Begründe, dass es sich um einen dreistufigen Zufallsversuch handelt.

Bild 1: „Wege", LISUM, CC-BY SA 4.0

2b) In einem großen Gefäß befinden sich Kugeln in vier verschiedenen Farben. Bei einem Zufallsversuch wurde mehrmals eine Kugel gezogen, die Farbe notiert und die Kugel wieder ins Gefäß gelegt.
Die Tabelle zeigt für verschiedene Anzahlen von Versuchen die absolute und die relative Häufigkeit für das Ziehen einer roten Kugel.

Anzahl der Versuche	Kugelfarbe: rot	
	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit
10	4	0,4
400	70	0,175
5000	1010	0,202

Tim meint: „Die ermittelten relativen Häufigkeiten sind sehr unterschiedlich, daher kann die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Ziehen einer roten Kugel“ nicht eingeschätzt werden.“

Florian entgegnet: „Ich schätze die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Ziehen einer roten Kugel“ mit P(rot)= 0,2 ein.“

- Nimm zu den Aussagen von Tim und Florian Stellung.

- Gib eine mögliche Anzahl von roten Kugeln und nicht roten Kugeln im Gefäß an, die zum Versuchsergebnis passt. Begründe deine Wahl.

- Gib eine weitere mögliche Anzahl von roten Kugeln und nicht roten Kugeln an.

1)

2	5	2	7

- Schreibe alle vierstelligen Zahlen auf, die man aus diesen Ziffernkarten bilden kann.

- Begründe die Vollständigkeit deiner Lösung mit einem Baumdiagramm.

2a) Ein Test besteht aus drei Aufgaben. Bei jeder Aufgabe gibt es vier vorgegebene Antwortmöglichkeiten. Es ist immer nur eine der vier Antworten richtig.

Tim freut sich und will sich auf sein Glück verlassen.
Klara meint: „Die Wahrscheinlichkeit, dass du alle Aufgaben richtig ankreuzt, ist kleiner als 2 %.“

Hat Klara recht?
Begründe deine Antwort.

Bild 1: „Test“, pixabay.com, CC0

2b) In einem Betrieb werden Schrauben hergestellt. Die Schrauben werden in sehr großer Anzahl vollautomatisch produziert und sind nicht alle perfekt.

Kategorie	Q	S	F	A
Merkmale	beste Qualität	Standardqualität	Schrauben mit kleinen Fehlern	Ausschuss

Regelmäßig wird die Qualität der Schrauben überprüft.

Montag: Ein Mitarbeiter nimmt 3 Schrauben aus einem Karton und findet:

3-mal die Kategorie Q.

Dienstag: Der Meister entnimmt 10 Schrauben und findet:

2-mal Kategorie A,
1-mal Kategorie F,
3-mal Kategorie S und
4-mal Kategorie Q.

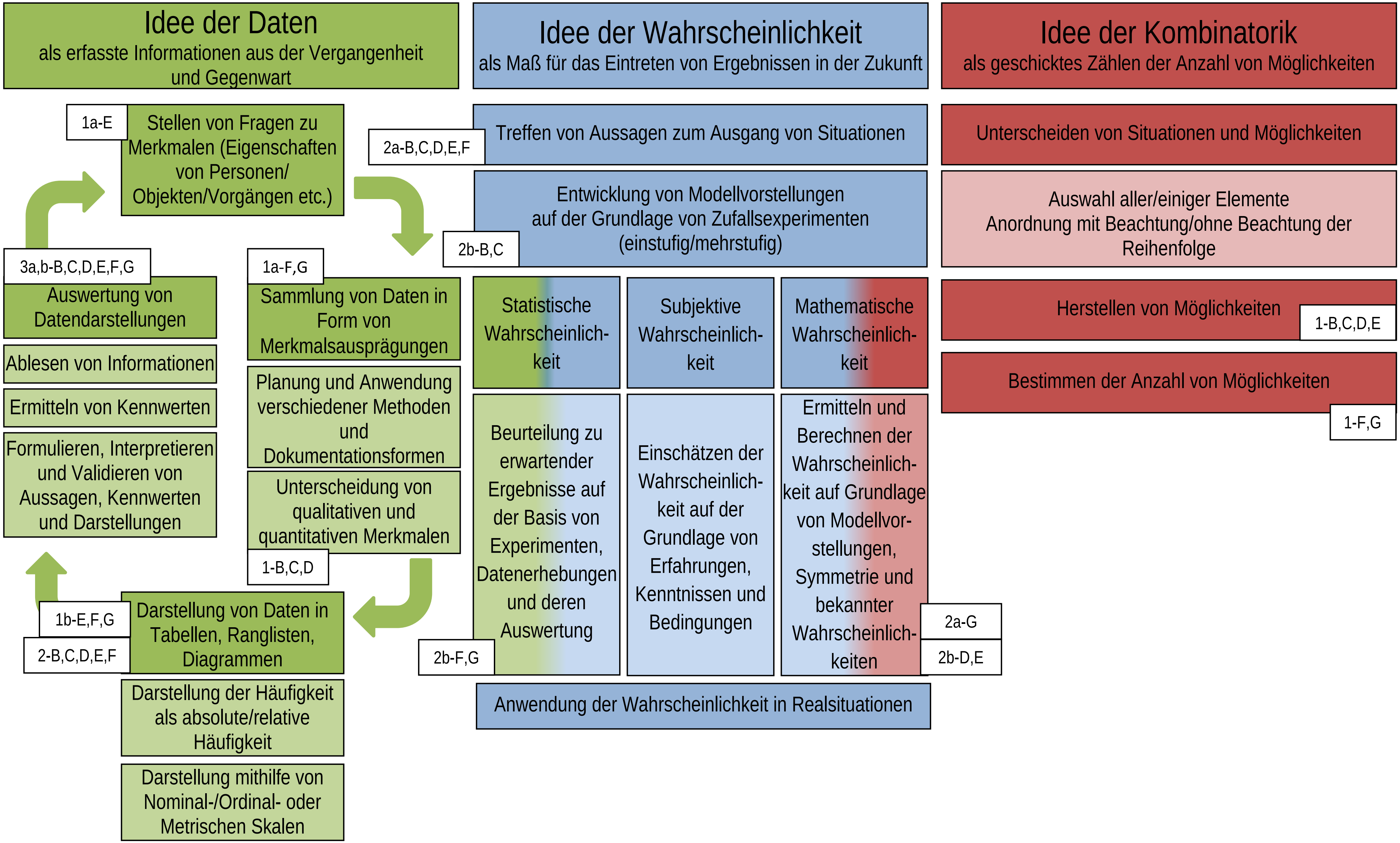
Freitag: Ein Beauftragter der Betriebsleitung entnimmt aus einer Palette 1000 Schrauben und zählt:

8-mal Kategorie A,
42-mal Kategorie F,
290-mal die Kategorie S und
660-mal die Kategorie Q.

- Der Angestellte, der am Montag die Schrauben prüfte, meint: „Am Montag haben wir nur Schrauben in der höchsten Stufe Q produziert.“
  Was meinst du dazu? Begründe.

- Schrauben der Kategorie F oder A darf ein Käufer zurückgeben.
  Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine gekaufte Schraube zurückgegeben werden darf? Begründe.

Zuordnung der Diagnoseaufgaben zum inhaltlichen Konzept



Darum geht es:

Daten sind Informationen aus der Vergangenheit und Gegenwart, die durch Beobachtungen, Befragungen, Recherchen oder als Ergebnis von Messungen gewonnen werden. Dabei wird eine bestimmte Menge von Objekten und Individuen (die *Grundgesamtheit*) bezüglich verschiedener Merkmale untersucht. Vor Beginn der Datenerhebung ist zu klären, welche Elemente (oder *Merkmalsträger*) zur Grundgesamtheit gehören, welches Merkmal untersucht werden soll und welche Fragen geeignet und auswertbar sind.

Merkmale und ihre Ausprägungen unterscheiden sich in der Art ihrer Skalierung. Je nach Art der Merkmale stehen Nominalskalen, Ordinalskalen oder Kardinalskalen zur Verfügung.

Skala	Merkmalsausprägungen können…	Beispiel für Merkmale
Nominalskala	unterschieden werden	Lieblingssportart, Farbe, Automarken
Ordinalskala	geordnet werden	Schulnoten, Schwierigkeitsgrade, Platzierungen
Kardinalskala	im Abstand oder Verhältnis verglichen werden	Körpergröße in cm, gemessene Größen

Merkmalsausprägungen können stets in (ungeordneten) Urlisten und als Strichlisten erfasst werden.

Liegt ein ordinal oder kardinal skaliertes Merkmal vor, so kann die Urliste auch zu einer Rangliste geordnet werden. Daraus lassen sich leicht Häufigkeitstabellen erstellen, die die absoluten Häufigkeiten von Merkmalsausprägungen erfassen und mit deren Hilfe man die relativen Häufigkeiten ermitteln kann. Beim Übergang von der Urliste zur Strichliste bzw. zur Häufigkeitstabelle wird eine Reduktion der Informationen vorgenommen. Die Zuordnung der einzelnen Merkmalsausprägungen zu den einzelnen Merkmalsträgern ist nicht mehr erkennbar.

Zur Auswertung von Daten ist es häufig notwendig, verschiedene Merkmalsausprägungen zusammenzufassen. Diese Klassenbildung ist ein wichtiger Prozess, der die Übersichtlichkeit und Aussagekraft der Darstellung bestimmt.

Die relative Häufigkeit wird dazu genutzt, verschieden große Datenmengen oder Stichproben miteinander zu vergleichen. Sie ist zudem die Grundlage für die Ermittlung von statistischen Wahrscheinlichkeiten.

Für die Veranschaulichung von Daten steht eine Vielzahl verschiedener Diagrammarten zur Verfügung, z. B. Streifen-, Säulen-, Balken-, Kreisdiagramme oder Boxplots. Die Art der gesammelten Daten hat Einfluss auf die Auswahl eines geeigneten Diagrammtyps und ggf. die Einteilung der Achsen.

Die Reduktion, Darstellung und Auswertung von Daten wird durch die Bestimmung statistischer Kennwerte erleichtert. Je nach Skalierung können verschiedene Kennwerte bestimmt werden:

- Nominalskala – seltenster Wert, häufigster Wert (Modalwert)
- Ordinalskala – kleinstes Beobachtungsergebnis (Minimum), größtes Beobachtungsergebnis (Maximum), Zentralwert (Median), Viertelwert (Quartil)
- Kardinalskala – Durchschnitt (arithmetisches Mittel), Spannweite (Differenz von Maximum und Minimum), Quartilsabstand

Mithilfe ausgewählter Kennwerte können vergleichende oder beurteilende Aussagen zu Datenerhebungen getroffen werden. Dazu gehören auch die Prüfung der Plausibilität von Daten und die besondere Beachtung von Ausreißern.

Das arithmetische Mittel wird oft auch als Durchschnitt bezeichnet. Für die Ausbildung eines inhaltlichen Verständnisses und den Aufbau von Grundvorstellungen zum arithmetischen Mittel nutzt man die Ausgleichs-, die Gleichverteilungs- und die Schwerpunkteigenschaft.

Die Boxplotdarstellung (Kastenschaubild) ist ein gutes Hilfsmittel für den Vergleich von Verteilungen von Daten zu einem bestimmten Merkmal. Dabei werden die ermittelten Kennwerte Minimum, Maximum, Median und Quartil genutzt.

Ein kompetenter und kritischer Umgang mit bereits erfassten Daten und ihren Darstellungen, aber auch mit verschiedenen Formen der Datenerfassung, insbesondere personenbezogener Daten, stellt im zunehmenden Maße eine grundlegende Alltagskompetenz dar.

Förderaufgaben
„Idee der Daten“
Grundschule

Förderschritte zu den Diagnoseaufgaben „Daten“ (B,C,D): 1, 2, 3a, 3b

Übersicht über die Förderaufgaben:

1. Sortieren nach vorgegebenen Merkmalen
2. Sortieren nach Merkmalen und Finden von Merkmalen
3. Vergleichen von Urlisten
4. Stellen von Fragen und Zuordnen von Informationen
5. Erstellen einer Urliste nach einem vorgegebenen Merkmal
6. Erstellen von Strichlisten nach vorgegebenen Merkmalen
7. Fortsetzen einer Strichliste
8. Erstellen einer Ur- und Strichliste nach vorgegebenen Merkmalen
9. Übertragen von Daten aus einer Urliste in eine Tabelle mithilfe von Informationskarten
10. Übertragen von Daten aus einer Strichliste in eine Tabelle
11. Vergleichen von Strichlisten und Tabellen
12. Übertragen von Daten aus einer Urliste in eine Tabelle
13. Ergänzen von Tabellen mithilfe vorgegebener Daten
14. Klassifizieren und Übertragen von Daten in eine Tabelle
15. Vergleichen und Beschreiben von Klasseneinteilungen
16. Erheben und Klassifizieren von Daten
17. Bauen von Steckwürfeltürmen nach Vorgaben aus einer Tabelle
18. Nutzen eines Pappstreifens zum Ablesen von Informationen
19. Darstellen und Ablesen von Anzahlen an einer Säule
20. Erstellen von Skalen mithilfe von Notizzetteln
21. Darstellen von Anzahl zur Erstellung eines Säulendiagramms
22. Übertragen von Daten aus einer Strichliste in ein Säulendiagramm
23. Überprüfen von Diagrammen und Korrigieren von Fehlern
24. Erstellen eines Säulendiagramms nach einer Schrittfolge
25. Vergleichen von einem Säulendiagramm mit einem Balkendiagramm
26. Erarbeiten eines Balkendiagramms mithilfe von Steckwürfeln
27. Darstellen und Ablesen von Anzahlen am Balken
28. Übertragen von Daten aus der Strichliste in ein Balkendiagramm
29. Beschreiben und Vervollständigen eines Balkendiagramms
30. Bezeichnen der Achsen an einem Säulendiagramm
31. Übertragen von Daten aus einem Balkendiagramm in eine Tabelle
32. Beschreiben eines Schülerfehlers beim Beschriften der Achsen
33. Vervollständigen und Vergleichen von Diagrammen
34. Erstellen einer Tabelle und eines Diagramms mithilfe vorgegebener Daten
35. Sortieren von Steckwürfeln und Vergleichen von Mengen
36. Vergleichen von Würfeltürmen nach Vorgaben
37. Ergänzen eines Lückentextes mithilfe einer Strichliste
38. Überprüfen und Zuordnen von Strichlisten
39. Auswählen von passenden Fragestellungen zu einem Diagramm
40. Finden von Möglichkeiten zum genauen Ablesen von Anzahlen
41. Stellen von passenden Fragen zum Diagramm
42. Auswerten eines Diagramms nach vorgegebenen Fragestellungen
43. Beschreiben von Veränderungen am Diagramm

44. Überprüfen von Aussagen zu einem Diagramm
45. Zuordnen von Diagrammen zu Tabellen und Korrigieren von Fehlern in Diagrammen
46. Zuordnen verschiedener Darstellungsformen zu gleichen Datensätzen
47. Ordnen von Informationen und Beantworten von Fragen
48. Ordnen von Lieblingszahlen und Bestimmen von Kennwerten
49. Erklären der Begriffe ,,Minimum“ und ,,Maximum“
50. Finden und Überprüfen einer Erklärung zur ,,Spannweite“
51. Ordnen von Informationen und Bestimmen von Kennwerten

Sortieren nach vorgegebenen Merkmalen | 1

Material: *Kärtchen mit verschiedenen Bildern oder (Ober-)Begriffen*
(verschiedene Haustiere/andere Tiere, Fahrzeuge, Spielzeuge, Personen…)

- Suche alle Kärtchen mit Haustieren. Lege sie an die passende Stelle.
- Suche dann alle Kärtchen zu Fahrzeugen und Spielzeugen heraus.
  Lege sie an die passende Stelle.


Haustiere


Fahrzeuge


Spielzeuge

Bild 1: „Katze", pixabay.com, CC0
Bild 2: „Auto", pixabay.com, CC0
Bild 3: „Schaukelstuhl", pixabay.com, CC0

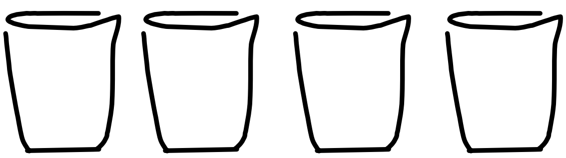
Daten & Zufall
Grundschule

Idee der Daten
Sammeln von Daten

Sortieren nach Merkmalen und Finden von Merkmalen | 2

Material: *vier Becher;*
rote, grüne, blaue und gelbe Stifte in unterschiedlicher Anzahl
(wenn möglich auch in unterschiedlicher Form und Länge)

- Sortiere alle Stifte nach Farben in die Becher ein.



- Warum ist das Sortieren der Stifte sinnvoll? Was kannst du dadurch herausfinden?
- Kannst du die Stifte auch noch anders sortieren?

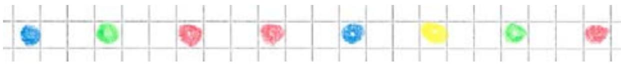
Bild 4: „Becher", LISUM, CC-BY-SA 4.0
Bild 5: „4 Stifte", pixabay.com, CC0

Vergleichen von Urlisten

3

Ina und Tim haben 8 Kinder nach ihrer Lieblingsfarbe befragt.
Sie haben dazu eine Liste erstellt.

Was ist deine Lieblingsfarbe?

Ina: 

Tim: Max - blau, Ina - grün, Tim - rot, Ela - rot,
Sabine - blau, Irina - gelb, Anke - grün, Alex - rot

Vergleiche die beiden Listen und beantworte die Fragen.

- Was ist in beiden Listen gleich?
- Was ist verschieden?

Kann man aus Tims Liste die Liste von Ina machen? Geht es auch andersherum?

Bild 6: „Punkteliste", LISUM, CC-BY-SA 4.0
Bild 7: „Urliste", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall
Grundschule

Idee der Daten
Sammeln von Daten

Stellen von Fragen und Zuordnen von Informationen

4

Erik hat seine Mitschüler befragt und eine Liste erstellt.
Die Antworten sind dabei durcheinander geraten.

8 Jahre, blond, braun, 9 Jahre, 8 Jahre, 10 Jahre
schwarz, blond, blond, 9 Jahre, braun, 8 Jahre

- Welche beiden Fragen könnte Erik seinen Mitschülern gestellt haben? Schreibe sie auf.

- Ordne die Antworten aus der Liste deinen beiden Fragen zu.

Bild 8: „Urliste", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Erstellen einer Urliste nach einem vorgegebenen Merkmal | 5

Frage 10 Kinder nach ihrem Lieblingsfach.

- Schreibe die Antworten (**Daten**) auf.

  Schreibe zum Beispiel so: Sport, Mathe, Musik, Sport ….

- Unterstreiche gleiche Lieblingsfächer immer mit der gleichen Farbe.

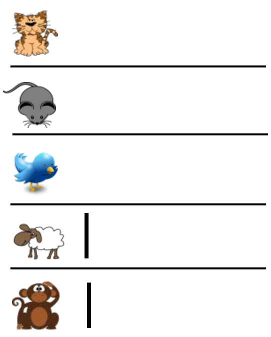
Bild 9: „Kinder“, pixabay.com, CC0

Erstellen von Strichlisten nach vorgegebenen Merkmalen | 6

Hier siehst du verschiedene Tiere.

Für jedes Tier soll ein Strich gezeichnet werden. So entsteht eine **Strichliste**.

- Setze die Striche für die fehlenden Tiere fort.
- Streiche die gezählten Tiere durch.



Jeder 5. Strich ist ein Schrägstrich: ~~||||~~

Bild 10: „Affe“, pixabay.com, CC0 *Bild 11: „Schaf“, pixabay.com, CC0* *Bild 12: „Vogel“, pixabay.com, CC0*
Bild 13: „Katze“, pixabay.com, CC0 *Bild 14: „Maus“, pixabay.com, CC0*

Daten & Zufall
Grundschule

Idee der Daten
Sammeln und Darstellen von Daten

Fortsetzen einer Strichliste	7

Wie oft kommen die Buchstaben „e“, „i“ und „n“ in dem Satz vor?

Mein Vater erklärt mir jeden Samstag unseren Nachthimmel.

Eva hat angefangen und für jeden Buchstaben „e“ einen Strich gezeichnet.

Setze die Striche für die anderen Buchstaben fort.

e ~~IIII~~ III ____________

i ____________

n ____________

Daten & Zufall
Grundschule

Idee der Daten
Sammeln und Darstellen von Daten

Erstellen einer Ur- und Strichliste nach vorgegebenen Merkmalen	8

Befrage 10 Kinder nach dem Monat, in dem sie Geburtstag haben.

- Wie könnte deine Frage heißen?

Wann…?
In welchem Monat…?

- Schreibe die Antworten (**Daten**) der Kinder auf.

- Mache eine Strichliste.

Bild 15: „Notizzettel“, pixabay.com, CC0

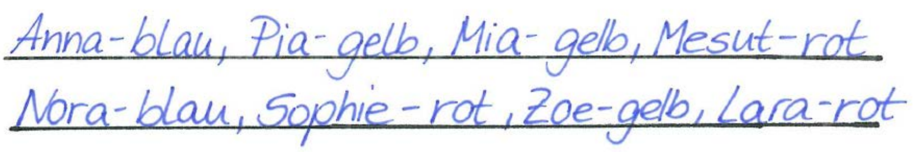
Daten & Zufall
Grundschule

Idee der Daten
Darstellen von Daten

Übertragen von Daten aus einer Urliste in eine Tabelle mithilfe von Informationskarten | 9

Material: *beschriftete Kärtchen (wie in der Abbildung)*

Lisa hat die Lieblingsfarben der Mädchen ihrer Klasse aufgeschrieben.



Sie möchte die gesammelten Daten in eine **Tabelle** eintragen.

Ordne die Kärtchen sinnvoll in die Tabelle ein.

Lieblingsfarben			
Anzahl der Kinder			

2

3

gelb

blau

3

rot

Bild 16: „Urliste", LISUM, CC-BY-SA 4.0

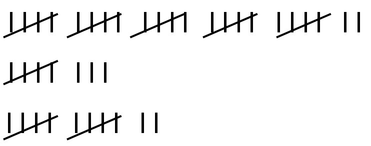
Daten & Zufall
Grundschule

Idee der Daten
Darstellen von Daten

Übertragen von Daten aus einer Strichliste in eine Tabelle | 10

Elias hat den Verkehr auf der Straße beobachtet und eine Strichliste erstellt.

Autos
Motorräder
Fahrräder



- Wie viele Autos, Motorräder und Fahrräder hat er gesehen?

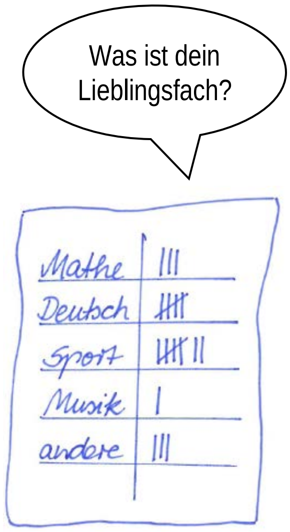
  Zähle sie und trage die Anzahlen in die Tabelle ein.

Fahrzeuge	Autos	Motorräder	Fahrräder
Anzahl der Fahrzeuge			

Vergleichen von Strichlisten und Tabellen — 11

Erik, Anna und Max haben die Strichliste in eine Tabelle übertragen.

- Finde die Fehler und kreise sie ein.
- Welches Kind hat es richtig gemacht?



Erik:

Fach	Mathe	Deutsch	Sport	Musik
Anzahl	3	5	7	1

Anna:

Fach	Mathe	Deutsch	Sport	Musik	andere
Anzahl	3	7	5	1	3

Max:

Fach	Mathe	Deutsch	Sport	Musik	andere
Anzahl	3	5	7	1	3

Bild 17: „Strichliste“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Übertragen von Daten aus einer Urliste in eine Tabelle — 12

Die Kinder einer Klasse haben angegeben, welche Sportart sie betreiben.

*Tim – Fußball, Alex – Handball, Tina – Tanzen, Lena – Handball, Murat – Fußball,
Ole – Fußball, Max – Handball, Susi – Fußball, Anna – Handball, Jonas – Schwimmen, Mia – Tanzen*

- Trage deine Ergebnisse in die Tabelle ein.

Sportart	Fußball			
Anzahl der Kinder				

Ergänzen von Tabellen mithilfe vorgegebener Daten | 13

Lisa hat Kinder zu verschiedenen Themen befragt.
Dabei sind die **Daten** durcheinander geraten.

Fußball spielen, 2 Geschwister, Tanzen, Hamster, Hund, keine Geschwister, Katze, Malen, Hamster, 1 Geschwisterkind

- Wie könnte die fehlende Überschrift in der Tabelle heißen? Schreibe auf.
- Ordne die Daten in die Tabelle ein.

	Hobbies	Anzahl der Geschwister

Klassifizieren und Übertragen von Daten in eine Tabelle | 14

Wie lange hast du gestern am Computer gesessen?

Tim – 60 min, Alex – 15 min, Tina – 0 min, Lena – 30 min, Murat – 90 min, Ole – 45 min, Max – 30 min, Susi – 20 min, Anna – 40 min, Jonas – 60 min, Mia – 45 min

- Unterstreiche alle Kinder mit **grün**, die weniger als 30 Minuten am Computer sitzen.
- Unterstreiche alle Kinder mit **gelb**, die von 30 bis 60 Minuten am Computer sitzen.
- Unterstreiche alle Kinder mit **rot**, die länger als 60 Minuten am Computer sitzen.

- Ergänze die Tabelle. Nutze deine farbigen Markierungen als Hilfe.

Zeit am Computer	weniger als 30 Minuten	von 30 Minuten bis 60 Minuten	mehr als 60 Minuten
Anzahl der Kinder			

Bild 18: „Computer", pixabay.com, CC0

Vergleichen und Beschreiben von Klasseneinteilungen

Wie viele Tage warst du in den Ferien im Hort?

Tim – 7 Tage, Alex – 4 Tage, Tina – 10 Tage, Lena – 12 Tage, Murat – 0 Tage,
Ole – 10 Tage, Max – 4 Tage, Susi – 0 Tage, Anna – 0 Tage, Lisa – 14 Tage

Erik und Finn haben zu den Daten Tabellen erstellt.

Erik:

Tage im Hort	0 Tage	4 Tage	7 Tage	10 Tage	12 Tage	14 Tage
Anzahl der Kinder	3	2	1	2	1	1

Finn:

Tage im Hort	weniger als 5 Tage	5 bis 10 Tage	mehr als 10 Tage
Anzahl der Kinder	5	3	2

Vergleiche die Tabellen. Beschreibe, wie Erik und Finn ihre Tabelle eingeteilt haben.

Daten & Zufall
Grundschule

Idee der Daten
Darstellen von Daten

Erheben und Klassifizieren von Daten

Finde heraus, wie lange die Kinder gestern für ihre Hausaufgaben benötigt haben.

- Welche Frage stellst du jedem Kind? Schreibe sie auf.
- Stelle 10 Kindern diese Frage und schreibe die Antworten (**Daten**) auf.
- Trage die Antworten (**Daten**) in eine **Tabelle** ein.
  Überlege dir eine sinnvolle Einteilung.

So könnte deine Tabelle aussehen:

Zeit für Hausaufgaben				
Anzahl der Kinder				

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall Grundschule	Idee der Daten Darstellen von Daten

Bauen von Steckwürfeltürmen nach Vorgaben aus einer Tabelle	17

Material: *Würfel (z. B. Steckwürfel), Karten mit Lieblingsfarben*

Anna hat ihre Mitschüler nach ihren Lieblingsfarben befragt und eine Tabelle erstellt.

Lieblingsfarbe	rot	gelb	blau	grün	lila
Anzahl der Schüler	5	6	3	7	3

Stelle für jede Farbe die passende Anzahl an Würfeln auf die Karten.

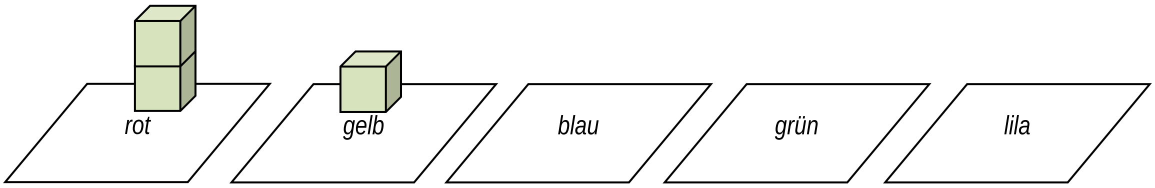


Bild 19: „Würfeltürme", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall Grundschule	Idee der Daten Darstellen von Daten

Nutzen eines Pappstreifens zum Ablesen von Informationen	18

Material: *Würfel (z. B. Steckwürfel), 1 Pappstreifen mit Skalierung nach Würfelhöhe*
1 Papierstreifen mit Einteilung nach Monaten

Serra hat 21 Kinder nach ihrem Geburtsmonat befragt und Würfeltürme gebaut.
Stelle nun den Pappstreifen neben jeden Würfelturm.
Wie viele Kinder haben in den verschiedenen Monaten Geburtstag? Lies am Pappstreifen ab.

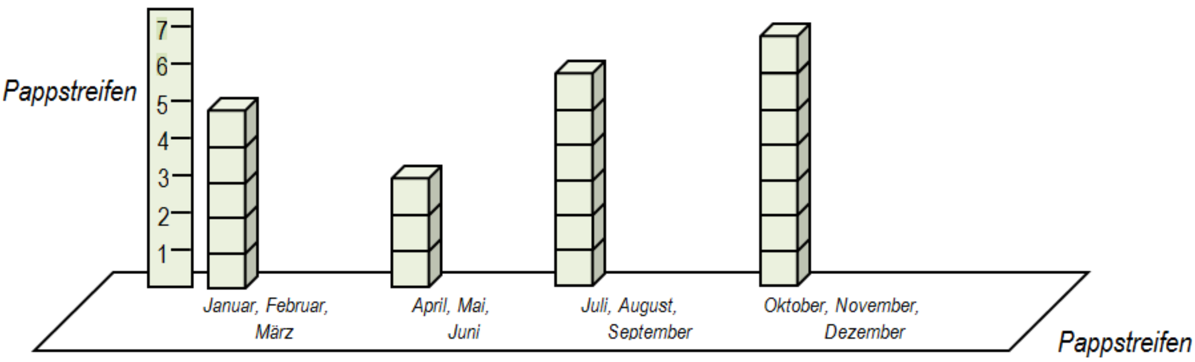
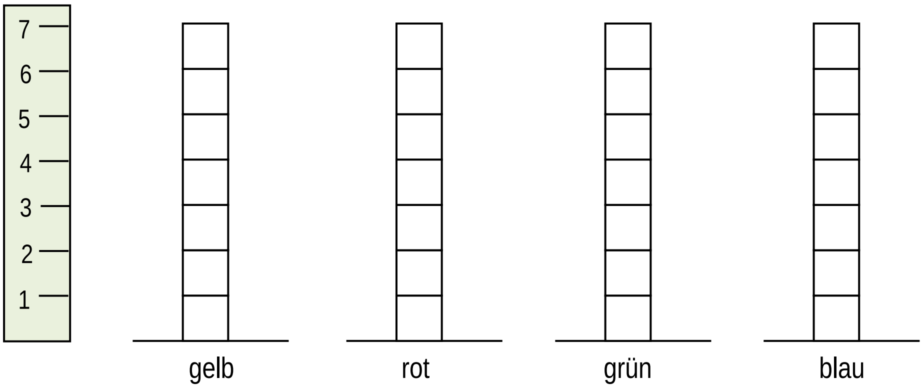


Bild 20: „Würfeltürme mit Pappstreifen", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall Grundschule	Idee der Daten Darstellen von Daten

Darstellen und Ablesen von Anzahlen an einer Säule — 19

Material: *Steckwürfel (rot, gelb, grün, blau) in unterschiedlicher Anzahl*



Wie viele Steckwürfel gibt es von jeder Farbe?

- Male für jeden Steckwürfel ein Feld in der passenden Farbe an.
- Lies die Anzahl der Steckwürfel am Streifen ab.

Bild 21: „Skala und Säulen", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

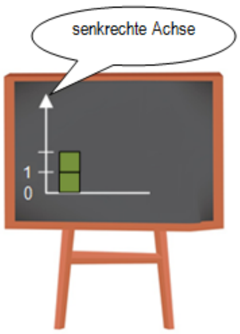
Daten & Zufall Grundschule	Idee der Daten Darstellen von Daten

Erstellen von Skalen mithilfe von Notizzetteln — 20

Material*: quadratische Notizzettel in zwei Farben, Tafel mit vorbereiteten Achsen*

Die bunten Zettel sollen in einem Diagramm geordnet werden.

- Hefte alle Zettel in der **gleichen** Farbe übereinander an der Tafel an.
  Beginne wie im Bild.
  ! Beachte: Die Zettel müssen genau aneinander gelegt werden.



- Zeichne nach jedem Zettel einen Strich an die senkrechte Achse.
- Schreibe neben den Strich die Anzahl der Zettel, die du schon gelegt hast.

Wenn du **alle** Zettel übereinander angeordnet hast, erhältst du **Säulen**.

- Schreibe unter jede Säule die Farbe der Zettel.

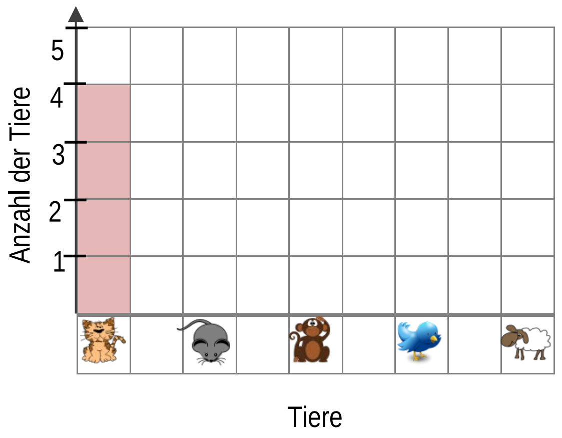
Bild 22: „Tafel", pixabay.com, CC0
Bild 23: „Tafelbeschriftung", LISUM, CC-BY-SA 4.0

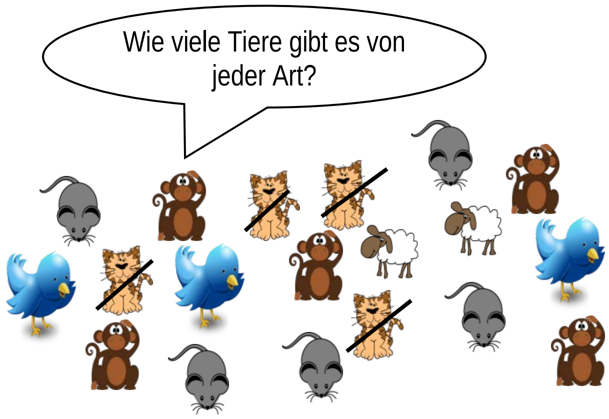
Daten & Zufall
Grundschule

Idee der Daten
Darstellen von Daten

Darstellen von Anzahl zur Erstellung eines Säulendiagramms | 21

Färbe für jedes Tier ein Kästchen ein.
Bei den Katzen siehst du, wie es geht.





Ben stellt fest: „Das entstandene Bild nennt man auch **Säulendiagramm.**“

Warum heißt das so? Finde eine mögliche Erklärung.

Bild 24: „Affe“, pixabay.com, CC0 *Bild 25: „Schaf“, pixabay.com, CC0* *Bild 26: „Vogel“, pixabay.com, CC0*
Bild 27: „Katze“, pixabay.com, CC0 *Bild 28: „Maus“, pixabay.com, CC0*

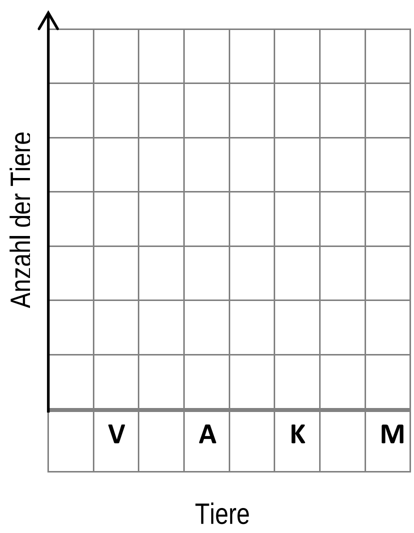
Daten & Zufall
Grundschule

Idee der Daten
Darstellen von Daten

Übertragen von Daten aus einer Strichliste in ein Säulendiagramm | 22

Übertrage die Ergebnisse aus der Strichliste in das Säulendiagramm.

Vogel	Affe	Katze	Maus
IIII	~~IIII~~ II	~~IIII~~ I	II



Daten & Zufall Grundschule	Idee der Daten Darstellen von Daten

Überprüfen von Diagrammen und Korrigieren von Fehlern	23

Schau dir die **Säulendiagramme** der Kinder an.

Kreise ein, was die Kinder falsch gemacht haben.

Beschreibe, wie es richtig sein muss.

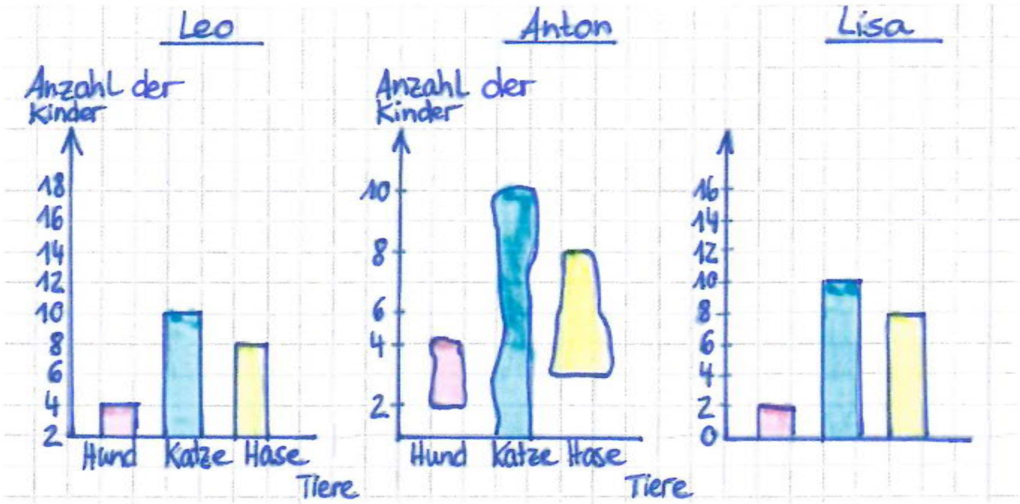


Bild 29: „Diagramme“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

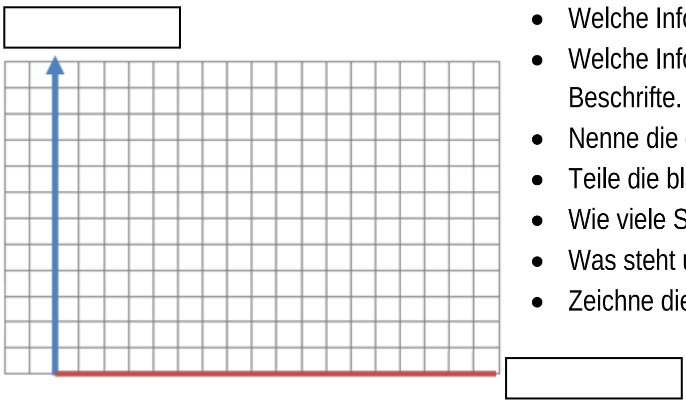
Daten & Zufall Grundschule	Idee der Daten Darstellen von Daten

Erstellen eines Säulendiagramms nach einer Schrittfolge	24

Material: *vorbereitetes Diagramm auf einem karierten Blatt (wie in der Abbildung)*

Klassen	3a	3b	3c	3d
Anzahl der Kinder	21	18	22	20

Trage die Daten aus der Tabelle in ein Säulendiagramm ein.



- Welche Informationen enthält die rote Achse? Beschrifte.
- Welche Informationen enthält die blaue Achse? Beschrifte.
- Nenne die größte Anzahl aus der Tabelle.
- Teile die blaue Achse sinnvoll ein.
- Wie viele Säulen muss Leon in das Diagramm zeichnen?
- Was steht unter den Säulen? Trage ein.
- Zeichne die Säulen ein.

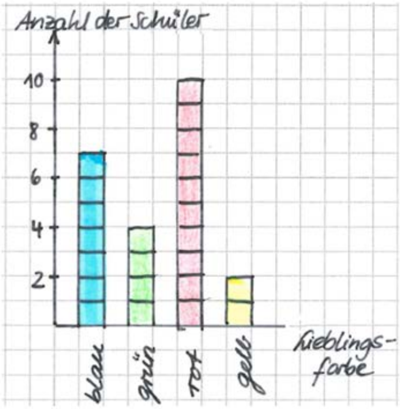
Vergleichen von einem Säulendiagramm mit einem Balkendiagramm | 25

Tina und Leon haben eine **Umfrage** gemacht.

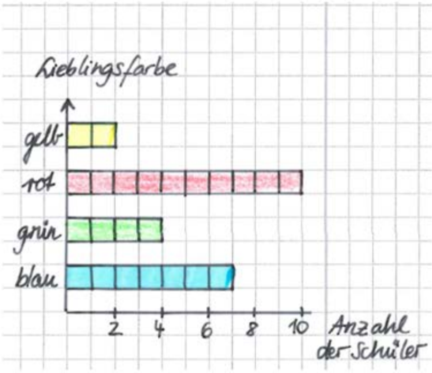
Sie haben ihre Mitschüler nach ihren Lieblingsfarben befragt.

Warum heißt es Balkendiagramm? Vermute.

Tina erstellt ein **Säulendiagramm**:



Leon erstellt ein **Balkendiagramm**:



Vergleiche das Säulendiagramm und das Balkendiagramm. Was stellst du fest?

Bild 30: „Diagramme", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall
Grundschule

Idee der Daten
Darstellen von Daten

Erarbeiten eines Balkendiagramms mithilfe von Steckwürfeln | 26

Material: *Stundenplan des Kindes, Steckwürfel, 2 beschriftete Pappstreifen (siehe Bild)*

Wie viele Stunden Mathematik, Deutsch, Sport und Musik hast du in der Woche?

Nutze deinen Stundenplan.
Stecke für jedes Fach die Würfel nebeneinander zusammen.

Wie viele Stunden hast du Mathe, Deutsch, Sport und Musik in der Woche? Lies am Streifen ab.

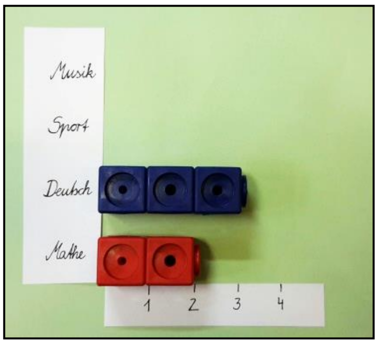


Bild 31: „Steckwürfel und Skalen", LISUM, CC-BY-SA 4.0

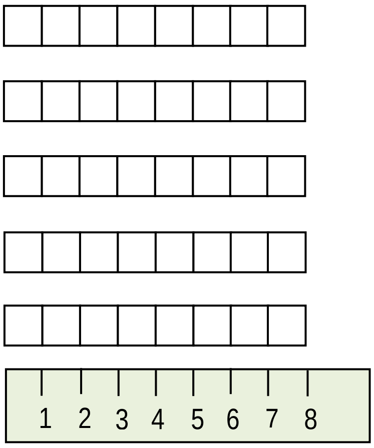
Darstellen und Ablesen von Anzahlen am Balken

27

Die Kinder haben angegeben, wie sie morgens in die Schule kommen.

- Male für jede Angabe ein Kästchen an.
- Wie viele Kinder kommen mit dem Auto, dem Fahrrad, dem Bus oder zu Fuß zur Schule? Lies am Streifen ab.

Fahrrad
Auto
zu Fuß
Bahn
Bus



Elisa – Auto	Serra – zu Fuß
Saskia – Bus	Malte – Auto
Abdul – zu Fuß	Tina – zu Fuß
Alexa – Fahrrad	Katja – Auto
Mia – Fahrrad	Tom – zu Fuß
Theo – zu Fuß	Bert – Auto

Bild 32: „Skala und Balken“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Übertragen von Daten aus der Strichliste in ein Balkendiagramm

28

Mia hat ihre Mitschüler nach ihrem Lieblingsfach befragt.
Ihre Ergebnisse hat sie in einer Strichliste dargestellt.

Vervollständige das **Balkendiagramm.**

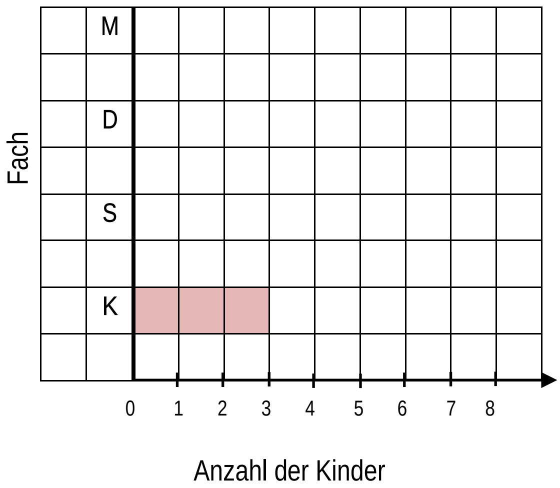


Bild 33: „Strichliste 2“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall
Grundschule

Idee der Daten
Darstellen von Daten

Beschreiben und Vervollständigen eines Balkendiagramms | 29

Anna möchte die Daten aus der Tabelle in das Diagramm übertragen.
Sie sagt: „300 Kinder kann ich nicht eintragen."

Max und Moritz Grundschule	Grundschule am Feldberg	Neue Grundschule
300 Kinder	700 Kinder	500 Kinder

Tim zeigt ihr an einem Beispiel, wie es geht.

- Beschreibe, was Tim gemacht hat.
- Ergänze die fehlenden Balken.

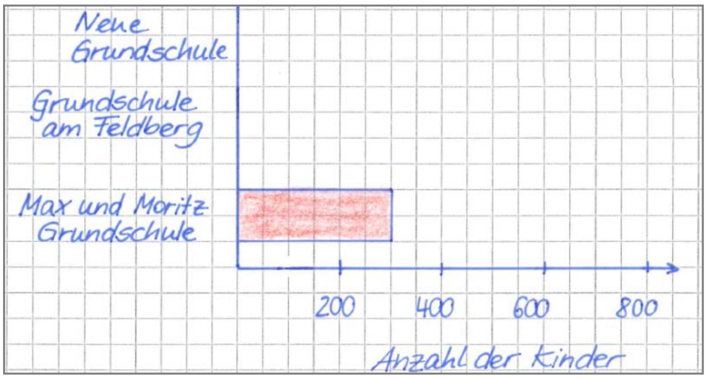


Bild 34: „Balkendiagramm", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall
Grundschule

Idee der Daten
Darstellen von Daten

Bezeichnen der Achsen an einem Säulendiagramm | 30

Alter der Kinder in Jahren	2	4	6	8
Anzahl der Kinder	4	6	3	1

Lara hat zur Tabelle ein Diagramm gezeichnet.
Dabei hat sie die Achsen nicht bezeichnet.

- Ergänze die fehlenden Achsenbezeichnungen.

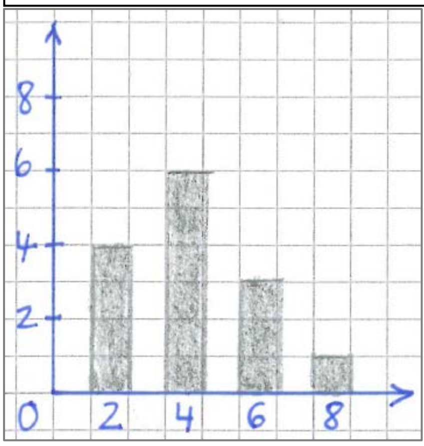
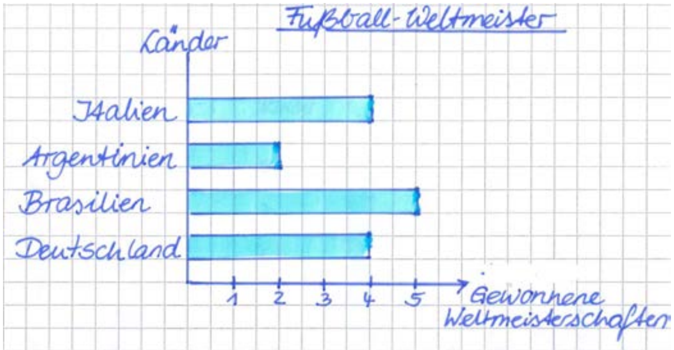


Bild 35: „Säulendiagramm", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Übertragen von Daten aus einem Balkendiagramm in eine Tabelle | 31

Übertrage die Daten aus dem Balkendiagramm in die Tabelle.



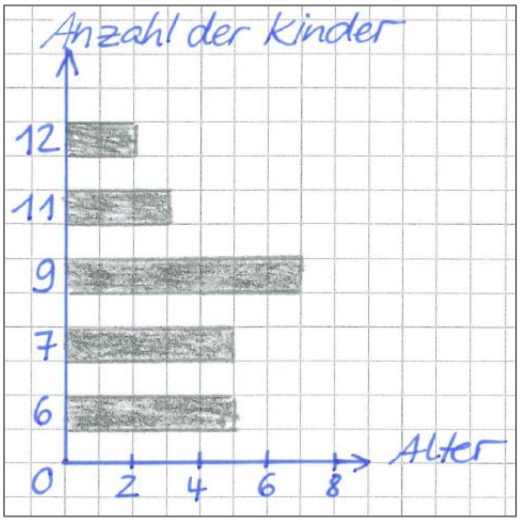
	Deutschland			
Anzahl der gewonnenen Weltmeisterschaften				

Bild 36: „Balkendiagramm“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Beschreiben eines Schülerfehlers beim Beschriften der Achsen | 32

Andi hat das Alter der Kinder in seinem Sportverein erfragt.
Seine Daten hat er in einem Balkendiagramm dargestellt.
Beim Beschriften der Achsen ist ihm ein Fehler passiert.

- Beschreibe den Fehler.



Alter	Anzahl der Kinder
6 Jahre	𝍸
7 Jahre	𝍸
9 Jahre	𝍸 II
11 Jahre	III
12 Jahre	II

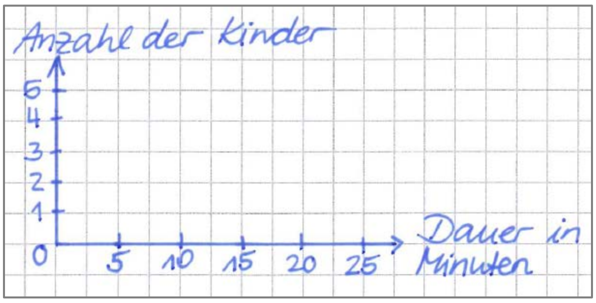
Bild 37: „Balkendiagramm“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

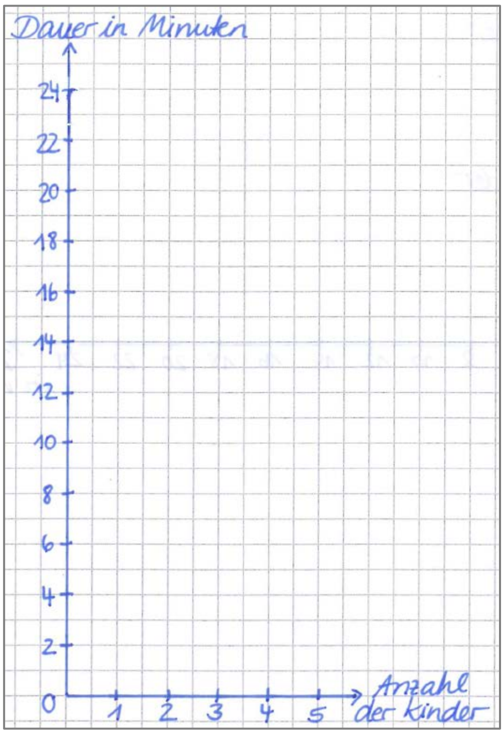
Vervollständigen und Vergleichen von Diagrammen

Die Kinder der 3a haben aufgeschrieben, wie lange sie für ihren Schulweg brauchen.

15 Minuten, 5 Minuten, 20 Minuten, 14 Minuten, 20 Minuten, 10 Minuten, 14 Minuten, 15 Minuten, 25 Minuten, 10 Minuten, 15 Minuten, 7 Minuten, 10 Minuten, 25 Minuten, 5 Minuten, 10 Minuten

- Vervollständige beide Diagramme.





- Vergleiche die Diagramme.
  Beschreibe, was du feststellst.

Bild 38: „Diagramm 1", LISUM, CC-BY-SA 4.0
Bild 39: „Diagramm 2", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Erstellen einer Tabelle und eines Diagramms mithilfe vorgegebener Daten

Theo hat die Schuhgrößen seiner Mitschüler erfragt.

- Trage die Daten in eine Tabelle ein.
- Übertrage die Daten aus der Tabelle in ein Diagramm.

35	36
36	39
38	35
39	36
35	38
35	38
37	35
34	37
39	

Sortieren von Steckwürfeln und Vergleichen von Mengen

Material: *8 blaue, 4 rote, 11 gelbe Steckwürfel (ungeordnet), 3 Teller o. ä.*

Sortiere die Steckwürfel nach Farben auf die Teller.

Vergleiche die Anzahl der Steckwürfel auf den Tellern miteinander.

- Von welcher Farbe gibt es die meisten Steckwürfel?
- Von welcher Farbe gibt es die wenigsten Steckwürfel?

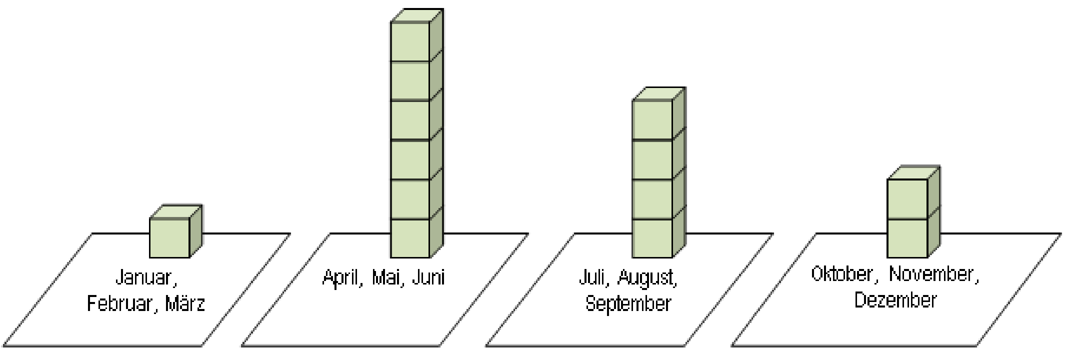
Wie hast du das herausgefunden?
Findest du noch eine andere Möglichkeit, um die Fragen zu beantworten?

Bild 40: „Teller“, pixabay.com, CC0

Daten & Zufall
Grundschule

Idee der Daten
Auswerten von Daten

Vergleichen von Würfeltürmen nach Vorgaben

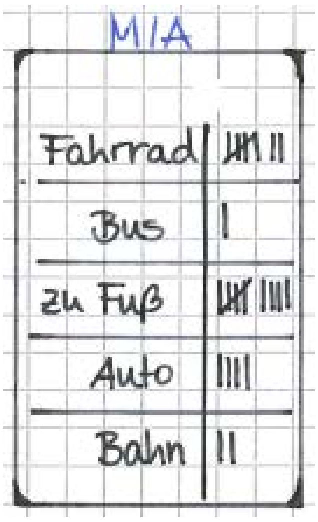


- In welchen Monaten haben die meisten Kinder Geburtstag?
- In welchen Monaten haben die wenigsten Kinder Geburtstag?

Bild 41: „Würfeltürme“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Ergänzen eines Lückentextes mithilfe einer Strichliste | 37

Mia hat aufgeschrieben, wie die Kinder in ihrer Klasse morgens zur Schule kommen.



Vervollständige den Lückentext. Lies aus der Strichliste ab.

- Mit dem Auto kommen _____ Kinder zur Schule.
- Mit dem Fahrrad fahren _____ Kinder.
- Mit dem Bus oder der Bahn fahren _____ Kinder.
- Die meisten Kinder kommen ________________ zur Schule.
- Wie viele Kinder sind in der Klasse? _____

Bild 42: „Strichliste“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Überprüfen und Zuordnen von Strichlisten | 38

Pia beschreibt die Strichliste einer 4. Klasse.

- Die meisten Kinder haben im Juli, August oder September Geburtstag.
- Kein Kind hat im Januar, Februar oder März Geburtstag.
- Im April, Mai oder Juni haben genauso viele Kinder Geburtstag wie im Oktober, November oder Dezember.

Welche Strichliste passt zu Pias Beschreibung? Begründe deine Entscheidung.

Klasse 4a	
Januar, Februar, März	
April, Mai, Juni	IIII I
Juli, August, September	~~IIII~~ ~~IIII~~
Oktober, November, Dezember	~~IIII~~ II

Klasse 4b	
Januar, Februar, März	II
April, Mai, Juni	IIII ~~I~~
Juli, August, September	IIII
Oktober, November, Dezember	IIII ~~I~~

Klasse 4c	
Januar, Februar, März	
April, Mai, Juni	IIII~~II~~
Juli, August, September	~~IIII~~ IIII
Oktober, November, Dezember	IIII~~II~~

Bild 43: „Mädchen“, pixabay.com, CC0

Auswählen von passenden Fragestellungen zu einem Diagramm | 39

Elias hat sich Fragen zum Diagramm überlegt.

Welche Fragen kannst du beantworten? Entscheide.

- Worum geht es in dem Diagramm?
- Was bedeuten die Zahlen von 0 bis 400?
- Warum wurden die Säulen grün eingefärbt?
- In welchem Monat waren die meisten Besucher im Museum?
- An welchem Wochentag waren die wenigsten Besucher da?

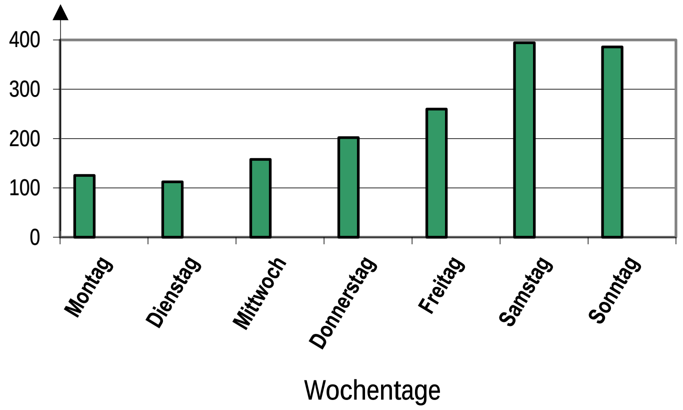


Bild 44: „Junge“, pixabay.com, CC0

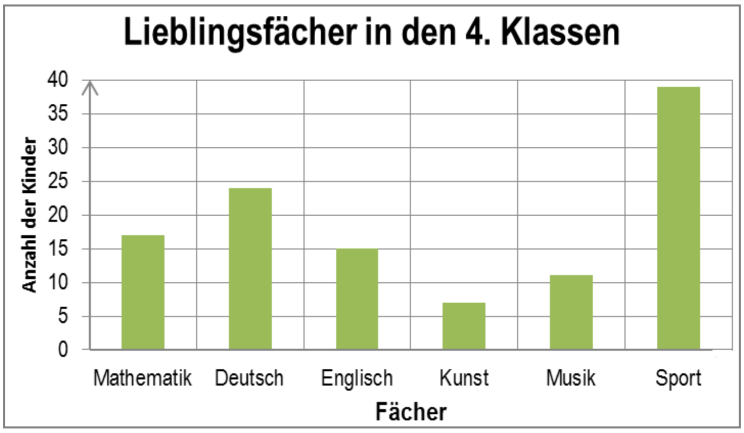
Daten & Zufall
Grundschule

Idee der Daten
Auswerten von Daten

Finden von Möglichkeiten zum genauen Ablesen von Anzahlen | 40

Anna fragt Erik, wie viele Kinder Sport als Lieblingsfach haben.

Er sagt: „Das kann ich nicht genau ablesen. Es sind ungefähr 40 Kinder.“



Wie kann Erik die Anzahl genau ablesen? Finde einen möglichen Weg.

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall Grundschule	Idee der Daten Auswerten von Daten
Stellen von passenden Fragen zum Diagramm	41

Arbeite mit einem Partner zusammen.
Jeder überlegt sich vier Fragen zum Diagramm.
Stellt euch gegenseitig die Fragen und beantwortet sie.

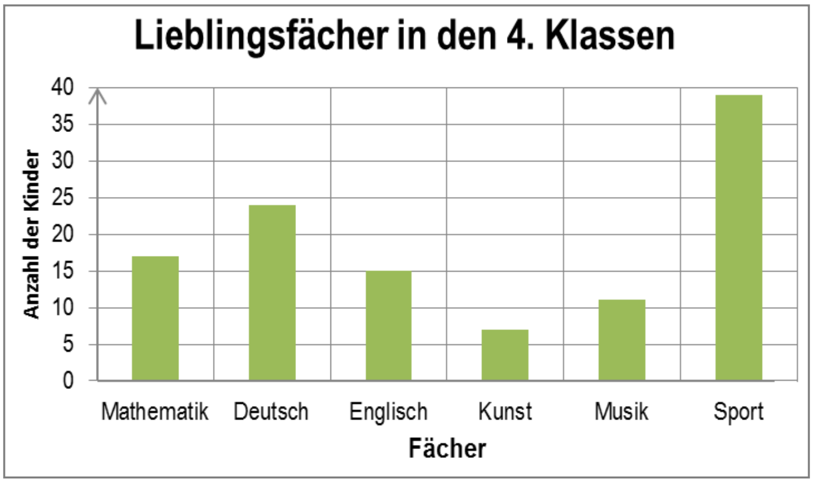
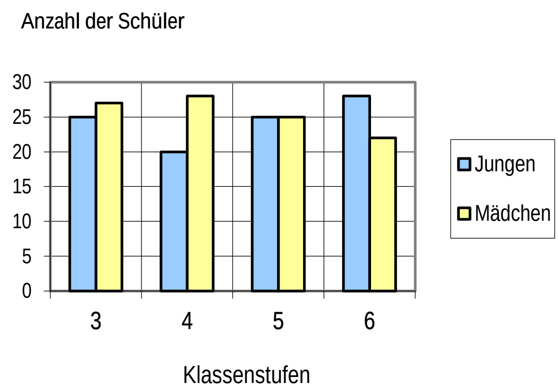


Bild 45: „Kinder“, pixabay.com, CC0

Daten & Zufall Grundschule	Idee der Daten Auswerten von Daten
Auswerten eines Diagramms nach vorgegebenen Fragestellungen	42

Beantworte die Fragen zum **Säulendiagramm.**



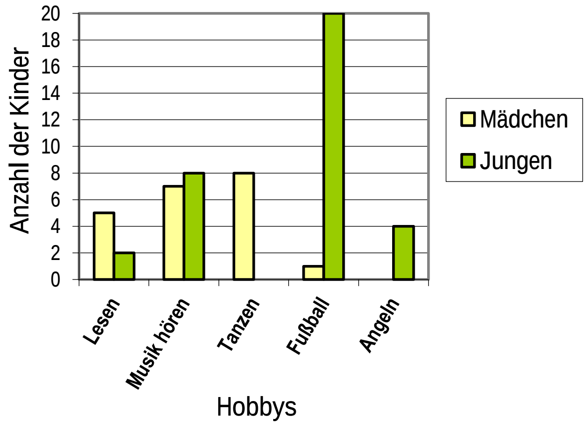
- Wofür stehen die Zahlen von 3 bis 6?
- Warum gibt es blaue und gelbe Säulen?
- Wie viele Jungen sind in den 3. Klassen?
- In welcher Klassenstufe sind mehr Jungen als Mädchen?
- Wie viele Mädchen sind in jeder Klassenstufe?
- Wie viele Kinder sind insgesamt in den 5. Klassen?
- In welchen Klassenstufen sind mehr Kinder? In den 5. oder 6. Klassen?

Beschreiben von Veränderungen am Diagramm

Beschreibe.

Wie verändert sich das Diagramm, …

- wenn es für jedes Hobby nur eine Säule gibt?
- wenn 4 Jungen vom Fußball zum Tanzen gehen?
- wenn ein weiteres Hobby bei den Kindern hinzukommt?



Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall
Grundschule

Idee der Daten
Auswerten von Daten

Überprüfen von Aussagen zu einem Diagramm

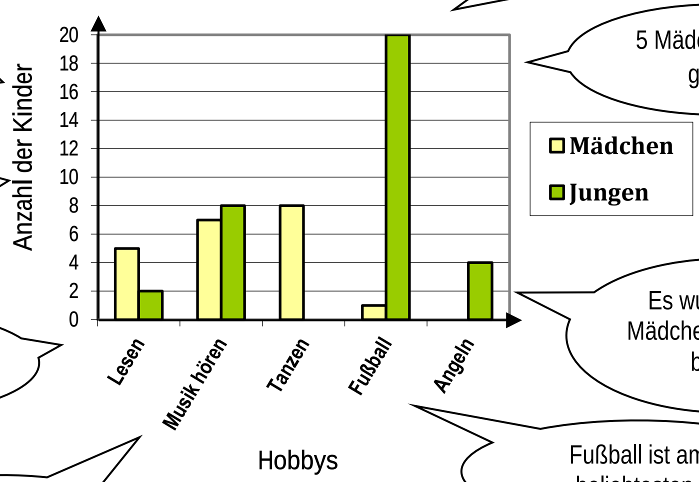
Lies die Aussagen der Kinder.
Welche Aussagen stimmen? Kreuze an.

21 Kinder mögen Fußball. ☐

Die meisten Mädchen mögen Tanzen. ☐

5 Mädchen lesen gerne. ☐

Es wurden mehr als 50 Kinder befragt. ☐



Es wurden mehr Mädchen als Jungen befragt. ☐

Kein Mädchen spielt Fußball. ☐

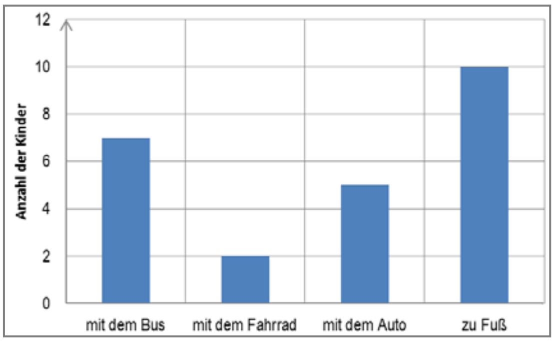
Fußball ist am beliebtesten. ☐

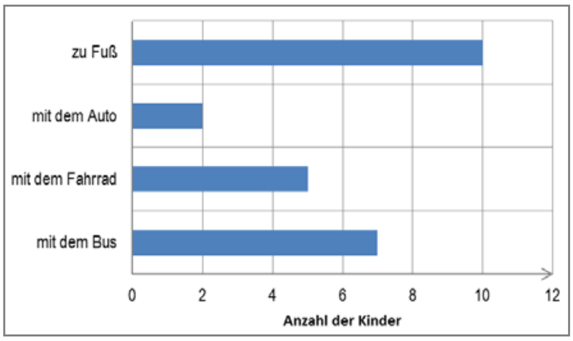
15 Kinder hören gerne Musik. ☐

Daten & Zufall Grundschule	Idee der Daten Auswerten von Daten
Zuordnen von Diagrammen zu Tabellen und Korrigieren von Fehlern in Diagrammen	45

Schulweg	mit dem Bus	mit dem Fahrrad	mit dem Auto	zu Fuß
Anzahl der Kinder	7	5	2	10

- Welches **Diagramm** passt zur Tabelle? Begründe deine Entscheidung.

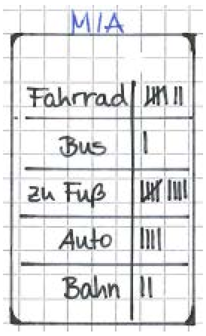


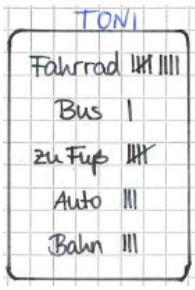


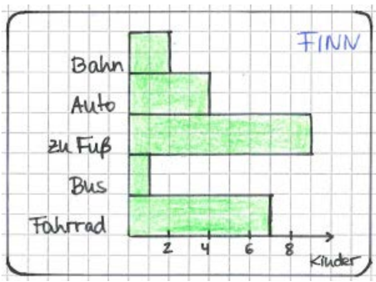
- Wie muss das Diagramm verändert werden, damit es stimmt? Beschreibe.

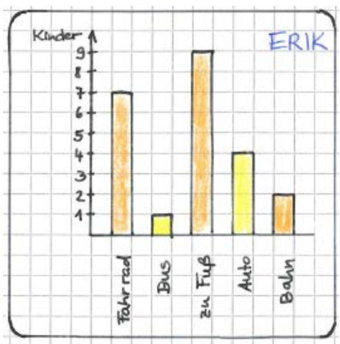
Daten & Zufall Grundschule	Idee der Daten Auswerten von Daten
Zuordnen verschiedener Darstellungsformen zu gleichen Datensätzen	46

Vergleiche die Darstellungen der Kinder. In welchen Darstellungen sind die Daten gleich?









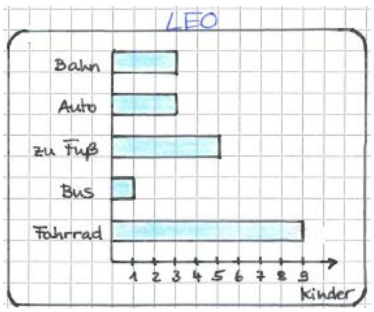


Bild 46: „Strichliste Mia", LISUM, CC-BY-SA 4.0
Bild 47: „Strichliste Toni", LISUM, CC-BY-SA 4.0
Bild 48: „Balkendiagramm Finn", LISUM, CC-BY-SA 4.0
Bild 49: „Säulendiagramm Erik", LISUM, CC-BY-SA 4.0
Bild 50: „Balkendiagramm Leo", LISUM, CC-BY-SA 4.0
Bild 51: „Strichliste Tim", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall
Grundschule

Idee der Daten
Auswerten von Daten

Ordnen von Informationen und Beantworten von Fragen

47

Material: *Karten mit verschiedenen Altersangaben*

Ordne die Karten nach dem Alter.

Beantworte die Fragen.

- Wie alt sind die jüngsten Kinder?
- Wie alt sind die ältesten Kinder?
- Welches Alter kommt am seltensten vor?
  Woran erkennst du das?
- Welches Alter kommt am häufigsten vor?
  Woran erkennst du das?

Wie alt bist du?

7 Jahre
6 Jahre
7 Jahre
9 Jahre
8 Jahre
8 Jahre
8 Jahre
6 Jahre
9 Jahre
9 Jahre
6 Jahre
8 Jahre

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall
Grundschule

Idee der Daten
Auswerten von Daten

Ordnen von Lieblingszahlen und Bestimmen von Kennwerten

48

10 Kinder sollten ihre Lieblingszahl von 0 bis 10 nennen.

Ordne alle Lieblingszahlen der Größe nach. Erstelle eine geordnete Liste.

Beantworte die Fragen mithilfe deiner geordneten Liste.

- Welche ist die kleinste Lieblingszahl?
- Welche ist die größte Lieblingszahl?
- Wie groß ist der Unterschied zwischen der größten und der kleinsten Lieblingszahl?
- Welche Lieblingszahl kommt am seltensten vor?
- Welche Lieblingszahl kommt am häufigsten vor?

Kinder	Lieblingszahl
Ines	7
Silke	2
Lara	10
Bennet	1
Sophie	10
Karl	5
Lennart	5
Lina	7
Sarah	1
Willi	7

Daten & Zufall
Grundschule

Idee der Daten
Auswerten von Daten

Erklären der Begriffe „Minimum“ und „Maximum“ 49

In einer Klasse wurden die Schuhgrößen der Kinder aufgeschrieben.

Schuhgrößen	35	37	35	34	36	36	38	34	36	36	34	36	37	33	35	36	35	34	36

Schau dir die Schuhgrößen der Kinder an.
Finde heraus, was Pia mit **Minimum** meint. Warum bezeichnet Erik die Schuhgröße 38 als **Maximum**?

Bild 52: „Mädchen“, pixabay.com, CC0 Bild 53: „Junge“, pixabay.com, CC0

Daten & Zufall
Grundschule

Idee der Daten
Auswerten von Daten

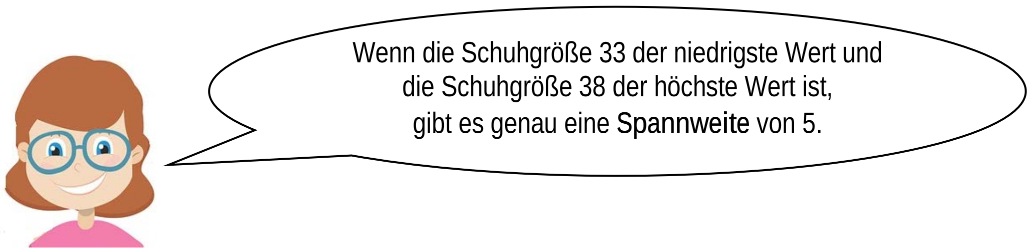
Finden und Überprüfen einer Erklärung zur „Spannweite“ 50

Material: *Kärtchen mit den vorgegebenen Schuhgrößen*

In einer Klasse wurden die Schuhgrößen der Kinder aufgeschrieben.

Schuhgrößen	35	37	35	33	36	36	38	34	36	36	34	36	33	35	36	35	34	36

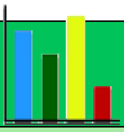
Tim sagt:



- Was meint Tim mit **Spannweite**? Finde eine passende Erklärung.
- Ordne die Kärtchen mit den Schuhgrößen von klein nach groß. Markiere das Minimum und das Maximum. Passt deine Erklärung zur **Spannweite** noch immer?

Bild 54: „Junge“, pixabay.com, CC0

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0



Ordnen von Informationen und Bestimmen von Kennwerten

Die Kinder der Klasse 3a haben aufgeschrieben, wie lange sie für ihren Schulweg brauchen.

15 Minuten, 5 Minuten, 20 Minuten, 14 Minuten, 20 Minuten, 10 Minuten, 14 Minuten, 15 Minuten, 25 Minuten, 10 Minuten, 15 Minuten, 7 Minuten, 10 Minuten, 25 Minuten, 5 Minuten, 10 Minuten

- Ordne alle Daten. Beginne mit der kleinsten Zeitdauer.

- Beantworte die Fragen mithilfe deiner geordneten Daten.

1. Welche Zeitdauer wurde am häufigsten genannt?
2. Welche Zeitdauer wurde am seltensten genannt?
3. Was ist das Minimum?
4. Was ist das Maximum?
5. Wie groß ist die Spannweite (der Unterschied zwischen Minimum und Maximum)?

Anna sagt: „Die kleinste Zeitdauer (Minimum) ist immer die seltenste Zeitdauer.“ Was sagst du dazu?

Bild 55: „Sanduhr“, pixabay.com, CC0

Förderaufgaben
„Idee der Daten“
Sekundarstufe I

Förderschritte zu den Diagnoseaufgaben „Daten“ (E,F,G): 1a,b; 2; 3a; 3b

Übersicht über die Förderaufgaben:

1. Einschätzen der Eignung von Fragestellungen
2. Entwickeln geeigneter Fragen
3. Sinnvolles Strukturieren von Datenerhebungen
4. Einschätzen der Eignung von Stichproben
5. Finden geeigneter Fragestellungen
6. Planen von statistischen Erhebungen
7. Übersichtliches Notieren von Daten
8. Darstellen und Vergleichen von Daten in Diagrammen
9. Ermitteln relativer Häufigkeiten
10. Nutzen relativer Häufigkeiten, um Daten darzustellen und zu vergleichen
11. Ermitteln relativer Häufigkeiten
12. Nutzen relativer Häufigkeiten, um Daten darzustellen (im Streifendiagramm)
13. Darstellen von Daten im Kreisdiagramm
14. Beschriften von Kreisdiagrammen (Zusammenhang zwischen Häufigkeit und Sektorgröße erkennen)
15. Vergleichen von Kreisdiagrammen
16. Zuordnen von relativen Häufigkeiten und Kreisanteilen
17. Berechnen der Winkel im Kreisdiagramm aus relativen Häufigkeiten
18. Zeichnen eines Kreisdiagramms (über Bruchteile)
19. Zeichnen eines Kreisdiagramms (über Prozentsätze)
20. Zeichnen eines Kreisdiagramms
21. Verstehen von Darstellungen (Diagramme vergleichen)
22. Verstehen von Darstellungen (Kreisdiagramme vergleichen)
23. Unterscheiden von qualitativen und quantitativen Daten
24. Wählen der Diagrammarten passend zur Art der Daten
25. Erkennen von Manipulationen
26. Erkennen von Manipulationen
27. Verstehen des arithmetischen Mittels als Ersatzwert
28. Berechnen des arithmetischen Mittels
29. Verstehen des arithmetischen Mittels als Schwerpunkt
30. Verstehen der Eigenschaften des arithmetischen Mittels
31. Reflektieren von Veränderungen des arithmetischen Mittels
32. Reflektieren von Veränderungen des arithmetischen Mittels
33. Bestimmen und Verstehen des Zentralwerts
34. Bestimmbarkeit eines Zentralwerts
35. Markieren von Kennwerten in einer Datenreihe
36. Erklären eines Boxplot
37. Anfertigen eines Boxplot
38. Bestimmen eines Zentralwertes aus einer Tabelle (mit Umweg über Urliste)
39. Bestimmen des Zentralwertes aus einer Tabelle
40. Begründen der Klassenbildung

Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Daten
Stellen von Fragen zu Merkmalen

Einschätzen der Eignung von Fragestellungen | 1

Für eine Umfrage zum Thema „Medien“ hat sich eine Schülergruppe folgende Fragen ausgedacht:

1. Verbringst du viel Zeit mit Computerspielen?
2. Wie viel Zeit (in Stunden) verbringst du täglich in etwa mit Computerspielen?

Diese Fragen sollen von allen Schülerinnen und Schülern der Klassenstufe 7 beantwortet werden. Am Ende werden die Antworten ausgewertet und die Ergebnisse in Diagrammen dargestellt.

● Entscheide: Welche dieser Fragen lässt sich voraussichtlich besser auswerten? Begründe.

Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Daten
Stellen von Fragen zu Merkmalen

Entwickeln geeigneter Fragen | 2

Die folgenden Fragen könnten in statistischen Umfragen verwendet werden.

● Entscheide, welche der Fragen sich gut auswerten lassen und welche eher schlecht.

● Begründe.

a) Was ist deine Lieblings-Musik-Gruppe?

b) Wie viele Stunden treibst du pro Woche Sport?

c) Wie viel Zeit benötigst du morgens normalerweise für den Schulweg?

☐ bis 30 min ☐ 30 – 45 min ☐ 45 – 60 min ☐ mehr als eine Stunde

d) Warum findest du Smartphones gut?

Daten & Zufall Sekundarstufe I	Idee der Daten Sammeln von Daten
Sinnvolles Strukturieren von Datenerhebungen	3

In einer Schulklasse wurde folgende Frage gestellt: „Wie viele Kinder seid ihr zu Hause?“

Hier sind die Antworten: 2, 1, 1, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 2,

● Schreibe die Antworten übersichtlicher auf.

An einer Hauptstraße sollen zwei Schüler die Fahrzeugarten notieren, die innerhalb von 30 Minuten vorbeifahren.

● Überlege, wie ein vorbereitetes Blatt dafür aussehen könnte.

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall Sekundarstufe I	Idee der Daten Sammeln von Daten
Einschätzen der Eignung von Stichproben	4

In einer Schule soll eine Umfrage zum Thema „Medien“ gemacht werden.

Vier Schüler gehen mit einem Fragebogen los.

- Schüler 1 befragt alle Mitschüler in seiner Computer-AG.
- Schüler 2 befragt drei Mitschüler, die er zufällig auf dem Flur trifft.
- Schülerin 3 befragt alle Mädchen der Schule.
- Schülerin 4 befragt morgens 30 Minuten lang alle Schülerinnen und Schüler, die schon auf dem Schulhof sind.

● Nimm Stellung zu der Auswahl und begründe.

● Wen würdest du befragen?

Daten & Zufall Sekundarstufe I	Idee der Daten Stellen von Fragen zu Merkmalen

Finden geeigneter Fragestellungen	5

Eine Klasse soll eine Statistik zum Thema „Schulweg“ anfertigen.

● Welche der folgenden möglichen Fragen sind sinnvoll, welche eher nicht? Begründe.

- Welches Verkehrsmittel nutzt du für den Schulweg?
- Welche Farbe hat dein Fahrrad?
- Was frühstückst du morgens, bevor du zur Schule gehst?
- Wie viel Zeit benötigst du morgens normalerweise für den Schulweg?
- Auf wie vielen verschiedenen Wegen kannst du zur Schule gehen?
- Wann stehst du morgens auf?
- Wie oft musst du auf deinem Schulweg umsteigen?

Daten & Zufall Sekundarstufe I	Idee der Daten Stellen von Fragen zu Merkmalen

Planen von statistischen Erhebungen	6

Ihr sollt eine Umfrage zum Thema „sportliche Aktivitäten unserer Schüler“ machen.

● Wonach könnte man fragen?

● Formuliere geeignete Fragen dazu.

● Worauf muss man bei der Auswahl der zu befragenden Schüler achten?

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Übersichtliches Notieren von Daten

Ein Züchter registriert über mehrere Jahre die Anzahl der Welpen jeweils eines Wurfes und schreibt sie in ein Buch. Dabei entstand diese ***Urliste***.

Welpen pro Wurf: 3; 5; 8; 2; 5; 4; 5; 6; 7; 3;
4; 8; 4; 5; 6; 5; 3; 4; 5; 6

- Stelle diese Daten in einer Tabelle dar.

Bild 1: „Hundewelpen“, pixabay.com, CC-0

Darstellen und Vergleichen von Daten in Diagrammen

Die Ergebnisse einer gemeinsamen Klassenarbeit zweier Klassen sollen verglichen werden.

Klasse a:

Note	1	2	3	4	5	6
Anzahl	5	9	10	4	2	0

Klasse b:

1	2	3	4	5	6
3	6	12	6	3	0

- Stelle die Ergebnisse beider Klassen in einem gemeinsamen Säulendiagramm dar.
  Nutze verschiedene Farben.

Ermitteln relativer Häufigkeiten — 9

In der Klasse 8A sind 20 Schülerinnen und Schüler. Davon besuchen 10 eine Sport-AG.

In der Klasse 8B sind 25 Schülerinnen und Schüler. Davon besuchen 11 eine Sport-AG.

Beate sagt: „Unsere 8B ist sportlicher, weil bei uns 11 Schüler Sport machen und in der 8A nur 10.“

Anton sagt: „Die 8A ist sportlicher, weil $\frac{10}{20}$ mehr ist als $\frac{11}{25}$.“

● Was meinst du zu diesen Aussagen?

Nutzen relativer Häufigkeiten, um Daten darzustellen und zu vergleichen — 10

Die Ergebnisse einer gemeinsamen Klassenarbeit zweier Klassen sollen verglichen werden.

Klasse a:

Note	1	2	3	4	5	6
Anzahl, H	2	4	5	3	1	0
h	0,133	0,267	0,333	0,200	0,067	0,00
h in %	13,3	26,7	33,3	20,0	6,7	0

Klasse b:

1	2	3	4	5	6
3	6	10	7	3	1
0,100	0,200	0,333	0,233	0,100	0,033
10,0	20,0	33,3	23,3	10,0	3,3

● Stelle die Ergebnisse beider Klassen in einem gemeinsamen Säulendiagramm dar.

Verwende die relative Häufigkeit h.

Nutze verschiedene Farben.

Ermitteln relativer Häufigkeiten

11

Bei einer Umfrage zum Thema „Schulweg“ wurde gefragt, wie die Kinder zur Schule gelangen.

Es wurden 240 Kinder befragt.

Antworten	zu Fuß	mit Fahrrad	mit Auto	öffentliche Verkehrsmittel
Anzahl (H)	86	76	34	44
h				
h in %				

- Berechne zu jeder Antwort die relative Häufigkeit h.
- Gib die relative Häufigkeit auch in Prozent an.

Nutzen relativer Häufigkeiten, um Daten darzustellen (im Streifendiagramm)

12

Die Ergebnisse einer Umfrage zum Thema „Schulweg“ sind in der folgenden Tabelle dargestellt.

Antworten	zu Fuß	mit Fahrrad	mit Auto	öffentliche Verkehrsmittel
Anzahl (H)	86	76	34	44
h	0,358	0,317	0,142	0,183
h in %	35,8	31,7	14,2	18,3

- Stelle das Ergebnis der Umfrage in einem Streifendiagramm dar.

  - Zeichne dazu einen 10 cm langen Streifen (ca. 1 – 2 cm hoch).

  - Trage die Anteile der einzelnen Antworten ein.

  - Nutze verschiedene Farben.

Darstellen von Daten im Kreisdiagramm

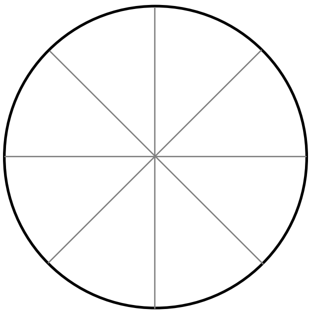
13

Die 8 Kinder einer Sportgruppe werden befragt, was sie in der Vorweihnachtszeit gemeinsam machen möchten.

5 Kinder wollen auf den Weihnachtsmarkt, 3 Kinder würden lieber zur Bowlingbahn gehen.

Dieses Ergebnis sollst du in einem Kreisdiagramm darstellen.

- Färbe die Abschnitte für die Kinder, die zum Weihnachtsmarkt wollen, in einer Farbe und die Abschnitte für die, die zur Bowlingbahn wollen, in einer anderen Farbe.
- Woran erkennt man an dem Kreisdiagramm, welche Anzahl größer ist?

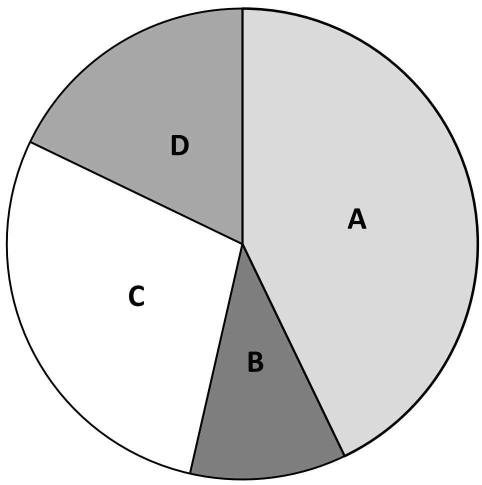


Beschriften von Kreisdiagrammen (Zusammenhang zwischen Häufigkeit und Sektorgröße erkennen)

14

Eine Umfrage zum Thema „Dein Lieblingssport“ ergab folgendes Ergebnis:

Sportart	Anzahl
Reiten	3
Handball	5
Tischtennis	8
Judo	12



Das passende Diagramm steht neben der Tabelle.

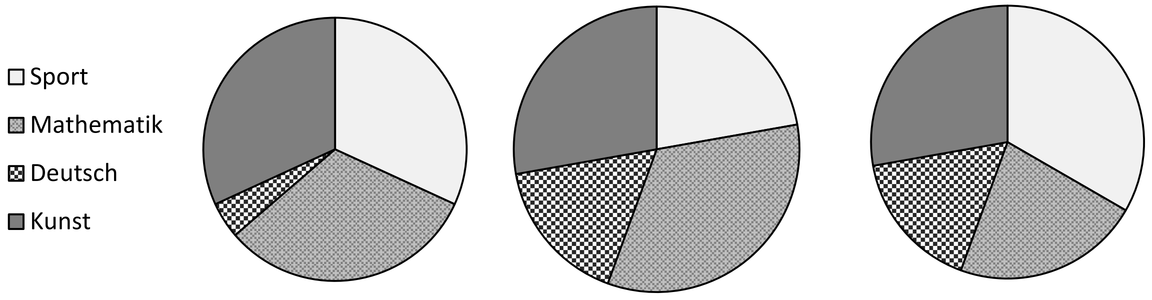
- Ordne jedem Abschnitt des Diagramms die entsprechende Sportart zu.

Vergleichen von Kreisdiagrammen | 15

Eine Umfrage zum Lieblingsfach ergab folgendes Ergebnis:

Lieblingsfach	Sport	Mathematik	Deutsch	Kunst
Anzahl	12	8	6	10

- Welches der drei Kreisdiagramme passt dazu?



Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Daten
Darstellen von Daten

Zuordnen von relativen Häufigkeiten und Kreisanteilen | 16

Ein Kreisdiagramm soll angefertigt werden.

- Überlege, welchen Bruchteil des Kreisdiagramms du einfärben müsstest, um eine relative Häufigkeit darzustellen.

relative Häufigkeit	**Kreisanteil**
100 %	1 Kreis
50 %	$\frac{1}{2}$ Kreis
25 %	________
75 %	________
20 %	________
10 %	________

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Berechnen der Winkel im Kreisdiagramm aus relativen Häufigkeiten | 17

Überlege, wie viel Grad ein Abschnitt (Sektor) im Kreisdiagramm haben müsste, um eine relative Häufigkeit darzustellen.

relative Häufigkeit	Kreisanteil	Kreisabschnitt in Grad
100 %	1	360°
50 %	$\frac{1}{2}$	180°
25 %	$\frac{1}{4}$	
75 %	$\frac{3}{4}$	
20 %	$\frac{1}{5}$	
10 %	$\frac{1}{10}$	
1 %	$\frac{1}{100}$	
7 %	$\frac{7}{100}$	

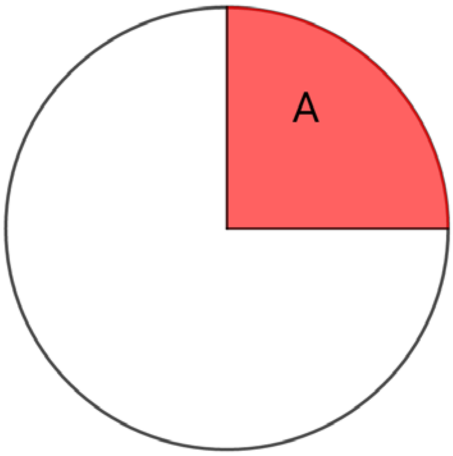
Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Zeichnen eines Kreisdiagramms (über Bruchteile) | 18

Insgesamt 240 Personen arbeiten in den Abteilungen A, B, C, D, E. Das soll in einem Kreisdiagramm veranschaulicht werden.

- Ergänze die Tabelle und vervollständige das Kreisdiagramm.

	Anzahl	Anteil als Bruch	Anteil am Kreis
A	60	$\frac{60}{240} = \frac{1}{4}$	Viertelkreis
B	30	$\frac{\quad}{\quad} = \frac{1}{8}$	Achtelkreis
C			Halbkreis
D	15	$\frac{1}{16}$	
E	15		



Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Daten
Darstellen von Daten

Zeichnen eines Kreisdiagramms (über Prozentsätze) | 19

mögliches Material: *Kreis mit Gradeinteilung*

Denis soll ein Kreisdiagramm mit vier Farben gestalten. Die Anteile der Farben sind in der Tabelle gegeben. Er überlegt, wie groß die Winkel für die farbigen Kreisausschnitte sein müssen.

„Zu einem vollen Kreis gehört der Winkel 360°. Also gehören zu 10 % genau 36° und zu den anderen Anteilen …“

● Ergänze die Tabelle. Zeichne dann das Kreisdiagramm.

	Rot	Gelb	Blau	Grün	Gesamt
Anteil	10 %	50 %	25 %	15 %	
Winkel	36°				360°

Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Daten
Darstellen von Daten

Zeichnen eines Kreisdiagramms | 20

200 Kinder einer Schule wurden gefragt: „Was ist dein Lieblingshaustier?“

Folgendes Ergebnis kam heraus:

Tier	Hund	Katze	Vogel	Pferd	andere
Anzahl	80	60	32	18	10
relative Häufigkeit in %					
Winkel im Kreisdiagramm					

● Berechne zu jedem Tier die relative Häufigkeit.

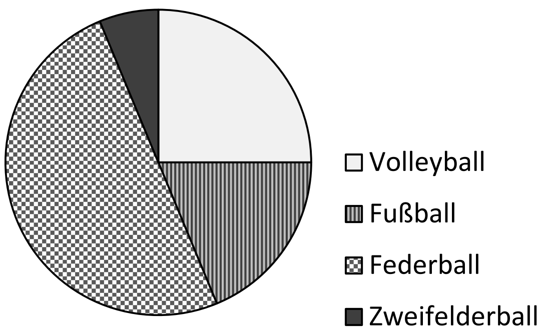
● Berechne dazu die passende Winkelgröße im Kreisdiagramm.

● Zeichne das Kreisdiagramm.

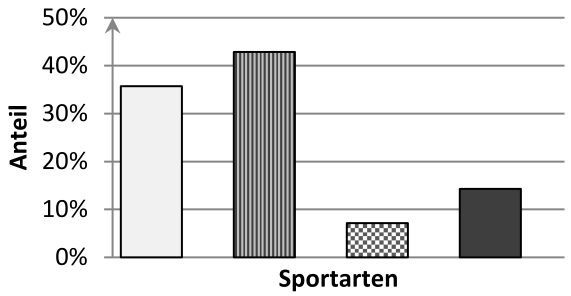
Verstehen von Darstellungen (Diagramme vergleichen) 21

Für die letzte Sport-Stunde vor den Ferien wurden in einer Liste Wünsche abgefragt.

Sportart	Mädchen	Jungen
Volleyball	8	10
Fußball	6	12
Federball	16	2
Zweifelderball	2	4



- Entscheide, welches Diagramm zu den Jungen und welches zu den Mädchen passt.
- Begründe deine Entscheidung.

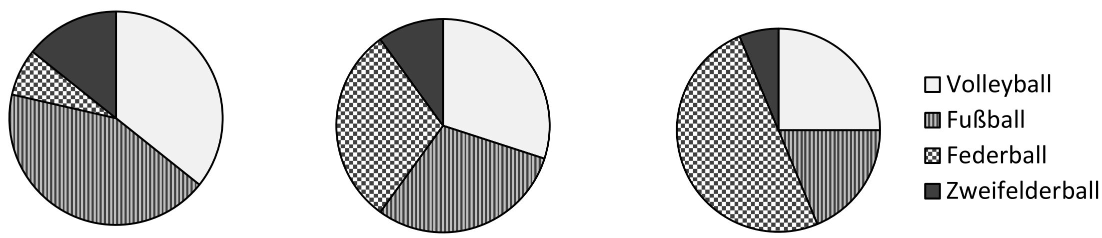


Verstehen von Darstellungen (Kreisdiagramme vergleichen) 22

Für die letzte Sportstunde vor den Ferien wurden in einer Liste gewünschte Spiele eingetragen.

Sportart	Mädchen	Jungen	gesamt
Volleyball	8	10	
Fußball	6	12	
Federball	16	2	
Zweifelderball	2	4	

- Welches der drei Diagramme veranschaulicht, wie die Wahl **insgesamt** ausgegangen ist?
- Ergänze erst die letzte Spalte in der Tabelle. Begründe deine Entscheidung für ein Diagramm.



Unterscheiden von qualitativen und quantitativen Daten

Von einer Judo-Sportgruppe wurden Daten erfasst und in vier Urlisten dargestellt:

Namen	**Anja**	**Ines**	**Tabea**	**Celina**	**Sophie**
Daten					
Anreise zum Training mit	Fahrrad	zu Fuß	Bus	Fahrrad	Bus
Masse in kg	44	39	45	38	38
Größe in m	1,67	1,66	1,63	1,58	1,59
Lieblingsfarbe	rot	blau	pink	rot	rot

- Aus welchen Urlisten lässt sich jeweils eine geordnete Urliste herstellen und aus welchen nicht?
- Begründe.

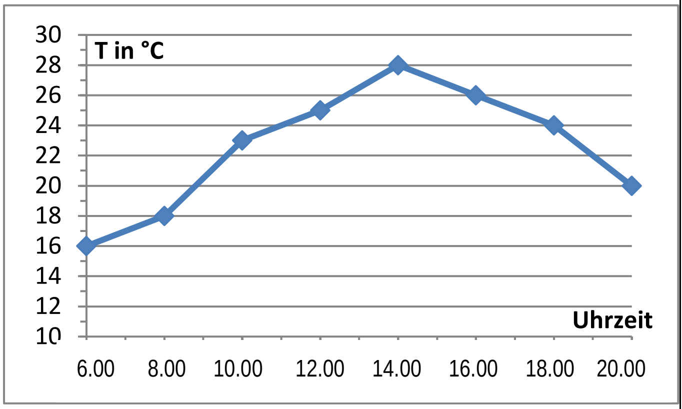
Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Wählen der Diagrammarten passend zur Art der Daten

An einem Sommertag wurde die Temperatur (T) in einer Stadt gemessen.

Uhrzeit	6.00	8.00	10.00	12.00
T in °C	16	18	23	25

Uhrzeit	14.00	16.00	18.00	20.00
T in °C	28	26	24	20



Die Daten sind im Diagramm dargestellt.

Betrachte die Linien im Bereich von 10.00 – 12.00 Uhr und 14.00 – 16.00 Uhr.

- Welche Informationen lassen sich aus den Linien entnehmen?

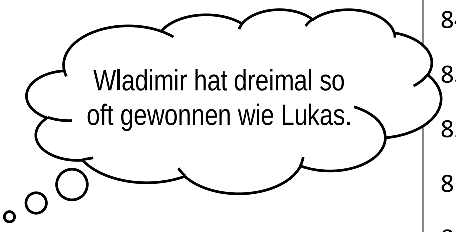
An einem Sommertag wurde in 8 Städten die Höchsttemperatur (T) gemessen.

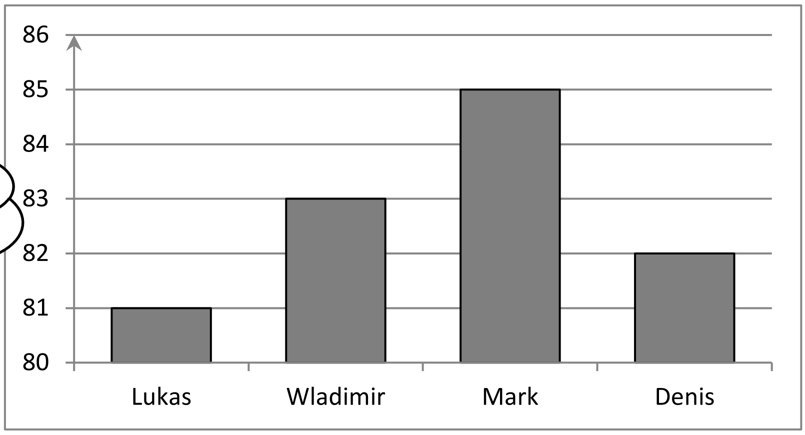
Stadt	Belzig	Berlin	Cottbus	Kyritz	Potsdam	Pritzwalk	Werder	Ziesar
T in °C	23	25	19	18	24	17	22	20

- Stelle die Daten in einem Säulendiagramm dar.
- Erkläre, warum ein Liniendiagramm für diese Daten nicht sinnvoll ist.

Lukas, Wladimir, Mark und Denis sind im Judoverein. Sie haben die Anzahl ihrer gewonnenen Kämpfe gezählt.

Mark hat die Anzahlen in einem Diagramm dargestellt:



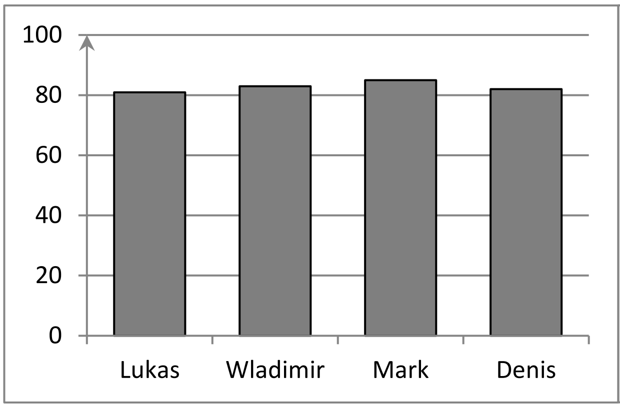


- Stimmt die Aussage? Begründe

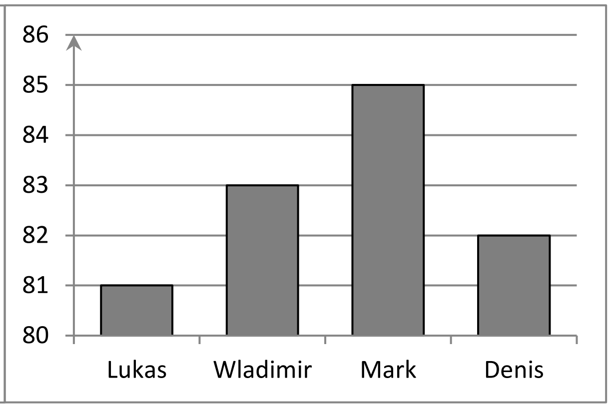
Sportler	Lukas	Wladimir	Mark	Denis
gewonnene Kämpfe				

Lukas, Wladimir, Mark und Denis sind im Judoverein. Sie haben die Anzahl ihrer gewonnenen Kämpfe gezählt.

Denis zeichnete dieses Diagramm.



Mark zeichnete dieses Diagramm.



- Vergleiche die beiden Darstellungen.

Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Daten
Auswerten von Daten

Verstehen des arithmetischen Mittels als Ersatzwert — 27

Beim Dreisprung („Dreierhopp“) vollführt ein Springer 3 Sprünge direkt nacheinander.

Lars nimmt Anlauf und springt nacheinander: 2,40 m; 1,50 m; 1,80 m.

Tim verzichtet auf den Anlauf und vollführt 3 gleichlange Sprünge.

- Wie weit muss jeder von Tims Sprüngen sein, damit er am Ende genauso weit kommt wie Lars?

Bild 1: „Pfeilbögen“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Daten
Auswerten von Daten

Berechnen des arithmetischen Mittels — 28

In der indischen Stadt *Bhubaneswar* wurde ein Jahr lang die Regenmenge in Liter pro Quadratmeter gemessen.

Jahreszeit	Frühling	Sommer	Herbst	Winter
Liter pro m²	130	970	450	50

Im brasilianischen Regenwald, in der Region *Santa Catarina*, regnet es täglich, fast immer gleich viel.
In jeder Jahreszeit fällt hier immer die gleiche Regenmenge.

Insgesamt fällt hier im Verlauf des Jahres genauso viel Regen wie in der indischen Stadt *Bhubaneswar*.

- Vervollständige die Tabelle für den brasilianischen Regenwald.

Jahreszeit	Frühling	Sommer	Herbst	Winter
Liter pro m²				

- Zeichne für beide Regionen ein gemeinsames Säulendiagramm, das die Regenmengen zu den Jahreszeiten darstellt. Zeichne die Säulen der Städte nebeneinander in verschiedenen Farben.

Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Daten
Auswerten von Daten

Verstehen des arithmetischen Mittels als Schwerpunkt | 29

Wie schwer ist ein Apfel ungefähr?

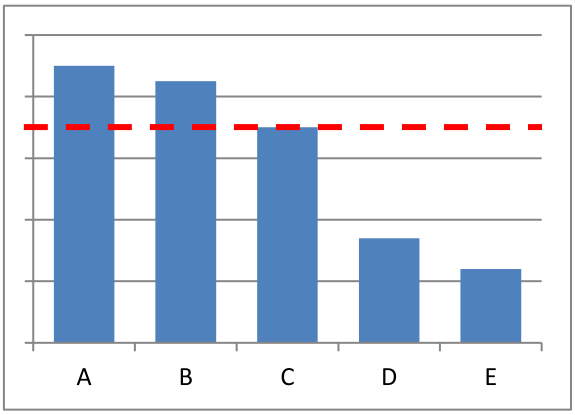
Miriam wiegt 5 verschiedene Äpfel.

1. Apfel	2. Apfel	3. Apfel	4. Apfel	5. Apfel
60 g	100 g	70 g	80 g	90 g

- Stelle die Massen der 5 Äpfel in einem Säulendiagramm dar.
- Berechne den Durchschnitt. Trage diesen Wert als waagerechte Linie mit ins Säulendiagramm ein.

Jemand hat in einem Säulendiagramm eine waagerechte Linie eingetragen, die den Durchschnitt darstellen soll.

- Erkläre, warum diese Linie nicht richtig sein kann.
- Zeichne eine waagerechte Linie ein, die den ungefähren Durchschnitt richtig zeigt.



Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Daten
Auswerten von Daten

Verstehen der Eigenschaften des arithmetischen Mittels | 30

Gib fünf verschiedene Zahlen so an, dass der Mittelwert (Durchschnitt) 7 ist.

Gib auch ein Beispiel an, bei dem keine der Zahlen gleich 7 ist.

Ergänze eines der Beispiele durch eine 6. Zahl, sodass dann der Mittelwert gleich 8 ist.

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Daten
Auswerten von Daten

Reflektieren von Veränderungen des arithmetischen Mittels — 31

Gegeben sind fünf Werte: 4; 6; 7; 11; 12.

- Wie kann man die Werte verändern, sodass der Mittelwert um 1 wächst?
- Gib eine weitere Möglichkeit an.
- Gib auch eine Möglichkeit an, bei der einer der fünf Werte kleiner wird.

Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Daten
Auswerten von Daten

Reflektieren von Veränderungen des arithmetischen Mittels — 32

Gegeben sind sechs Werte, die der Größe nach geordnet sind: 2,1 ; 2,9 ; 3,1 ; 7,1 ; 8,0 ; 9,8 .

Der Durchschnitt der Werte ist 5,5.

- Wie verändert sich der Durchschnitt, wenn zu den sechs Werten rechts noch einer hinzukommt?
- Wie verändert sich der Durchschnitt, wenn von den sechs Werten rechts einer weggenommen wird?
- Wie verändert sich der Durchschnitt, wenn bei den sechs Werten jeder um 1 erhöht wird?
- Wie verändert sich der Durchschnitt, wenn bei den sechs Werten jeder zweite Wert um 1 erhöht wird?
- Wie verändert sich der Durchschnitt, wenn bei den sechs Werten jeder zweite Wert um 1 verringert wird?
- Wie verändert sich der Durchschnitt, wenn zu den sechs Werten links noch einer hinzukommt?
- Wie verändert sich der Durchschnitt, wenn der linke Wert verdoppelt wird?

Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Daten
Auswerten von Daten

Bestimmen und Verstehen des Zentralwerts — 33

Jonas hat im Fach Sport die folgenden neun Zensuren: 1; 1; 2; 2; 2; 2; 4; 4; 5.

- Berechne den Durchschnitt.
- Bestimme den Zentralwert.

Der Sportlehrer überlegt, ob er Jonas eine 2 oder eine 3 als Zeugnisnote geben soll.

- Begründe, warum auch die Note 2 gerecht wäre.

Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Daten
Auswerten von Daten

Bestimmbarkeit eines Zentralwerts — 34

Die Klasse 9b wählt ihren Klassensprecher.
Ergebnis:

Name	Paul	Judith	Sophie	Tatjana	Jonas
Stimmen	4	10	7	5	3

- Warum kann man für diese Daten keinen Zentralwert angeben?

- Erkläre, welcher Wert entscheidet, wer die Wahl gewinnt.

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Markieren von Kennwerten in einer Datenreihe

35

Die 11 Jungen einer Schulklasse liefen im Sportunterricht die 100-Meter-Strecke.
Das sind ihre Zeiten, in Sekunden, nach Größe geordnet:

12,4	12,8	13,0	13,1	13,2	13,8	14,0	14,0	14,2	14,3	15,4

Diese Daten lassen sich folgendermaßen einteilen:

Der *Zentralwert* ist die Mitte aller Daten. Bei einer geraden Zahl von Daten ist es der Durchschnitt zwischen den beiden mittleren Werten. Durch den Zentralwert werden die Daten in zwei gleich große Teile geteilt.

Für die untere und die obere Hälfte lassen sich nun wieder die Zentralwerte bestimmen. Diese Werte heißen *unteres Quartil* bzw. *oberes Quartil*. Dadurch wird die gesamte Datenmenge in vier gleich große Teile geteilt.

- Kennzeichne in der obigen Datenreihe
  - das Maximum und das Minimum aller Werte,
  - die Mitte der Daten durch einen senkrechten Strich,
  - das untere und das obere Quartil der gegebenen Zeiten.
- Gib den Zentralwert und die Quartile an.

Erklären eines Boxplot

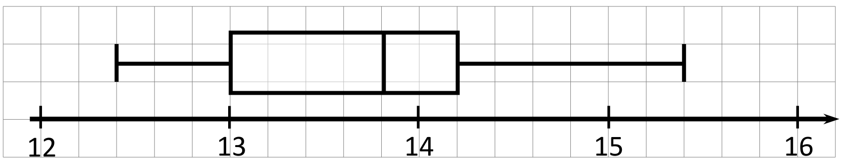
36

Ein Boxplot soll eine Übersicht über die Verteilung der Werte in einer Datensammlung geben. Er zeigt immer das Maximum, das Minimum, unteres und oberes Quartil sowie den Zentralwert.
Zum Beispiel: Es sind 11 Werte gegeben.

.

12,4	12,8	13,0	13,1	13,2	13,8	14,0	14,0	14,2	14,3	15,4
		unteres Quartil (Viertelgrenze)			Zentralwert z = 13,9			oberes Quartil (Viertelgrenze)		

Die Darstellung des zugehörigen Boxplot sieht demzufolge so aus:



- Kennzeichne in dieser Darstellung
  - Minimum/Maximum,
  - unteres/oberes Quartil,
  - Zentralwert.

Daten & Zufall Sekundarstufe I	Idee der Daten Auswerten von Daten

Anfertigen eines Boxplot

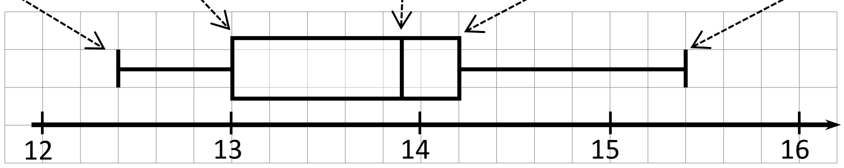
37

Passend zu einer Datenmenge aus 12 Werten wurde ein Boxplot erstellt:

unteres Quartil $Q_u = 13{,}0$ — Zentralwert $z = 13{,}9$ — oberes Quartil $Qo = 14{,}2$

12,4	12,8	12,9	13,1	13,2	13,8	14,0	14,0	14,2	14,2	14,8	15,4

Boxplot:



Die folgenden 16 Werte sind Sprungweiten (in Metern) einer Schulklasse:

3,2	3,3	3,6	3,6	3,8	3,8	4,0	4,0	4,2	4,3	4,5	4,6	4,6	4,7	4,8	4,8

- Stelle diese Daten in einem Boxplot dar.

Daten & Zufall Sekundarstufe I	Idee der Daten Auswerten von Daten

Bestimmen eines Zentralwertes aus einer Tabelle (mit Umweg über Urliste)

38

Der Zentralwert ist der Wert, der in einer geordneten Urliste in der Mitte steht.
Die folgende Tabelle stellt die Altersverteilung einer Juniormannschaft dar.

- Erstelle aus der folgenden Tabelle eine geordnete Urliste und bestimme den Zentralwert.

Alter in Jahren	17	18	19	20	21
Anzahl	5	6	7	2	1

Bestimmen des Zentralwertes aus einer Tabelle

39

Der Zentralwert ist der Wert, der in einer geordneten Urliste in der Mitte steht.
Die folgende Tabelle stellt die Altersverteilung aller Mannschaften bei einem Sportwettbewerb dar.
Aus den 130 Werten der folgenden Tabelle eine geordnete Urliste zu machen, wäre sehr mühsam.

- Wie kann man sich die Zahl, die in der Mitte dieser geordneten Urliste stehen würde, überlegen?

Werte	17	18	19	20	21
Anzahl	10	15	35	33	37

- Gib den Zentralwert an.

Begründen der Klassenbildung

40

Die Kinder einer Sportgruppe wurden gewogen.
Das sind die geordneten Werte (in Kilogramm):

40; 41; 42; 42; 43; 43; 44; 44; 45; 46; 46; 48; 48; 52; 52; 54; 55; 58; 59

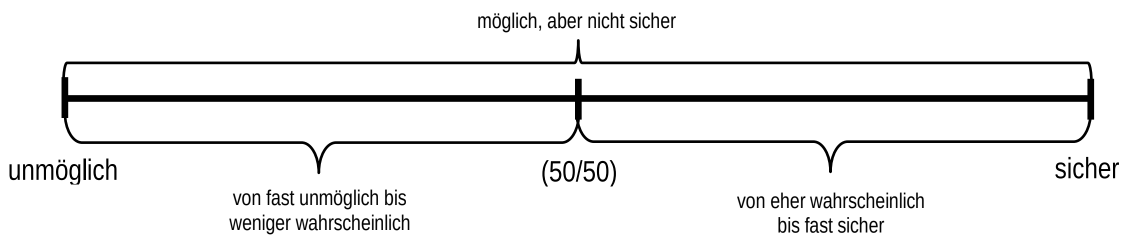
Die Werte sollen in einem Diagramm dargestellt werden.

- Erkläre, warum es sinnvoll ist, die Werte in Klassen zusammenzufassen.
- Überlege dir eine sinnvolle Klasseneinteilung. Die Klassen sollen die gleiche Breite haben.
- Stelle die Werte mit deiner Klasseneinteilung dar.

Darum geht es:

Die Idee der Wahrscheinlichkeit spielt in vielen Bereichen der Natur oder der Gesellschaft eine große Rolle. Beispiele sind Glücksspiele, Wettervorhersagen oder Risikoeinschätzungen für Versicherungen. Aussagen zur Wahrscheinlichkeit sind Ausdruck des Erwartungsgefühls für das mögliche Eintreffen eines Ergebnisses zu einem Vorgang in der Zukunft.

Das subjektive Erwartungsgefühl (**subjektive Wahrscheinlichkeit**) beschreibt den „Grad der Sicherheit", mit dem man das Eintreffen des Ergebnisses erwartet. In diesem Sinne hat der Begriff „wahrscheinlich" meist die Bedeutung, dass das Eintreten eines Ergebnisses eher erwartet wird. Bei der Verwendung des Begriffs „unwahrscheinlich" wird das Eintreten eines Ergebnisses eher nicht erwartet. Die subjektive Wahrscheinlichkeit entzieht sich der Berechnung mit mathematischen Methoden. Dennoch lässt sie sich auf folgender Skala darstellen:



Bei der Angabe des subjektiven Erwartungsgefühls kann auf der Skala kein bestimmter Punkt zugeordnet werden, sondern immer nur ein bestimmter Bereich. Die qualitative Bestimmung von subjektiven Wahrscheinlichkeiten bildet den Beginn der Betrachtung von Wahrscheinlichkeiten im Mathematikunterricht. Sie dient dem Aufbau von Grundvorstellungen noch vor dem formalen Rechnen.

Zu einer begründeten Erwartung kommt man, indem man alle möglichen Ergebnisse und die zugehörigen Einflussfaktoren für das Eintreffen der Ergebnisse betrachtet. Diese begründete Erwartung kann als „Chance" (Grundschule) sowie auch als „Wahrscheinlichkeit" (Sekundarstufe I) beschrieben werden. Im Alltag verwenden die Schülerinnen und Schüler schon Formulierungen wie „große Chance", „kleine Chance" bzw. „50/50-Chance". Zu Beginn der mathematischen Bildung werden Chancen als Verhältnisse zweier Zahlen angegeben. Sie beschreiben das Verhältnis *„Anzahl günstiger Ergebnisse : Anzahl <u>ungünstiger</u> Ergebnisse"*. Beispielsweise ist die Chance, mit einem Spielwürfel die Augenzahl „3" zu würfeln, 1 : 5 (lies: 1 zu 5).

Im Rahmen der klassischen Definition der Wahrscheinlichkeit (**mathematische Wahrscheinlichkeit**) wird die Wahrscheinlichkeit als das Verhältnis „Anzahl der günstigen Ergebnisse" : „Anzahl der <u>möglichen</u> Ergebnisse" eines Zufallsexperiments angegeben. Damit wird in Abgrenzung zur Chance eine andere Bezugsgröße genutzt. Die Verhältnisse werden als gemeine Brüche, Dezimalbrüche oder durch Prozentangaben dargestellt. Im Würfelbeispiel beträgt die Wahrscheinlichkeit, mit einem Spielwürfel eine „3" zu würfeln, somit $\frac{1}{6}$. Dieser Angabe liegt die Regel von Laplace zugrunde, welche voraussetzt, dass alle Augenzahlen des Würfels mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten.

Im Rahmenlehrplan wird der Planung, Durchführung und Auswertung von Zufallsexperimenten eine besondere Bedeutung beigemessen. Alle möglichen Ergebnisse eines zufälligen Vorgangs (auch Zufallsexperiments) bilden die Ergebnismenge Ω. Ein Ereignis A ist eine Menge von möglichen Ergebnissen. Jedes Ereignis ist somit Teilmenge der Ergebnismenge.

Beispiel:

Zufallsexperiment	Ergebnismenge	Ereignis
Werfen eines Spielwürfels	Ω = {1,2,3,4,5,6}	„gerade Augenzahl" A = {2,4,6}

Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses A wird mit P(A) bezeichnet (P steht für „probabilty"). Sie nimmt immer einen Wert von 0 bis 1 bzw. von 0 % bis 100 % an.

Sofern eine Ereignismenge A alle Elemente der Ergebnismenge Ω enthält, spricht man vom sicheren Ereignis. Die Wahrscheinlichkeit für das sichere Ereignis beträgt 1. Ein Ereignis ist unmöglich, wenn kein Ergebnis des zufälligen Vorgangs für dieses Ereignis günstig ist. Die Wahrscheinlichkeit für das unmögliche Ereignis beträgt 0. Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit von Ereignissen nutzt man die elementare Additionsregel:

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten der dafür günstigen Ergebnisse.

Die obige Skala für die subjektive Wahrscheinlichkeit kann mit der mathematischen Wahrscheinlichkeit in Einklang gebracht werden:

unmöglich	(50/50)	sicher
P(A)= 0	P(B) = 0,5	P(C) = 1

Damit sind auch andere Wahrscheinlichkeiten zwischen „unmöglich" und „sicher" über ihren Wert auf der Skala lokalisierbar.

Das Ereignis, welches genau dann eintritt, wenn das Ereignis A nicht eintritt, heißt Gegenereignis $\overline{A}$. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten von Ereignis und Gegenereignis ist 1, da sich die Ereignismengen genau zur Ergebnismenge ergänzen.

Haben alle Ergebnisse eines zufälligen Vorgangs die gleiche Wahrscheinlichkeit, zum Beispiel aus Symmetriegründen (wie bei einem Spielwürfel), kann mit der Laplace-Formel gerechnet werden.

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

Man unterscheidet einstufige von mehrstufigen Zufallsexperimenten. Zufallsexperimente werden mehrstufig genannt, wenn sie mit mehreren Teilvorgängen modelliert werden können, die gleichzeitig oder nacheinander ablaufen. Mithilfe eines Baumdiagramms kann man den Ablauf der nacheinander ausgeführten Teilexperimente eines mehrstufigen Zufallsexperimentes und dessen Ergebnismenge darstellen. Für Baumdiagramme ergeben sich aus den elementaren Regeln für das Berechnen von Wahrscheinlichkeiten die beiden folgenden Regeln:

- 1. Pfadregel (Produktregel):
  Das Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang eines Pfades ist gleich der Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses, das durch diesen Pfad dargestellt wird.
- 2. Pfadregel (Summenregel):
  Die Summe der Wahrscheinlichkeiten der für ein Ereignis günstigen Pfade ist gleich der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses. (Die 2. Pfadregel entspricht bei einstufigen Zufallsexperimenten der elementaren Additionsregel.)

In Abgrenzung zu Laplace-Experimenten werden auch Experimente, wie z. B. das Werfen einer Streichholzschachtel oder das Werfen einer Reißzwecke untersucht. Hier ist die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten selten möglich, da die Einflussfaktoren zu komplex sind.

Um Wahrscheinlichkeitsaussagen treffen zu können, nutzt man auch das empirische Gesetz der großen Zahlen. Nach möglichst häufiger Wiederholung eines Zufallsexperiments wird die relative Häufigkeit eines Ergebnisses bestimmt. Mit zunehmender Anzahl von Wiederholungen stabilisiert sich die relative Häufigkeit eines Ergebnisses und strebt gegen einen festen Wert. Dieser feste Wert wird als Wahrscheinlichkeit angenommen (statistische Wahrscheinlichkeit).

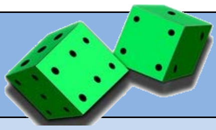
Das kann in der Realität stattfinden oder mithilfe digitaler Medien durch Simulationen. Unter einer Simulation versteht man das wiederholte Nachahmen eines zufälligen Vorganges durch ein geeignetes Zufallsexperiment. Mithilfe von Simulationen können sehr große Versuchsanzahlen simuliert werden, mit deren Hilfe die damit ermittelten relativen Häufigkeiten der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit angenähert werden können.

Förderaufgaben
„Idee der Wahrscheinlichkeit“
Grundschule

Förderschritte zu den Diagnoseaufgaben „Zählstrategien und Wahrscheinlichkeit“ (B,C,D): 2a, b

Übersicht über die Förderaufgaben (Grundschule):

1. Finden von verschiedenen Ausgängen (Ergebnissen) zu Situationen
2. Treffen von Vorhersagen und Überprüfen von Ausgängen (Ergebnissen) zu Situationen
3. Zuordnen der Begriffe „sicher“, „möglich, aber nicht sicher“ und „unmöglich“ auf der Grundlage von Beobachtungen
4. Verwenden der Begriffe „sicher“, „möglich, aber nicht sicher“ und „unmöglich“ beim Beschreiben von Urnenversuchen
5. Ergänzen der Begriffe „sicher“, „möglich, aber nicht sicher“ und „unmöglich“ in einem Lückentext
6. Zusammenfassen von Ergebnissen zu Ereignissen
7. Zuordnen der Begriffe „sicher“, „möglich, aber nicht sicher“ und „unmöglich“ bei Ereignissen
8. Verwenden der Begriffe „sicher“, „möglich, aber nicht sicher“ und „unmöglich“ bei Ereignissen
9. Würfeln einer vorgegebenen Augenzahl und Erkennen des zufälligen Eintretens von Ergebnissen
10. Manipulieren eines Würfels
11. Interpretieren von Aussagen zum Würfel
12. Beschreiben von Chancen beim Ziehen von Kugeln
13. Beschreiben der Fifty-fifty-Chance
14. Interpretieren einer Aussage zur Fifty-fifty-Chance
15. Erkennen von Fifty-fifty-Chancen
16. Einordnen von Chancen auf einer Skala
17. Ermitteln und Vergleichen der Ergebnisse von Zufallsexperimenten in Partnerarbeit
18. Durchführen und Auswerten eines Zufallsexperimentes mit vorgegebener Tabelle
19. Untersuchen der vorgegebenen Auswertungstabelle
20. Durchführen, Dokumentieren und Auswerten eines Zufallsexperimentes
21. Nutzen des Bruchstreifens zum Bestimmen von Anteilen
22. Bestimmen des Anteils
23. Bestimmen von Gewinnanteilen bei verschiedenen Glücksrädern
24. Bestimmen und Vergleichen von Gewinnanteilen bei verschiedenen Glücksrädern
25. Färben von Glücksrädern nach vorgegebenen Gewinnanteilen
26. Färben von Kugeln nach vorgegebenen Gewinnanteilen
27. Vergleichen der Gewinnanteile an verschiedenen Modellen
28. Übertragen der Gewinnanteile von einem Modell auf ein anderes mit gleicher Gesamtzahl
29. Übertragen der Gewinnanteile von einem Modell auf ein anderes mit unterschiedlichen Gesamtanzahlen
30. Verändern der Gewinnanteile



Finden von verschiedenen Ausgängen (Ergebnissen) zu Situationen	1

Material: *ein Wendeplättchen, eine Münze, ein Würfel*

Was kann passieren, wenn …

- du ein Wendeplättchen wirfst?
- du eine Münze wirfst?
- du mit einem Würfel würfelst?

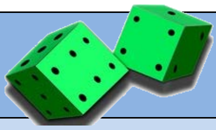
Nenne alle möglichen Ergebnisse.

Bild 1: „Münze 1€“, pixabay.com, CC0
Bild 2: „Würfel 1“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall
Grundschule

Idee der Wahrscheinlichkeit
Treffen von Aussagen zum Ausgang von Situationen



Treffen von Vorhersagen und Überprüfen von Ausgängen (Ergebnissen) zu Situationen	2

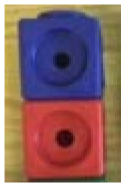
Material: *eine Münze, ein Spielwürfel, ein Papierkorb, eine Papierkugel*

Auf welches Ergebnis tippst du? Trage deinen Tipp in die Tabelle ein.
Probiere es aus und ergänze die Tabelle.

Vorgang	Mein Tipp:	Das ist das Ergebnis:	Richtig oder falsch getippt?
Werfen einer Münze			
Würfeln mit einem Spielwürfel			
Werfen einer Papierkugel in Richtung Papierkorb			

Zuordnen der Begriffe „sicher“, „möglich, aber nicht sicher“ und „unmöglich“ auf der Grundlage von Beobachtungen | 3

Material: *drei blickdichte Säckchen: Säckchen 1 mit drei blauen Steckwürfeln, Säckchen 2 mit drei roten Steckwürfeln, Säckchen 3 mit einem roten und zwei blauen Steckwürfeln*



Ziehe aus jedem Säckchen nacheinander alle Steckwürfel heraus und lege sie nebeneinander.
Beschreibe deine Beobachtungen.

Welcher Satz passt zu welchem Säckchen?

- Es ist **sicher**, einen blauen Steckwürfel zu ziehen.
- Es ist **unmöglich**, einen blauen Steckwürfel zu ziehen.
- Es ist **sicher**, einen roten Steckwürfel zu ziehen.
- Es ist **unmöglich**, einen roten Steckwürfel zu ziehen.
- Es ist **möglich, aber nicht sicher**, einen roten Steckwürfel zu ziehen.
- Es ist **möglich, aber nicht sicher**, einen blauen Steckwürfel zu ziehen.

Bild 3: „Zwei Steckwürfel“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

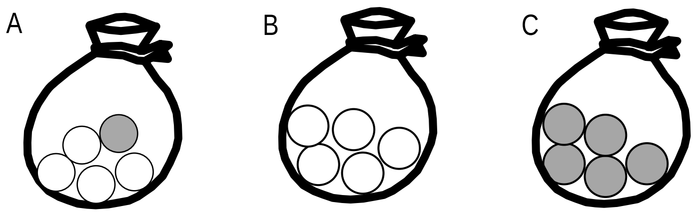
Daten & Zufall
Grundschule

Idee der Wahrscheinlichkeit
Treffen von Aussagen zum Ausgang von Situationen

Verwenden der Begriffe „sicher“, „möglich, aber nicht sicher“ und „unmöglich“ beim Beschreiben von Urnenversuchen | 4

Material: *durchsichtige Säckchen mit schwarzen und weißen Kugeln*

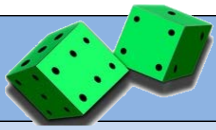
Stell dir vor, du nimmst aus einem Säckchen ohne hinzusehen eine Kugel heraus.
Es gibt drei Säckchen.



Beantworte folgende Fragen:

- Aus welchem Säckchen ist es **sicher**, eine weiße Kugel zu ziehen? Begründe.
- Aus welchem Säckchen ist es **unmöglich**, eine weiße Kugel zu ziehen? Begründe.
- Aus welchen Säckchen ist es **möglich, aber nicht sicher**, eine weiße Kugel zu ziehen? Begründe.
- Aus welchem Säckchen ist es **möglich, aber nicht sicher**, eine schwarze Kugel zu ziehen? Begründe.

Bild 4: „Drei Säckchen II“, LISUM, CC-BY-SA 4.0



Ergänzen der Begriffe „sicher“, „möglich, aber nicht sicher“ und „unmöglich“ in einem Lückentext | 5

In einem Säckchen sind blaue und rote Kugeln.

Ergänze die Sätze. Verwende **„sicher“**, **„unmöglich“** oder **„möglich, aber nicht sicher“**.

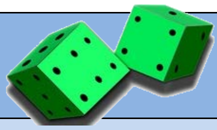
Eine blaue Kugel zu ziehen, ist .... .

Eine grüne Kugel zu ziehen, ist .... .

Eine blaue oder eine rote Kugel zu ziehen, ist .... .

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

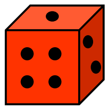
Daten & Zufall
Grundschule



Idee der Wahrscheinlichkeit
Treffen von Aussagen zum Ausgang von Situationen

Zusammenfassen von Ergebnissen zu Ereignissen | 6

Material: mindestens 6 Spielwürfel



a) Welche Augenzahlen sind beim Werfen mit einem Würfel möglich?
Lege **alle** möglichen Würfelergebnisse (Augenzahlen) mit den Würfeln.

b) Welche Augenzahlen passen zu den Aussagen? Lege alle möglichen Ergebnisse mit den Würfeln.

- Du würfelst eine gerade Zahl.
- Du würfelst eine ungerade Zahl.
- Du würfelst eine Zahl, die kleiner als 3 ist.
- Du würfelst eine Zahl, die größer als 3 ist.
- Du würfelst eine Zahl, die kleiner als 7 ist.
- Du würfelst eine Zahl, die kleiner als 1 ist.

Zuordnen der Begriffe „sicher“, „möglich, aber nicht sicher“ und „unmöglich“ bei Ereignissen | 7

Material: *ein Achterspielwürfel*

Du hast einen Achterspielwürfel.
Schreibe **alle** möglichen Ergebnisse (Augenzahlen), die beim Würfeln eintreten können, auf.

Verbinde passend.

Es ist sicher	…, dass du eine 4 würfelst.
Es ist unmöglich	…, dass du eine gerade Zahl würfelst.
Es ist möglich, aber nicht sicher	…, dass du eine zweistellige Zahl würfelst.
	…, dass du eine einstellige Zahl würfelst.

Daten & Zufall
Grundschule

Idee der Wahrscheinlichkeit
Treffen von Aussagen zum Ausgang von Situationen

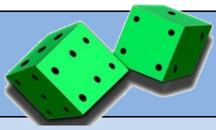
Verwenden der Begriffe „sicher“, „möglich, aber nicht sicher“ und „unmöglich“ bei Ereignissen | 8

Die Ziffernkarten $\boxed{2}$ $\boxed{4}$ $\boxed{6}$ $\boxed{8}$ werden gemischt und verdeckt hingelegt.

Dann wird eine Karte gezogen.

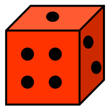
Entscheide, ob diese Ergebnisse eintreten können. Kreuze an und begründe.

Ergebnis	sicher	möglich, aber nicht sicher	unmöglich
Ziehen der 8			
Ziehen einer geraden Zahl			
Ziehen der 3			
Ziehen einer 2, 4 oder 6			

Daten & Zufall Grundschule		Idee der Wahrscheinlichkeit Subjektive Wahrscheinlichkeit

Würfeln einer vorgegebenen Augenzahl und Erkennen des zufälligen Eintretens von Ergebnissen	9

Material: *ein Spielwürfel*



Du sollst die Zahl 6 würfeln. Schaffst du es gleich beim ersten Mal?

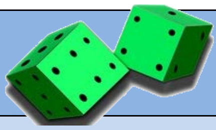
- Versuche es.
- Was stellst du fest?

Du sollst die Zahl 1 würfeln. Schaffst du es gleich beim ersten Mal?

- Versuche es.
- Was stellst du fest?

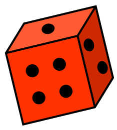
Bild 6: „Würfel 1“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall Grundschule		Idee der Wahrscheinlichkeit Subjektive Wahrscheinlichkeit

Manipulieren eines Würfels	10

Material: *ein Spielwürfel*



Gibt es eine Möglichkeit, den Würfel so zu werfen, dass er genau die Zahl zeigt, die du gerade benötigst?

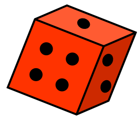
Wenn du eine tolle Idee hast, dann probiere sie aus.

Was stellst du fest?

Bild 7: „Würfel 1“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall Grundschule	Idee der Wahrscheinlichkeit Subjektive Wahrscheinlichkeit
Interpretieren von Aussagen zum Würfel	11

Die Kinder spielen „Mensch ärgere dich nicht“. Dabei machen sie folgende Aussagen.
Was meinst du zu den Aussagen der Kinder?



Susi sagt: „Ich kann sicher vorhersagen, welche Zahl ich würfeln werde.“

Pia sagt: „Ich würfle nie eine 6. Beim nächsten Würfeln werde ich bestimmt wieder keine 6 würfeln.
Ich kann keine Sechsen würfeln.“

Paul behauptet: „Ich kann nicht vorhersagen, welche Zahl ich würfeln werde.“

Tim sagt: „Ich muss eine 1 würfeln. Aber die ist viel schwerer zu würfeln als eine 6.“

Murad sagt: „Alle Augenzahlen sind gleich schwer zu würfeln.“

Bild 8: „Würfel 1“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall Grundschule	Idee der Wahrscheinlichkeit Subjektive Wahrscheinlichkeit
Beschreiben von Chancen beim Ziehen von Kugeln	12

In einem Säckchen sind schwarze und weiße Kugeln.
Stell dir vor, dass du ohne hinzusehen eine Kugel ziehst.

- Welche Farbe kann die gezogene Kugel haben?
- Für welche Farbe ist die Chance größer? Begründe.

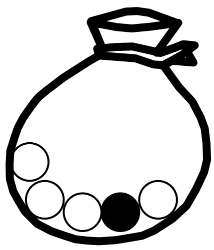
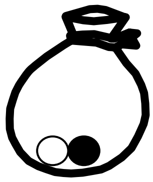


Bild 9: „Ein Säckchen I“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall Grundschule	Idee der Wahrscheinlichkeit Subjektive Wahrscheinlichkeit
Beschreiben der Fifty-fifty-Chance	13

Stelle dir vor, dass du ohne hinzusehen eine Kugel ziehst.

- Welche Farbe kann deine Kugel haben?



Vergleiche die Chancen für das Ziehen einer weißen und das Ziehen einer schwarzen Kugel.

- Was fällt dir auf?

Lisa erklärt: „Die Chance, eine weiße Kugel zu ziehen, ist fifty-fifty".

- Was meint Lisa damit?

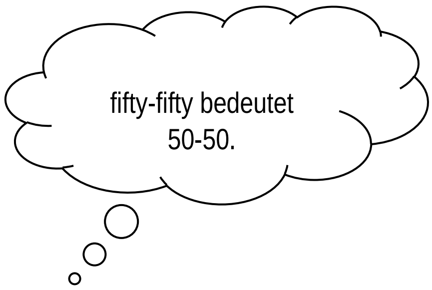
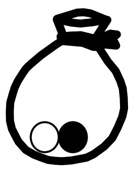


Bild 10: „Ein Säckchen II", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall Grundschule	Idee der Wahrscheinlichkeit Subjektive Wahrscheinlichkeit
Interpretieren einer Aussage zur Fifty-fifty-Chance	14

Stell dir vor, du ziehst 10-mal hintereinander ohne hinzusehen eine Kugel.
Die gezogene Kugel wird jedes Mal wieder zurückgelegt.



Tim sagt: „Die Chance für das Ziehen einer weißen bzw. schwarzen Kugel ist fifty-fifty.
Also werden die gezogenen Kugeln folgende Farben haben:"

weiß	schwarz	weiß	schwarz	weiß	schwarz	weiß	schwarz	weiß	schwarz

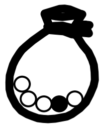
Hat Tim Recht? Begründe.

Bild 11: „Säckchen II", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Erkennen von Fifty-fifty-Chancen | 15

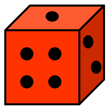
Bei welchen Ergebnissen hast du eine Fifty-fifty-Chance? Entscheide und begründe.

a) Du ziehst eine weiße Kugel.



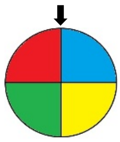
b) Du erhältst Zahl beim Werfen einer Münze.

c) Du würfelst eine 6.



d) Du würfelst eine ungerade Zahl.

e) Du drehst das Glücksrad und gewinnst bei Rot.



Daten & Zufall
Grundschule

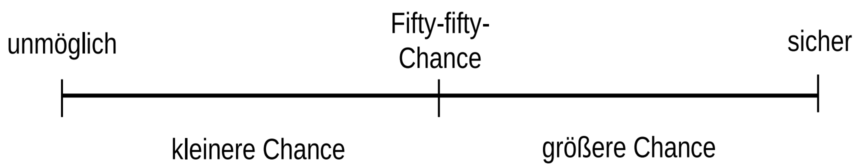
Idee der Wahrscheinlichkeit
Subjektive Wahrscheinlichkeit

Einordnen von Chancen auf einer Skala | 16

Ordne die folgenden Situationen passend auf der Skala ein.

Was meinst du: Wie groß ist die Chance, dass …

A es morgen hitzefrei gibt?
B ich beim Kartenspielen gewinne?
C ich zu Weihnachten Geschenke bekomme?
D ich mit einer Münze Zahl werfe?
E ich beim Fußball ein Tor schieße?
F die Lufttemperatur morgen 100° C ist?



Daten & Zufall Grundschule	Idee der Wahrscheinlichkeit Statistische Wahrscheinlichkeit
Ermitteln und Vergleichen der Ergebnisse von Zufallsexperimenten in Partnerarbeit	17

Material: *2 blickdichte Beutel mit gleicher Anzahl farbiger Steckwürfel (gelb, rot, grün, blau)*

Arbeite mit einem Partner. Jeder erhält einen Beutel mit Steckwürfeln.
Nehmt einen Steckwürfel aus dem Beutel.
Malt in der Farbe des gezogenen Steckwürfels einen Punkt aus.
Legt den Steckwürfel wieder zurück.
Wiederholt den Vorgang 10-mal.

Partner A: ○○○○○○○○○○ Partner B: ○○○○○○○○○○

Vergleicht die Ergebnisse.

Wie könnt ihr euch die Ergebnisse erklären?

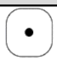
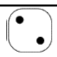
Wiederholt das Experiment. Könnt ihr jetzt das Ergebnis vorhersagen?

Bild 16: „Vier Steckwürfel I", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall Grundschule	Idee der Wahrscheinlichkeit Statistische Wahrscheinlichkeit
Durchführen und Auswerten eines Zufallsexperimentes mit vorgegebener Tabelle	18

Material: *ein Spielwürfel*

- Würfle 20-mal. Ergänze nach jedem Würfelwurf die Strichliste.

Augenzahl	Anzahl (Striche)
	
	
	
	
	
	

Beantworte die Fragen.

- Hast du eine 6 gewürfelt?
- Welche Zahl hast du am häufigsten gewürfelt?
- Hast du in der Tabelle an einer Stelle keinen Strich gezeichnet? Was bedeutet das?
- Wie oft hast du die 3 gewürfelt?
- Kannst du vorhersagen, welche Augenzahl du als nächstes würfelst?

Bild 17-22: „Würfelbilder 1 bis 6", alle pixabay.com, CC0

Daten & Zufall Grundschule	Idee der Wahrscheinlichkeit Statistische Wahrscheinlichkeit
Untersuchen der vorgegebenen Auswertungstabelle	19

Lisa bereitet einen Zufallsversuch vor.

Die Ziffernkarten 1 2 3 4 werden gemischt und verdeckt hingelegt.

Es wird eine Ziffernkarte gezogen.

Die Ergebnisse sollen in einer Tabelle eingetragen werden. Lisa zeichnet diese Tabelle.

Ziffernkarte	Anzahl
0	
1	
2	
3	

Beantworte die Fragen.

a) Ist die Tabelle geeignet, um alle möglichen Ergebnisse einzutragen? Begründe.

b) Für welche Zahl in der Tabelle passt „unmöglich“?

c) Für welche Zahlen in der Tabelle passt „möglich, aber nicht sicher“ ?

Daten & Zufall Grundschule	Idee der Wahrscheinlichkeit Statistische Wahrscheinlichkeit
Durchführen, Dokumentieren und Auswerten eines Zufallsexperimentes	20

Material: *ein Zehnerwürfel*

Du würfelst mit dem Zehnerwürfel. Erstelle eine Strichliste.

- Zeichne eine passende Tabelle für alle möglichen Würfelergebnisse.
- Würfle 20-mal.
- Beantworte die Fragen:

Welche Zahlen hast du gewürfelt?
Hast du eine Zahl auf dem Würfel gar nicht gewürfelt?
Hast du die Zahl 12 gewürfelt?

- Stelle weitere Fragen, die du beantworten kannst.
- Stelle eine Frage, die du nicht beantworten kannst.

Bild 23: „Zehnerwürfel“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall Grundschule	Idee der Wahrscheinlichkeit Statistische Wahrscheinlichkeit
Nutzen des Bruchstreifens zum Bestimmen von Anteilen	21

Zum Experiment „Werfen einer Münze“ wurde eine Strichliste erstellt.

Zahl	Wappen
𝍸	𝍸 𝍸

- Wie oft wurde das Ergebnis „Zahl“ geworfen?
- Wie oft wurde das Ergebnis „Wappen“ geworfen?

a) Übertrage die Strichliste auf den Bruchstreifen.
Male die Anzahlen für „Zahl“ rot und für „Wappen“ blau aus.

b) Erkläre, warum ein 15-er Bruchstreifen vorgegeben wurde.

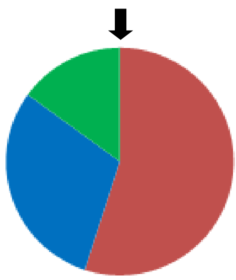
c) Lies den Anteil ab für:
- „Zahl“
- „Wappen“

d) Du wirfst eine Münze erneut 15-mal. Werden die Anteile für Zahl und Wappen gleich bleiben?

Bild 24: „Münze 1€“, pixabay.com, CC0

Daten & Zufall Grundschule	Idee der Wahrscheinlichkeit Mathematische Wahrscheinlichkeit
Bestimmen des Anteils	22

Ein Glücksrad wurde gedreht. Die Ergebnisse wurden in einer Tabelle festgehalten.



Rot	Blau	Grün
10	7	3

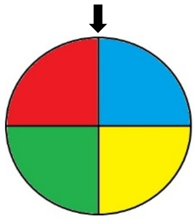
- Wie oft wurde insgesamt gedreht?
- Gib den Anteil für Rot an.
- Du drehst das Glücksrad erneut 10-mal. Wird der Anteil für Rot gleichbleiben?

Bild 25: „Glücksrad II“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

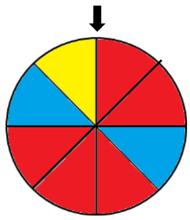
Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Bestimmen von Gewinnanteilen bei verschiedenen Glücksrädern | 23

Du drehst die Glücksräder und gewinnst bei Rot.



- Wie groß ist der Anteil des roten Feldes beim Glücksrad?
- Vermute, welche Farbe am häufigsten gedreht wird.

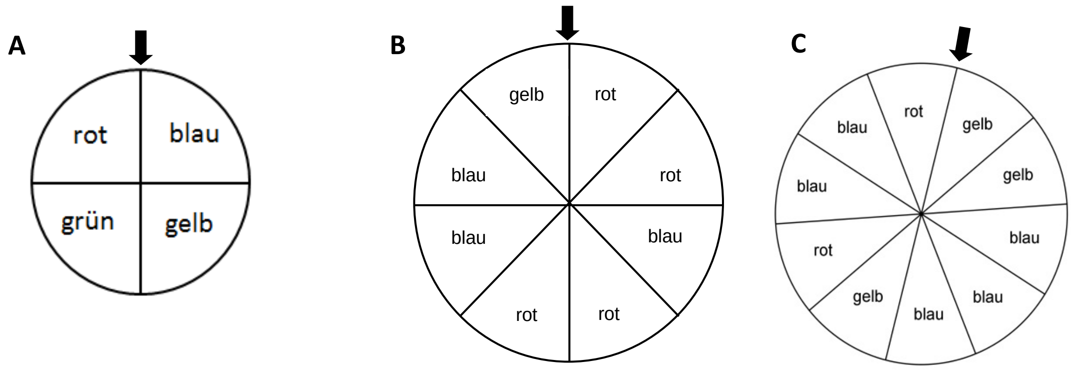


- Wie groß ist der Anteil der roten Felder beim Glücksrad?
- Vermute, welche Farbe am häufigsten gedreht wird.

Bild 26: „Glücksrad III“, LISUM, CC-BY-SA 4.0
Bild 27: „Glücksrad IV“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Bestimmen und Vergleichen von Gewinnanteilen bei verschiedenen Glücksrädern | 24

Du gewinnst bei Rot. Welches Glücksrad wählst du aus?



Begründe deine Wahl mithilfe der Anteile.

Bild 28: „Glücksräder V“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall
Grundschule

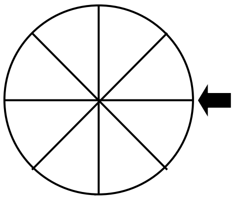
Idee der Wahrscheinlichkeit
Mathematische Wahrscheinlichkeit

Färben von Glücksrädern nach vorgegebenen Gewinnanteilen — 25

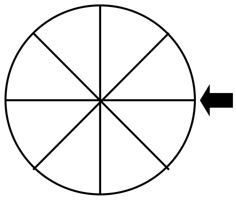
Hier siehst du drei leere Glücksräder. Der Anteil der roten Gewinnfelder ist bei jedem Glücksrad anders.

Färbe das Glücksrad so, dass der Anteil „Rot“ zu drehen …

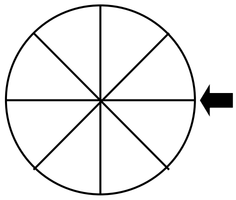
$\frac{1}{2}$ ist.



$\frac{3}{4}$ ist.



$\frac{5}{8}$ ist.



Du gewinnst bei Rot. Welches Glücksrad wählst du aus?

Bild 29: „Glücksräder VI“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall
Grundschule

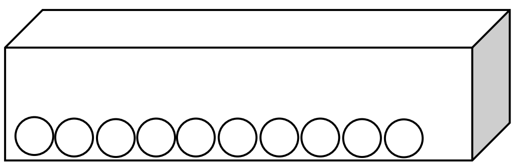
Idee der Wahrscheinlichkeit
Mathematische Wahrscheinlichkeit

Färben von Kugeln nach vorgegebenen Gewinnanteilen — 26

In einer Schachtel befinden sich rote, blaue und schwarze Kugeln. Es sind insgesamt 10 Kugeln.

Der Anteil der roten Kugeln in der Schachtel beträgt $\frac{3}{10}$.

- Färbe alle Kugeln passend rot, blau und schwarz.



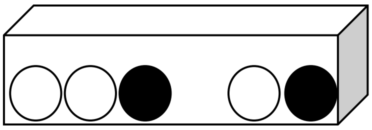
- Warum ist die Chance eine blaue oder eine schwarze Kugel zu ziehen größer als eine rote Kugel zu ziehen?

Daten & Zufall
Grundschule

Idee der Wahrscheinlichkeit
Mathematische Wahrscheinlichkeit

Vergleichen der Gewinnanteile an verschiedenen Modellen — 27

In der Schachtel sind zwei schwarze und drei weiße Kugeln.
Du gewinnst, wenn du **schwarz** ziehst.



- Wie groß ist der Anteil der schwarzen Kugeln (Gewinnerkugeln) in der Schachtel?

Beim Würfeln gewinnst du, wenn du **eine gerade Zahl** würfelst.

- Wie groß ist der Anteil der geraden Zahlen (Gewinnerzahlen) an allen Augenzahlen?

Wählst du die Schachtel oder den Würfel, um zu gewinnen?

- Begründe deine Entscheidung.

Bild 30: „Würfel schwarz-weiß“, pixabay.com, CC0

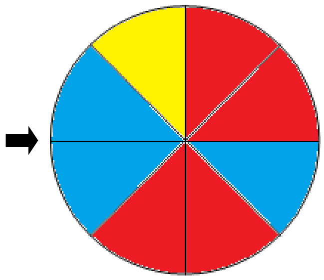
Daten & Zufall
Grundschule

Idee der Wahrscheinlichkeit
Mathematische Wahrscheinlichkeit

Übertragen der Gewinnanteile von einem Modell auf ein anderes mit gleicher Gesamtzahl — 28

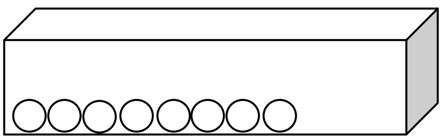
Das Glücksrad wird gedreht.

- Bestimme die Anteile der Farben Rot, Blau und Gelb.



Beim Ziehen von Kugeln aus einer Schachtel gelten die gleichen Farbanteile wie beim Drehen des Glücksrades.

- Wie viele rote, blaue und gelbe Kugeln sind in der Schachtel, wenn es insgesamt 8 Kugeln sind?
- Färbe die Kugeln in der Schachtel.

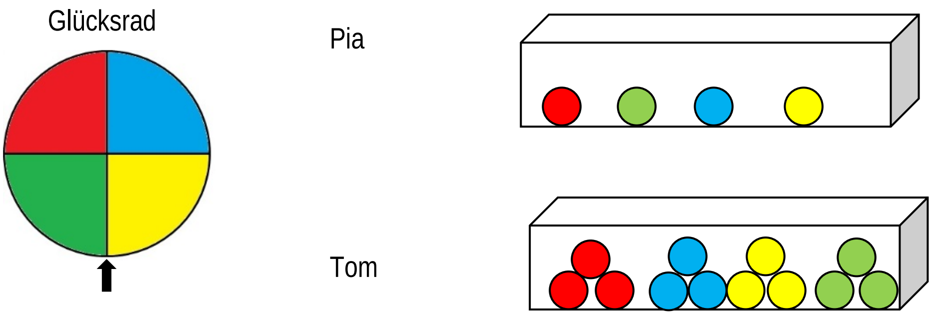


- Du gewinnst bei Rot. Wählst du das Glücksrad oder die Schachtel?

Bild 31: „Glücksrad VII“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall Grundschule		Idee der Wahrscheinlichkeit Mathematische Wahrscheinlichkeit
Übertragen der Gewinnanteile von einem Modell auf ein anderes mit unterschiedlichen Gesamtanzahlen		29

Das Glücksrad ist durch den Regen beim letzten Schulfest unbrauchbar geworden.
Pia und Tim haben Kugeln in Schachteln gelegt, sodass die Anteile der Farben gleich bleiben.



Du gewinnst bei Rot. Wählst du die Schachtel von Pia oder die Schachtel von Tom? Begründe.

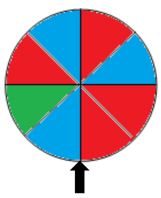
Bild 32: „Glücksrad VIII“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall Grundschule		Idee der Wahrscheinlichkeit Mathematische Wahrscheinlichkeit
Verändern der Gewinnanteile		30

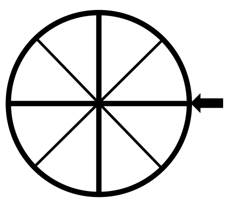
Das Glücksrad wird gedreht.

Nenne alle möglichen Ergebnisse.



Peter, Paul, Tom und Uwe drehen das Glücksrad.

- Peter gewinnt bei Rot.
- Paul gewinnt bei Grün.
- Uwe gewinnt bei Blau.
- Tom gewinnt bei Gelb.

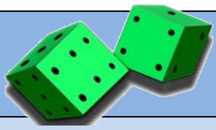


Vergleiche die Gewinnanteile. Ist das Spiel gerecht? Begründe.

Verändere das Glücksrad so, dass alle Farbe den gleichen Gewinnanteil haben.

Bild 33: „Glücksrad IX“, LISUM, CC-BY-SA 4.0
Bild 34: „Glücksrad X schwarz-weiß“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Förderaufgaben
„Idee der Wahrscheinlichkeit“
Sekundarstufe I



Förderschritte zu den Diagnoseaufgaben „Zählstrategien und Wahrscheinlichkeit“ (E,F,G): 2a,b

Übersicht über die Förderempfehlungen (Sekundarstufe 1):

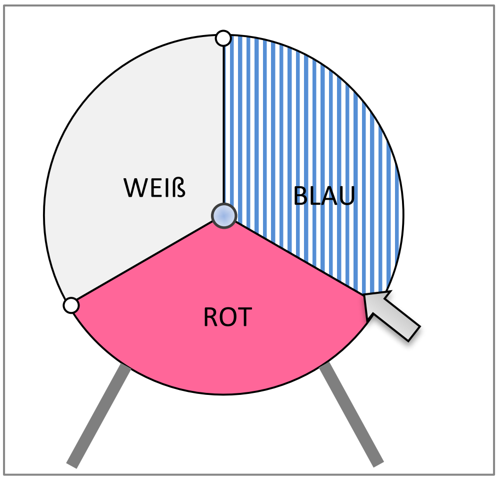
1. Aufschreiben von Ergebnissen mehrstufiger Zufallsvorgänge I
2. Aufschreiben von Ergebnissen mehrstufiger Zufallsvorgänge II
3. Beschreiben eines Ereignisses eines mehrstufigen Zufallsvorganges
4. Nutzen der Begriffe „wahrscheinlich“ und „unwahrscheinlich“ aufgrund von Erfahrungen
5. Nutzen des subjektiven Empfindens für die Einschätzung von Wahrscheinlichkeiten
6. Nutzen wechselnder Darstellungsformen für Anteile I
7. Nutzen wechselnder Darstellungsformen für Anteile II
8. Nutzen wechselnder Darstellungsformen für Anteile III
9. Bestimmen der absoluten und relativen Häufigkeit
10. Vergleichen der absoluten und relativen Häufigkeit
11. Schlussfolgern von der relativen Häufigkeit auf die Wahrscheinlichkeit I
12. Schlussfolgern von der relativen Häufigkeit auf die Wahrscheinlichkeit II
13. Schlussfolgern von der relativen Häufigkeit auf die Wahrscheinlichkeit III
14. Veranschaulichen der relativen Häufigkeiten im Diagramm I
15. Veranschaulichen der relativen Häufigkeiten im Diagramm II
16. Unterscheiden von Wahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit
17. Abschätzen der absoluten Häufigkeit aufgrund der Wahrscheinlichkeit I
18. Abschätzen der absoluten Häufigkeit aufgrund der Wahrscheinlichkeit II
19. Angeben der Ergebnismenge
20. Zuordnen von Ergebnismengen
21. Angeben der Ergebnismenge eines zweistufigen Zufallsversuchs I
22. Angeben der Ergebnismenge eines zweistufigen Zufallsversuchs II
23. Zuordnen von Ereignissen und der Menge ihrer günstigen Ergebnisse
24. Angeben der Menge der günstigen Ergebnisse
25. Anwenden von „mindestens“ und „höchstens“
26. Angeben der Ergebnisse eines Gegenereignisses I
27. Angeben der Ergebnisse eines Gegenereignisses II
28. Angeben der Vereinigungsmenge („oder“) I
29. Angeben der Vereinigungsmenge II
30. Bestimmen der Mächtigkeit einer Menge
31. Erkennen von Gleichwahrscheinlichkeit I
32. Erkennen von Gleichwahrscheinlichkeit II
33. Erkennen von Gleichwahrscheinlichkeit III
34. Erkennen von Gleichwahrscheinlichkeit IV
35. Erkennen von Gleichwahrscheinlichkeit V
36. Berechnen der Wahrscheinlichkeit
37. Beachten der Gleichwahrscheinlichkeit bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeit
38. Addieren von Wahrscheinlichkeiten I
39. Addieren von Wahrscheinlichkeiten II
40. Addieren von Wahrscheinlichkeiten III
41. Nutzen der Formel von Laplace I
42. Nutzen der Formel von Laplace II
43. Nutzen der Formel von Laplace III
44. Kennen der Wahrscheinlichkeiten des sicheren und unmöglichen Ereignisses
45. Beachten der Schnittmenge bei der Addition von Wahrscheinlichkeiten

46. Bestimmen der Wahrscheinlichkeit bei zweimaligem Ziehen
47. Ermitteln der Wahrscheinlichkeit beim Ziehen ohne Zurücklegen
48. Ergänzen eines vollständigen Baumdiagramms (einstufig)
49. Berechnen der Pfadwahrscheinlichkeiten
50. Zeichnen eines vollständigen Baumdiagramms (einstufig)
51. Ergänzen eines zweistufigen Baumdiagramms
52. Zeichnen eines vollständigen Baumdiagramms (zweistufig)
53. Herleiten der Ausgangssituation eines Experimentes aus einem Baumdiagramm
54. Nutzen der Pfadregel (Produktregel)
55. Rechnen mit der Pfadregel (Produktregel) I
56. Rechnen mit der Pfadregel (Produktregel) II
57. Nutzen der Gegenwahrscheinlichkeit I
58. Nutzen der Gegenwahrscheinlichkeit II
59. Zeichnen eines reduzierten Baumdiagramms I
60. Zeichnen eines reduzierten Baumdiagramms II
61. Anwenden des reduzierten Baumdiagramms und der Gegenwahrscheinlichkeit in einer Realsituation

Aufschreiben von Ergebnissen mehrstufiger Zufallsvorgänge I — 1

Das nebenstehende Glücksrad wird zweimal gedreht.
Ein mögliches Ergebnis ist:
„Zuerst erscheint BLAU, danach ROT.“

Man schreibt (B; R).



- Schreibe alle möglichen Ergebnisse des Zufallsexperiments „Zweimal das Glücksrad drehen“ auf.

____

____

Bild 1: „Glücksrad 1“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

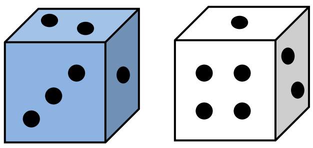
Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Wahrscheinlichkeit
Treffen von Aussagen zum Ausgang von Situationen

Aufschreiben von Ergebnissen mehrstufiger Zufallsvorgänge II — 2

Ein blauer und ein weißer Würfel werden geworfen.
Beim Aufschreiben des Ergebnisses notieren wir die Augenzahl des blauen Würfels zuerst.
Beim abgebildeten Würfelpaar liegt also (2;1).



Alle möglichen Würfelpaare sollen in einer Tabelle eingetragen werden.

- Vervollständige die Tabelle, indem du alle möglichen Würfelpaare einträgst.

	1	2	3	4	5	6
1	(1;1)	(1;2)				
2	(2;1)					
3						
4						
5						
6						

  Wie viele Möglichkeiten von Würfelpaaren gibt es insgesamt?

  ____

- Notiere alle Würfelpaare, die zu dem Ereignis

  „Beide Würfel zeigen dieselbe Augenzahl“ gehören.

  ____

- Notiere alle Würfelpaare, die zu dem Ereignis
  „Es wurde genau eine Fünf gewürfelt“ gehören.

  ____

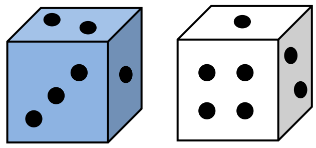
Bild 2: „Zwei Würfel“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Wahrscheinlichkeit
Treffen von Aussagen zum Ausgang von Situationen

Beschreiben eines Ereignisses eines mehrstufigen Zufallsvorganges — 3

Ein blauer und ein weißer Würfel werden geworfen.
Addiert man diese Augenzahlen so erhält man die *Augensumme*.
Das abgebildete Beispiel zeigt „Augensumme 3“.



- Kennzeichne in der Tabelle alle Ergebnisse, die zur „Augensumme 5“ gehören und schreibe sie auf.
  (1;4) ; ________________________________
- Kennzeichne in der Tabelle alle Ergebnisse, die zur „Augensumme 7“ gehören und schreibe sie auf.
  ____
- Kennzeichne in der Tabelle alle Ergebnisse, die zur „Augensumme 1“ gehören und schreibe sie auf.
  ____
- Welche Augensumme kommt am häufigsten vor? ________

	1	2	3	4	5	6
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)
5	(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)
6	(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

Bild 3: „Zwei Würfel“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Wahrscheinlichkeit
Subjektive Wahrscheinlichkeit

Nutzen der Begriffe „wahrscheinlich“ und „unwahrscheinlich“ aufgrund von Erfahrungen — 4

Ordne die folgenden Situationen passend auf der Skala ein.

Was meinst du, wie wahrscheinlich es ist, dass ...

- es in Berlin im Sommer schneit?
- du länger als 30 Minuten die Luft anhalten kannst?
- in der Sportstunde Fußball gespielt wird?
- du zum Geburtstag ein Geschenk bekommst?
- du beim Würfeln eine „6“ würfelst?
- in der Mathestunde Hausaufgaben aufgegeben werden?
- du beim Werfen einer Münze „Zahl“ wirfst?
- morgen ein neuer Tag beginnt?

50/50

unmöglich ———————————————— sicher

eher unwahrscheinlich | eher wahrscheinlich

Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Wahrscheinlichkeit
Subjektive Wahrscheinlichkeit

Nutzen des subjektives Empfindens für die Einschätzung von Wahrscheinlichkeiten | 5

- Wie würdest du die folgenden Fragen beantworten? Trage deine Kreuze in die Tabelle ein.

Wie wahrscheinlich ist es, dass ...	unmöglich	eher un-wahrscheinlich	eher wahrscheinlich	sicher
es morgen bei dir Brötchen zum Frühstück gibt?				
du beim Spiel „Mensch-ärgere-dich-nicht“ gewinnst?				
abends bei dir zu Hause das Telefon klingelt?				

- Vergleiche nun die beiden Antworten von Hans und Ina.

Hans

Wie wahrscheinlich ist es, dass ...	unmöglich	eher un-wahrscheinlich	eher wahrscheinlich	sicher
es morgen bei dir Brötchen zum Frühstück gibt?		x		
du beim Spiel „Mensch-ärgere-dich-nicht“ gewinnst?			x	
abends bei dir zu Hause das Telefon klingelt?			x	

Ina

Wie wahrscheinlich ist es, dass ...	unmöglich	eher un-wahrscheinlich	eher wahrscheinlich	sicher
es morgen bei dir Brötchen zum Frühstück gibt?				x
du beim Spiel „Mensch-ärgere-dich-nicht“ gewinnst?		x		
abends bei dir zu Hause das Telefon klingelt?	x			

- Erkläre, wie es zu den unterschiedlichen Antworten von Hans und Ina kommen kann.
- Erkläre, warum beide Antworten richtig sein können.

Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Wahrscheinlichkeit
Statistische Wahrscheinlichkeit

Nutzen wechselnder Darstellungsformen für Anteile I | 6

Pia und Peter werfen 10-mal eine Münze und erhalten folgende Ergebnisse:

Zahl	Wappen
4	6

Pia sagt: „Der Anteil für Zahl beträgt $\frac{4}{10}$.“

- Erkläre.

Der Anteil heißt auch „**relative Häufigkeit**“.
Peter sagt: „Die relative Häufigkeit von „Zahl“ ist auch $\frac{2}{5}$ oder 0,4.“

- Erkläre.
- Was ist die relative Häufigkeit für Wappen?

Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Wahrscheinlichkeit
Statistische Wahrscheinlichkeit

Nutzen wechselnder Darstellungsformen für Anteile II — 7

Ordne den Versuchsergebnissen die passende relative Häufigkeit für Zahl zu.

Zahl	Wappen
14	6

Zahl	Wappen
10	8

Zahl	Wappen
13	13

Zahl	Wappen
30	70

$\frac{1}{2}$

$\frac{14}{20}$

0,3

$\frac{5}{9}$

50 %

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Wahrscheinlichkeit
Statistische Wahrscheinlichkeit

Nutzen wechselnder Darstellungsformen für Anteile III — 8

Ergänze die Tabelle wie im Beispiel.

	relative Häufigkeit von „Zahl“			
Versuchsergebnis	ungekürzt	gekürzt	als Dezimalzahl	als Prozentzahl
Zahl: 8; Wappen: 12	$\frac{8}{20}$	$\frac{2}{5}$	0,4	40%
Zahl: ; Wappen:	$\frac{10}{18}$			
Zahl: ; Wappen: 25		$\frac{1}{2}$		
Zahl: 55; Wappen:			0,55	

Bestimmen der absoluten und relativen Häufigkeit

9

Material: ein 6er-Würfel

Würfle 50-mal und lege eine Strichliste an. Ermittle dann die absolute und relative Häufigkeit.

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Strichliste						
absolute Häufigkeit						
relative Häufigkeit						
relative Häufigkeit in Prozent						

Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Wahrscheinlichkeit
Statistische Wahrscheinlichkeit

Vergleichen der absoluten und relativen Häufigkeit

10

Peter hat 100-mal gewürfelt und eine Tabelle für seine Ergebnisse angelegt.

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
absolute Häufigkeit	17	16	16	18	16	17
relative Häufigkeit	0,17	0,16	0,16	0,18	0,16	0,17

Die Klasse 7c hat zusammen 1000-mal gewürfelt und ihre Ergebnisse in einer Tabelle notiert.

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
absolute Häufigkeit	167	168	164	166	164	171
relative Häufigkeit	0,17	0,17	0,16	0,17	0,16	0,17

- Vergleiche in beiden Tabellen die absoluten und relativen Häufigkeiten miteinander. Was stellst du fest?

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Schlussfolgern von der relativen Häufigkeit auf die Wahrscheinlichkeit I

11

In der Klasse 7b wird eine Münze geworfen. Dabei ist die folgende Tabelle entstanden:

Anzahl der Würfe	1	10	100	200	300	400
absolute Häufigkeit von „Wappen“	0	7	41	104	148	201
relative Häufigkeit von „Wappen“	0	0,7	0,41	0,52	0,493	0,503

Maike behauptet: „Die Wahrscheinlichkeit, Wappen zu werfen, ist 50/50, also 0,5.
Das kann ich auch aus der Tabelle ablesen.“

Erik antwortet: „Die Wahrscheinlichkeit, Wappen zu werfen, kann auch 0,7 sein.“

- Wer hat Recht? Erkläre die Aussagen von Maike und Erik.

Schlussfolgern von der relativen Häufigkeit auf die Wahrscheinlichkeit II

12

Auf dem Rummel werden Lose verkauft.
Jeden Abend werden die Anzahlen der verkauften Lose und der ausgegebenen Gewinne notiert.

Im Verlauf der Woche ist die folgende Tabelle entstanden:

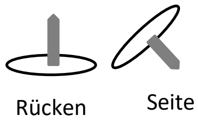
	nach 1 Tag	nach 2 Tagen	nach 3 Tagen	nach 4 Tagen	nach 5 Tagen	nach 6 Tagen	nach 7 Tagen
Summe der verkauften Lose	978	2131	3 662	4 609	5 877	7 427	9 872
Gesamtanzahl der Gewinne	103	554	585	1060	1087	1522	1945
relative Häufigkeit							

- Berechne für jeden Tag die relative Häufigkeit der Gewinne.
- Welche Gewinnwahrscheinlichkeit vermutest du?
  Begründe deine Antwort.

Schlussfolgern von der relativen Häufigkeit auf die Wahrscheinlichkeit III

Material: Reißzwecken

Mache nun selbst den folgenden Versuch, um die Wahrscheinlichkeit, dass eine Reißzwecke auf der Seite landet, vermuten zu können.



1. Wirf zuerst die Reißzwecke 10-mal und gib eine Vermutung an:
   Es ist wahrscheinlicher, dass die Reißzwecke auf _______________ landet.
   der Seite / dem Rücken
2. Wirf nun 20 Reißzwecken gleichzeitig und notiere in einer Tabelle die Anzahl für „Seite“ nach 2-mal, 5-mal und 10-mal Werfen.
3. Berechne die relativen Häufigkeiten für „Seite“.
4. Welche Wahrscheinlichkeit für „die Reißzwecke landet auf der Seite“ vermutest du?

	2-mal	5-mal	10-mal
Anzahl „Seite“			
relative Häufigkeit für „Seite“			

Bild 4: „Reißzwecken“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

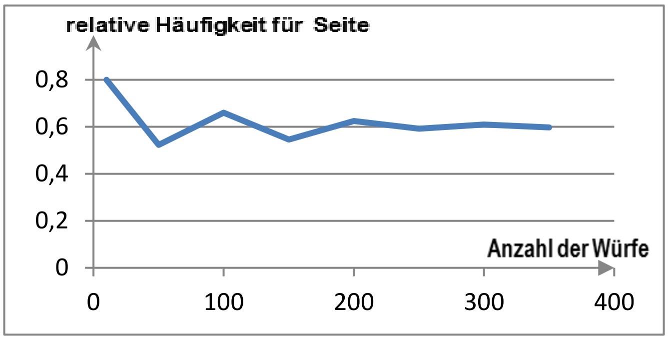
Veranschaulichen der relativen Häufigkeiten im Diagramm I

Ingrid möchte die Wahrscheinlichkeit, dass eine Reißzwecke auf der Seite landet, genau bestimmen.
Dafür wirft sie sehr oft eine Reißzwecke und notiert ihre Ergebnisse in einer Tabelle.

Anzahl der Würfe	10	50	100	150	200	250	300	350
Anzahl von „Seite“	8	26	66	82	125	148	181	209
relative Häufigkeit für „Seite“	0,8	0,523	0,66	0,546	0,625	0,592	0,603	0,597

Die Werte der Tabelle stellt sie im Diagramm dar.

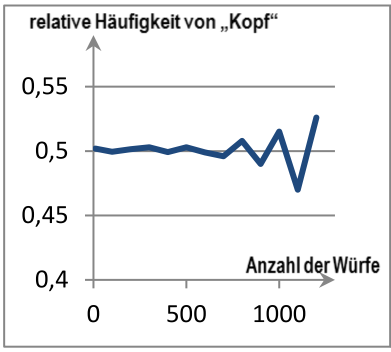
- Welche Wahrscheinlichkeit wird Ingrid für „die Reißzwecke landet auf der Seite“ angeben?
- Begründe.

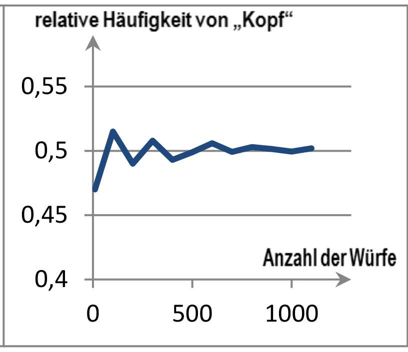


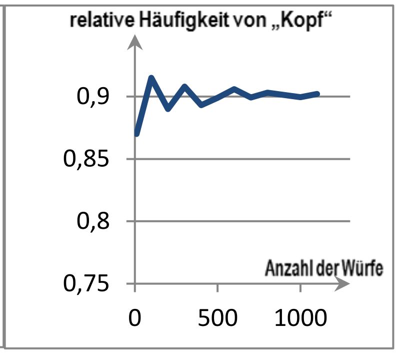
Veranschaulichen der relativen Häufigkeiten im Diagramm II

Mit einem Computer werden Münzwürfe simuliert.
Die relativen Häufigkeiten für „Kopf" werden in einem Diagramm dargestellt.

- Welches Diagramm stellt den Münzwurf richtig dar?
- Begründe deine Entscheidung.







Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Wahrscheinlichkeit
Statistische Wahrscheinlichkeit

Unterscheiden von Wahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit

Peter sagt: „Ich weiß, die Wahrscheinlichkeit, Wappen zu werfen, beträgt $\frac{1}{2}$."
Er wirft 20-mal eine Münze und notiert seine Ergebnisse in einer Strichliste.

Zahl	Wappen
~~||||~~ ~~||||~~ |||	~~||||~~ ||


Zahl


Wappen

Peter stellt fest: „Die relative Häufigkeit für Wappen ist $\frac{7}{20}$ und nicht $\frac{1}{2}$."

- Erkläre, wie das sein kann.

Bild 5: „20-Centmünze - Vorderseite", LISUM, CC-BY-SA 4.0
Bild 6: „20-Centmünze - Rückseite", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Abschätzen der absoluten Häufigkeit aufgrund der Wahrscheinlichkeit I

17

Lara hat beim Werfen einer Münze 349-mal Wappen geworfen.

Zahl Wappen

- Wie oft hat Lara vermutlich geworfen?
- Begründe.

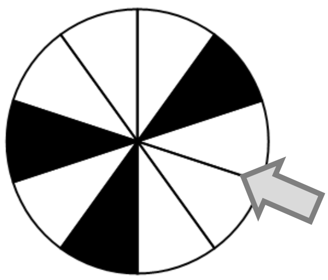
Bild 7: „20-Centmünze - Vorderseite", LISUM, CC-BY-SA 4.0
Bild 8: „20-Centmünze - Rückseite", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall
Sekundarstufe I
Idee der Wahrscheinlichkeit
Statistische Wahrscheinlichkeit

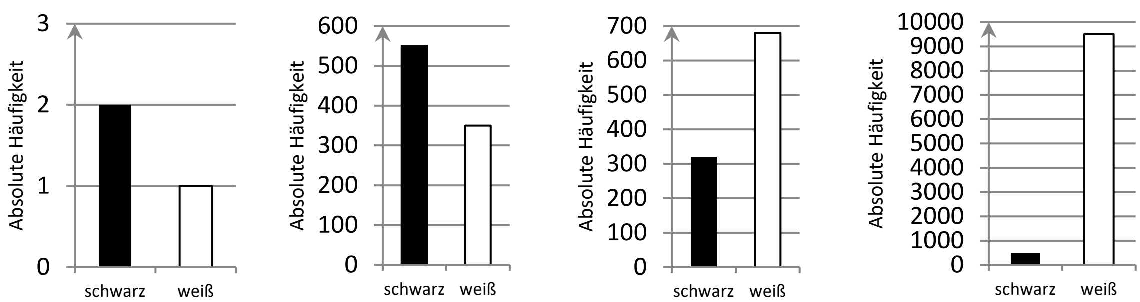
Abschätzen der absoluten Häufigkeit aufgrund der Wahrscheinlichkeit II

18

Das Glücksrad mit 7 weißen Feldern und 3 schwarzen Feldern wird mehrmals gedreht.



- Welche der folgenden Darstellungen passen zu diesem Glücksrad?

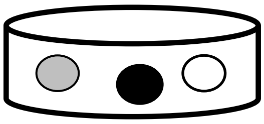


Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Bild 9: „Glücksrad 2", LISUM, CC-BY-SA 4.0

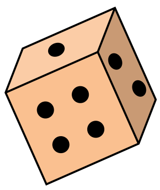
Angeben der Ergebnismenge

Es soll die Menge aller möglichen Ergebnisse (**Ergebnismenge**) angegeben werden.



Klaus sagt:
„Wenn ich eine Kugel ziehe, kann diese grau, schwarz oder weiß sein.
Also ist meine Ergebnismenge {grau, schwarz, weiß}."

• Gib für einen Spielwürfel die Ergebnismenge an.



Tipp
*Die Ergebnis**menge** schreibt man mit einer **Mengen**klammer: { }.*

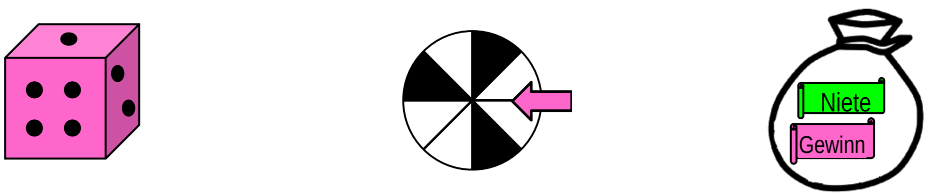
Bild 10: „Kugeln 1", LISUM, CC-BY-SA 4.0
Bild 11: „Würfel 1", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Zuordnen von Ergebnismengen

Tim sagt:

„Die **Ergebnismenge** beim Werfen einer Münze ist {Wappen; Zahl}."

• Ordne den folgenden Zufallsgeräten die richtigen Ergebnismengen zu.



{schwarz; weiß} {1; 2; 3; 4; 5; 6} {Niete; Gewinn} {weiß; schwarz}

{2; 4; 6} {3; 2; 6; 4; 1; 5} {rot; blau}

Bild 12: „Drei Zufallsgeräte I", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall Sekundarstufe I	Idee der Wahrscheinlichkeit Mathematische Wahrscheinlichkeit
Angeben der Ergebnismenge eines zweistufigen Zufallsversuchs I	21

Bernd wirft eine Euro-Münze und eine 20-Cent-Münze gleichzeitig und notiert sein Ergebnis in Kurzform: WZ. (Er meint: Wappen – Zahl.)

Bernd wirft ein zweites Mal, diesmal notiert er in Kurzform: ZW.
(Er meint: Zahl –Wappen.)

Bernd wirft weiter und erhält zwei gleiche Bilder.
• Nenne beide Möglichkeiten für zwei gleiche Bilder.

_______ _______

• Ergänze die Ergebnismenge, sodass sie vollständig ist:

Ergebnismenge = {WZ; ______; _____; _______}

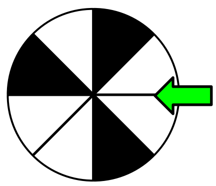
Bild 13: „Euromünze - Vorderseite“, LISUM, CC-BY-SA 4.0 *Bild 14: „Euromünze - Rückseite“, LISUM, CC-BY-SA 4.0*
Bild 15: „20-Centmünze - Vorderseite“, LISUM, CC-BY-SA 4.0 *Bild 16: „20-Centmünze - Rückseite“, LISUM, CC-BY-SA 4.0*

Daten & Zufall Sekundarstufe I	Idee der Wahrscheinlichkeit Mathematische Wahrscheinlichkeit
Angeben der Ergebnismenge eines zweistufigen Zufallsversuchs II	22

1. Ein Glücksrad wird zweimal gedreht.

   • Schreibe die Ergebnismenge auf.

   E = { ____________________________



s (= schwarz)
w (= weiß)
g (= grau)

2. Zwei Kugeln werden ohne Zurücklegen gezogen.

   • Schreibe die Ergebnismenge auf.

   ____

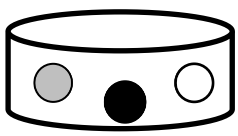


Bild 17: „Zwei Zufallsgeräte“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Zuordnen von Ereignissen und der Menge ihrer günstigen Ergebnisse | 23

Die Ergebnisse, die zu einem Ereignis gehören, heißen **günstige Ergebnisse**.

● Ordne den Ereignissen die zutreffende Menge an günstigen Ergebnissen (**Ereignismenge**) zu.

„eine gerade Zahl würfeln“

„die Augenzahl ist größer als 2“

„die Augenzahl ist größer als 6“

„die Augenzahl ist kleiner als 9“

{1; 2; 3; 4; 5; 6}

{1; 3; 5}

{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8}

{2; 4; 6}

{3; 4; 5; 6}

{ }

Angeben der Menge der günstigen Ergebnisse | 24

Ergänze die Tabelle.

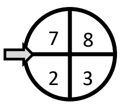
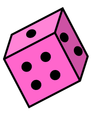
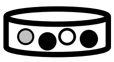
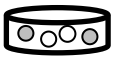
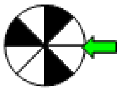
Zufallsexperiment	Ereignis	Ereignismenge
Ich drehe das Glücksrad einmal. 	Ich erhalte eine ungerade Zahl.	
Ich würfle mit einem Würfel. 	Die Augenzahl ist kleiner als 4.	
Ich ziehe zweimal eine Kugel und lege sie jedes Mal wieder zurück. 	Ich ziehe zweimal dieselbe Farbe.	

Bild 18: „Drei Zufallsgeräte II“, LISUM, CC-BY- SA 4.0

Anwenden von „mindestens“ und „höchstens“ 25

Ergänze die Tabelle.

Zufallsexperiment		Ereignis	Ereignismenge
Ich werfe zweimal eine Münze.		Ich erhalte **mindestens** einmal Wappen (W).	{WZ; ………
Ich ziehe dreimal eine Kugel und lege sie jedes Mal wieder zurück.		Ich erhalte **mindestens** zweimal weiß (w).	{wwg; …….
Ich drehe dreimal das Glücksrad.		Ich erhalte **höchstens** einmal schwarz (s).	

„mindestens einmal W“
bedeutet
einmal W oder mehr
„höchstens einmal W“
bedeutet
einmal W oder weniger

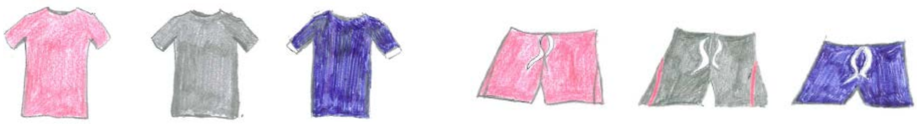
Bild 19: „Drei Zufallsgeräte III“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Wahrscheinlichkeit
Mathematische Wahrscheinlichkeit

Angeben der Ergebnisse eines Gegenereignisses I 26

Tim besitzt rote, graue und blaue T-Shirts sowie rote, graue und blaue Hosen.



r (= rot)
s (= schwarz)
b (= blau)

Meist greift er ohne hinzusehen in den Schrank und nimmt irgendein T-Shirt und irgendeine Hose.

Eines Tages tritt folgendes **Ereignis** ein: „Er ist einfarbig gekleidet.“

Das **Gegenereignis** dazu heißt: „Er ist **nicht** einfarbig gekleidet.“

In der Tabelle sind alle möglichen Farbkombinationen dargestellt.

Shirt / Hose			
	(r;r)	(r;g)	(r;b)
	(g;r)	(g;g)	(g;b)
	(b;r)	(b;g)	(b;b)

- Markiere alle Ergebnisse rot, die zu dem Ereignis „einfarbig gekleidet“ gehören.
- Markiere alle Ergebnisse blau, die zu dem Gegenereignis „nicht einfarbig gekleidet“ gehören.
- Schreibe alle Ergebnisse des Gegenereignisses auf: { (r,g), …

Bild 20: „Hosen und Shirts “, LISUM, CC-BY- SA 4.0 *Bild 21: „Hosen“, LISUM, CC-BY-SA 4.0*
Bild 22: „Shirts“, LISUM, CC-BY- SA 4.0

Angeben der Ergebnisse eines Gegenereignisses II

Tim besitzt rote, graue und blaue T-Shirts sowie rote, graue und blaue Hosen.

Meist greift er ohne hinzusehen in den Schrank und nimmt irgendein T-Shirt und irgendeine Hose.

- Gib alle zu den folgenden Ereignissen gehörenden Ergebnisse an:

  A: „Er greift mindestens ein graues Kleidungsstück."

  ____

  B: „Er greift kein graues Kleidungsstück."

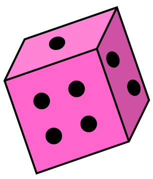
  ____

- Begründe, dass B das Gegenereignis zu A ist.

Bild 23: „Hosen und Shirts ", LISUM, CC-BY- SA 4.0

Angeben der Vereinigungsmenge („oder") I

Ein Würfel wird geworfen.



Durch das Wort „**oder**" werden zwei Mengen miteinander verbunden und zu einer Menge zusammengefasst.

- Gib die Mengen der günstigen Ergebnisse an:

E_1: Die Zahl ist kleiner als 3. E_1 =

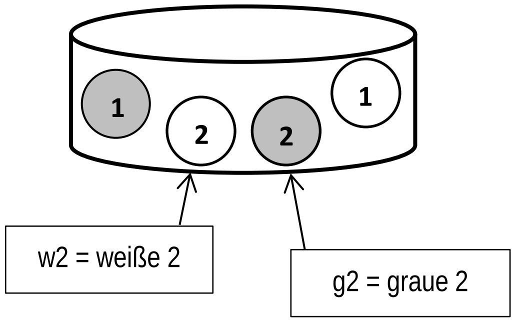
E_2: Die Zahl ist größer als 5.

E_3: Die Zahl ist kleiner als 3 **oder** größer als 5.

Bild 24: „Würfel 2", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Angeben der Vereinigungsmenge II

Aus dem Gefäß wird eine Kugel gezogen.



- Gib die Menge der günstigen Ergebnisse an.

E_1: Es wird eine graue Kugel gezogen.

E_2: Es wird eine 2 gezogen.

E_3: Es wird eine graue Kugel oder eine 2 gezogen.

Bild 25: „Kugeln mit Nummer“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Bestimmen der Mächtigkeit einer Menge

Ergänze die Tabelle.

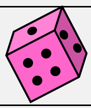
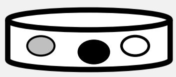
Ereignis	alle günstigen Ergebnisse	Anzahl der günstigen Ergebnisse
ungerade Zahl beim Würfeln 	{ }	3
eine graue Kugel ziehen 		
ein Ass aus diesen fünf Karten ziehen 		

Bild 26: „Zwei Zufallsgeräte“, LISUM, CC-BY-SA 4.0
Bild 27: „Spielkarten“, pixabay.com, CC0

Erkennen von Gleichwahrscheinlichkeit I

Die Geschwister Pia, Paul und Tom wollen ein Glücksrad bauen, das entscheidet, wer den Müll rausbringen muss.

- Welches der beiden Glücksräder ist gerecht? Begründe.

Glücksrad 1 | Glücksrad 2

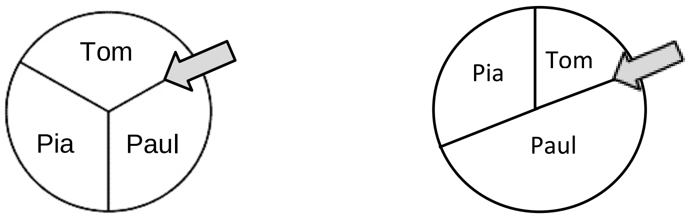


Bild 28: „Zwei Glücksräder", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall
Sekundarstufe I

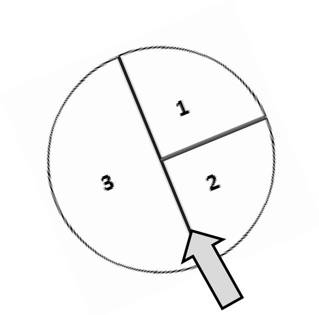
Idee der Wahrscheinlichkeit
Mathematische Wahrscheinlichkeit

Erkennen von Gleichwahrscheinlichkeit II

Welche Zahl hat die größte Wahrscheinlichkeit, gedreht zu werden?

Welche Zahl hat die kleinste Wahrscheinlichkeit, gedreht zu werden?

Für welche Zahlen ist es **gleichwahrscheinlich**, dass sie gedreht werden?



Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Bild 29: „Glücksrad 3", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Erkennen von Gleichwahrscheinlichkeit III

Bei welchen Abbildungen sind alle Zahlen (Ergebnisse) eines Glücksrades gleichwahrscheinlich? Begründe.

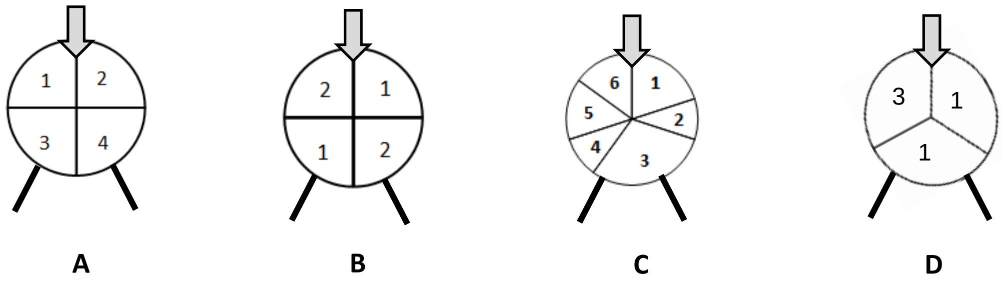


Bild 30: „Vier Glücksräder", LISUM, CC-BY-SA 4.0

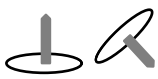
Erkennen von Gleichwahrscheinlichkeit IV

Material: Münze, Reißzwecke

Vergleiche die Ergebnisse einer Münze und einer Reißzwecke.
Wirf dafür jeweils 30-mal und notiere deine Ergebnisse in einer Strichliste.

Münze 

Wappen	Zahl

Reißzwecke 

Rücken	Seite

- Entscheide, für welchen Versuch die Ergebnisse gleichwahrscheinlich sind.
- Begründe.

Bild 31: „20-Centmünze", LISUM, CC-BY-SA 4.0
Bild 32: „Reißzwecke", LISUM, CC-BY-SA 4.0

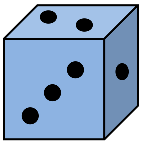
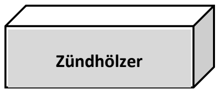
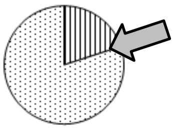
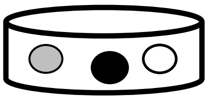
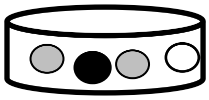
Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Wahrscheinlichkeit
Mathematische Wahrscheinlichkeit

Erkennen von Gleichwahrscheinlichkeit V

35

Bei welchem Zufallsversuch sind die Ergebnisse gleichwahrscheinlich?
Begründe deine Entscheidungen.

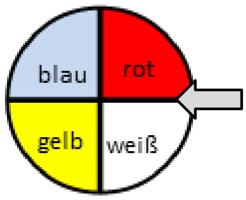
einen Würfel werfen 	die Schachtel werfen 
dieses Glücksrad drehen 	eine Münze werfen 
eine Kugel ziehen 	eine Kugel ziehen 

Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Wahrscheinlichkeit
Mathematische Wahrscheinlichkeit

Berechnen der Wahrscheinlichkeit

36



Anne sagt:
„Die Wahrscheinlichkeit, Rot zu drehen, ist 1 von 4, also $\frac{1}{4}$.“

Sie notiert P(rot) = $\frac{1}{4}$ und liest: „Die Wahrscheinlichkeit von Rot ist $\frac{1}{4}$.“

P(rot) heißt
„Wahrscheinlichkeit
von Rot“.

- Erkläre, was die 1 und was die 4 ihres Ergebnisses angeben.
- Verwende die Begriffe „günstige Ergebnisse“ und „mögliche Ergebnisse“.

Beachten der Gleichwahrscheinlichkeit bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeit | 37

Erkläre, warum bei diesem Glücksrad **nicht** gilt: P(rot) = $\frac{1}{4}$.

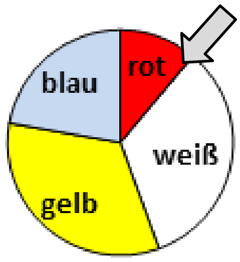


Bild 40: „Glücksrad 6", LISUM, CC-BY-SA 4.0

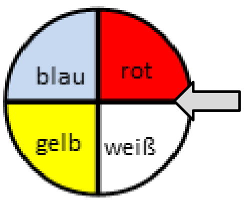
Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Wahrscheinlichkeit
Mathematische Wahrscheinlichkeit

Addieren von Wahrscheinlichkeiten I | 38

Gib für das Glücksrad die folgenden Wahrscheinlichkeiten an.



P(rot) = ——

P(blau) = ——

P(rot oder blau) = ——

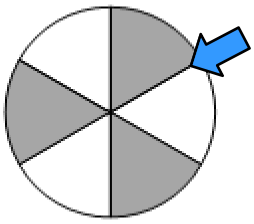
Welches Rechenzeichen muss eingefügt werden, damit die folgende Gleichung stimmt?

P(rot oder blau) = P(rot) ☐ P(blau)

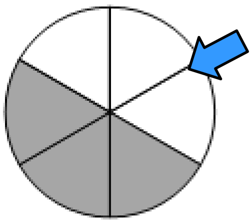
Bild 41: „Glücksrad 5", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Addieren von Wahrscheinlichkeiten II

Gib die Wahrscheinlichkeit für Grau an.



P(grau) =



P(grau) =

Färbe das Glücksrad so, dass gilt: P(rot) = $\frac{1}{3}$

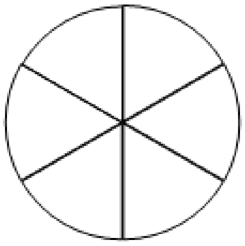
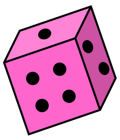


Bild 42: „Zwei Glücksräder 2", LISUM, CC-BY-SA 4.0
Bild 43: „Glücksrad 7", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Addieren von Wahrscheinlichkeiten III

Berechne die folgenden Wahrscheinlichkeiten.



P(eine gerade Zahl würfeln) = P(2) + P(4) + P(6) = ___ + ___ + ___ = ___

P(Wappen oder Zahl werfen) = P(Wappen) + P(Zahl) =

Wie wahrscheinlich ist es, dass du etwas gewinnst?

Los	Niete	Klein-gewinn	Haupt-gewinn
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Bild 44: „Würfel 2", LISUM, CC-BY-SA 4.0
Bild 45: „20-Centmünze", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Nutzen der Formel von Laplace I

Der Mathematiker Pierre-Simon Laplace berechnete die Wahrscheinlichkeit P als Anteil der Gewinnmöglichkeiten.

Er rechnete so: $P(\text{Ereignis E}) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$

- Vervollständige die Tabelle.

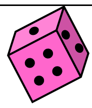
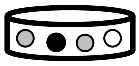
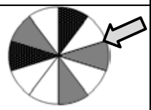
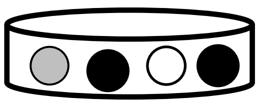
Du gewinnst, wenn du …	Anzahl der günstigen Ergebnisse	Anzahl der möglichen Ergebnisse	Wahrscheinlichkeit
E_1: eine ungerade Zahl würfelst. 			$P(E_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
E_2: eine graue Kugel ziehst. 			
E_3: weiß drehst. 			

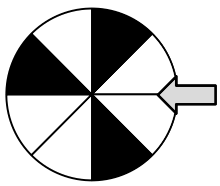
Bild 46: „Drei Zufallsgeräte IV“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Nutzen der Formel von Laplace II

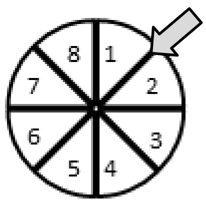
Ordne den Zufallsexperimenten die richtige Wahrscheinlichkeit zu.



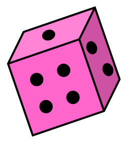
P(eine schwarze Kugel ziehen)



P(weiß drehen)



P(eine Zahl kleiner als 7 drehen)



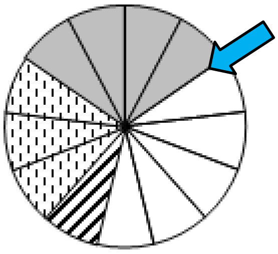
P(eine 2 oder 5 werfen)

$\frac{6}{8}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{1}{4}$

Bild 47: „Vier Zufallsgeräte“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Nutzen der Formel von Laplace III

Gib für das Glücksrad die folgenden Wahrscheinlichkeiten an.



P(grau) = ——

P(weiß) = ——

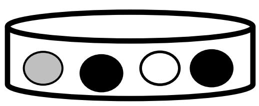
P(grau oder weiß) = ——

Welches Rechenzeichen muss eingefügt werden, damit die folgende Gleichung stimmt?

P(grau oder weiß) = P(grau) $\boxed{}$ P(weiß)

Bild 48: „Glücksrad 8“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Kennen der Wahrscheinlichkeiten des sicheren und unmöglichen Ereignisses



Eine Kugel wird gezogen.

Willi sagt: „Es ist **sicher**, dass ich eine graue, weiße oder schwarze Kugel ziehe.
Also ist die Wahrscheinlichkeit **P(grau oder weiß oder schwarz)** = 1.“

- Zeige durch Addition der Wahrscheinlichkeiten, dass Willi recht hat.

- Die Wahrscheinlichkeit, eine rote Kugel zu ziehen, ist 0. Erkläre.

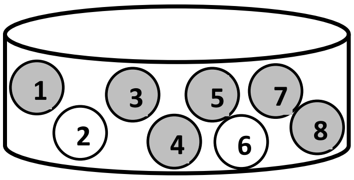
Bild 49: „Kugeln 2“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Beachten der Schnittmenge bei der Addition von Wahrscheinlichkeiten | 45

Eine Kugel wird gezogen.

Es gilt: P(grau) = $\frac{6}{8} = 0{,}75$

P(gerade Zahl) = $\frac{4}{8} = 0{,}5.$



Lisa rechnet: P(grau oder gerade Zahl) = 0,75 + 0,5 = 1,25.

Lucas sagt: „Das kann nicht sein. Die Wahrscheinlichkeit kann nicht größer als 1 sein.“

- Wo steckt der Fehler in Lisas Rechnung?

Bild 50: „Kugeln mit Nummer 2“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall
Sekundarstufe I

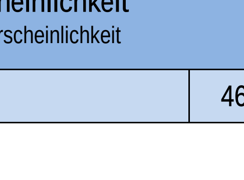
Idee der Wahrscheinlichkeit
Mathematische Wahrscheinlichkeit

Bestimmen der Wahrscheinlichkeit bei zweimaligem Ziehen | 46

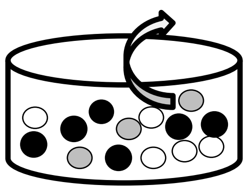
In einem Gefäß befinden sich 15 Kugeln.

Es werden nacheinander zwei Kugeln gezogen, ohne sie zurückzulegen.

1. Ziehen:
- Gib die Wahrscheinlichkeit an, eine graue Kugel zu ziehen: P(grau) = ______



2. Ziehen:
- Gib die Wahrscheinlichkeit an, jetzt eine graue Kugel zu ziehen: P(grau) = ____



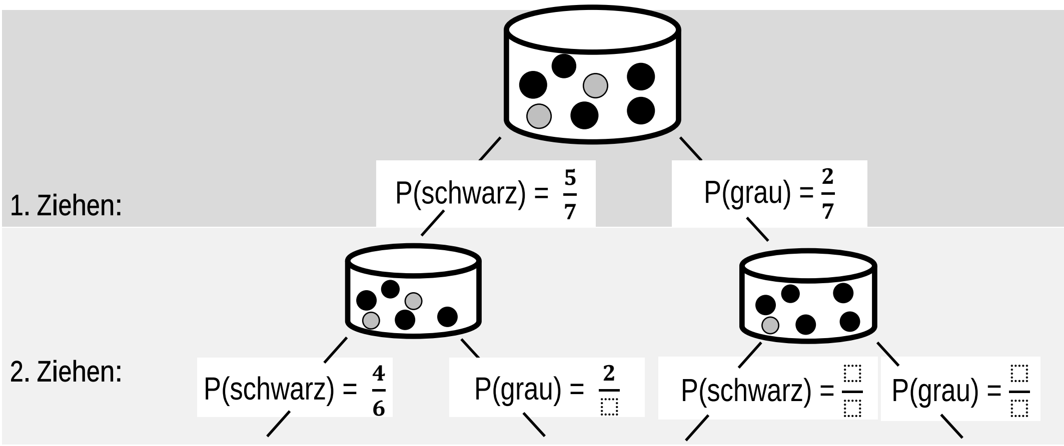
- Warum erhältst du zwei verschiedene Ergebnisse für P(grau)?

Bild 51: „Kugeln entnehmen“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Ermitteln der Wahrscheinlichkeit beim Ziehen ohne Zurücklegen

In einem Gefäß befinden sich 7 Kugeln. Es kann eine graue oder eine schwarze Kugel gezogen werden.

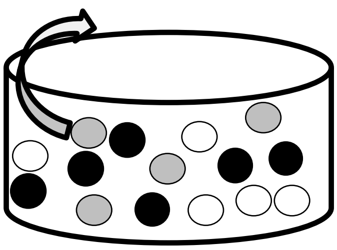


• Ergänze die fehlenden Wahrscheinlichkeiten.

Bild 52: „Baumdiagramm 1“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Ergänzen eines vollständigen Baumdiagramms (einstufig)

Es soll eine Kugel aus dem Gefäß gezogen werden.



Pia beginnt, ein **Baumdiagramm** für das Zufallsexperiment anzufertigen.

Sie hat bereits die Wahrscheinlichkeit P(weiß) = $\frac{5}{15}$ an den passenden **Pfad** geschrieben.

• Ergänze das Baumdiagramm.

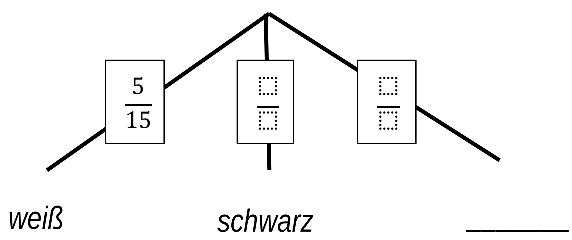


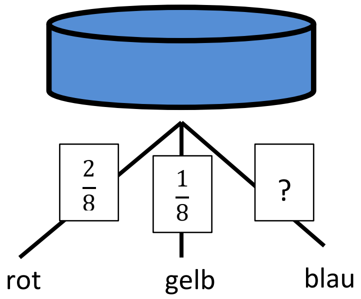
Bild 53: „Kugeln entnehmen 2“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Berechnen der Pfadwahrscheinlichkeiten

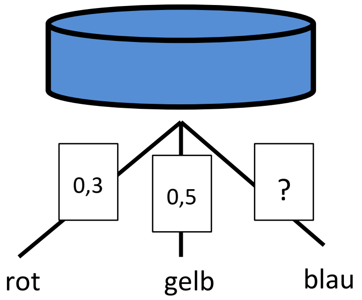
In einem Gefäß sind rote, gelbe und blaue Kugeln.
Eine Kugel wird gezogen.

- Ergänze die beiden Baumdiagramme.

Gefäß 1



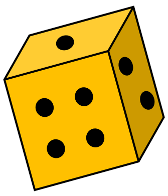
Gefäß 2



Zeichnen eines vollständigen Baumdiagramms (einstufig)

Entwirf für die folgenden Zufallsexperimente ein passendes Baumdiagramm und trage die Wahrscheinlichkeiten ein.

einmal würfeln



einmal drehen

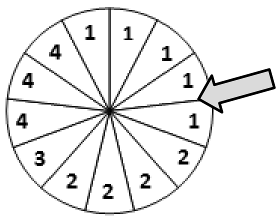


Bild 54: „Zwei Zufallsgeräte 2", LISUM, CC-BY-SA 4.0

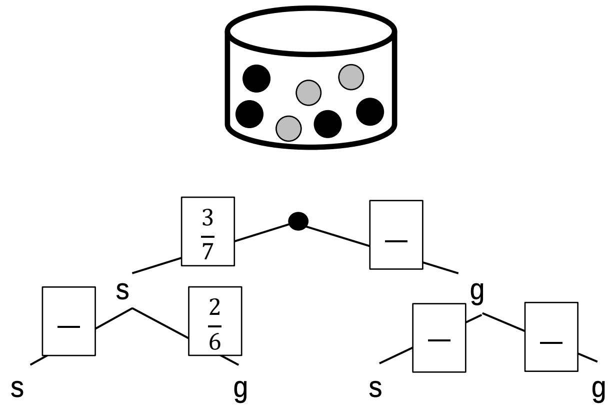
Ergänzen eines zweistufigen Baumdiagramms

Aus einem Gefäß mit 4 schwarzen und 3 grauen Kugeln wird **zweimal hintereinander** ohne Zurücklegen eine Kugel gezogen.

• Ergänze die Wahrscheinlichkeiten.

1. Ziehen

2. Ziehen



g (= grau)
s (= schwarz)

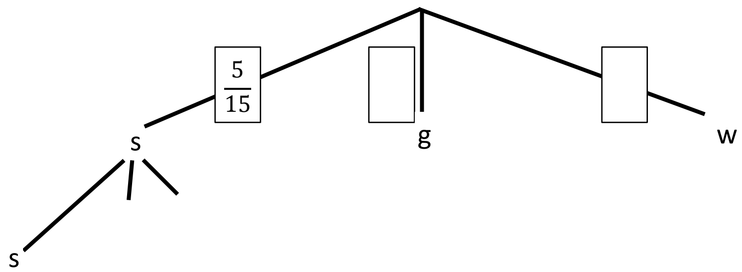
Zeichnen eines vollständigen Baumdiagramms (zweistufig)

Aus einem Gefäß mit 6 schwarzen (s), 5 weißen (w) und 4 grauen (g) Kugeln wird zweimal hintereinander ohne Zurücklegen eine Kugel gezogen.

• Ergänze zu einem vollständig beschrifteten Baumdiagramm.

1. Ziehen

2. Ziehen

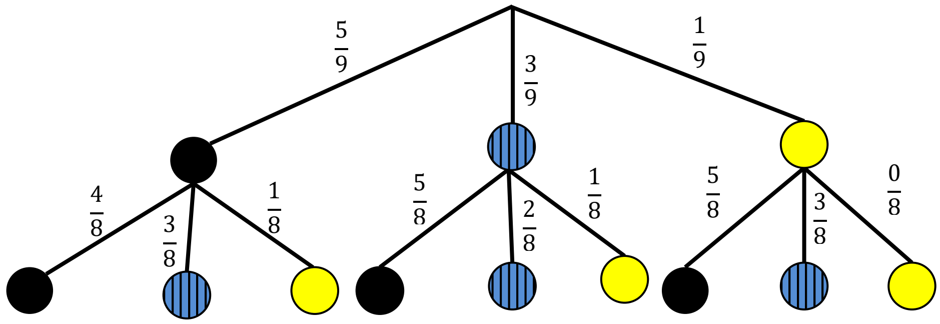


Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Wahrscheinlichkeit
Mathematische Wahrscheinlichkeit

Herleiten der Ausgangssituation eines Experimentes aus einem Baumdiagramm | 53

Aus einem Gefäß werden nacheinander ohne Zurücklegen zwei Kugeln gezogen.
Das passende Baumdiagramm sieht wie folgt aus:



- Wie ist das Gefäß zu Beginn gefüllt, damit es zu dem Baumdiagramm passt? Zeichne die Kugeln in das Gefäß ein.

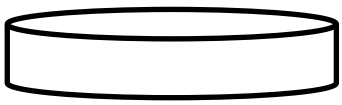


Bild 56: „Baumdiagramm 2", LISUM, CC-BY-SA 4.0

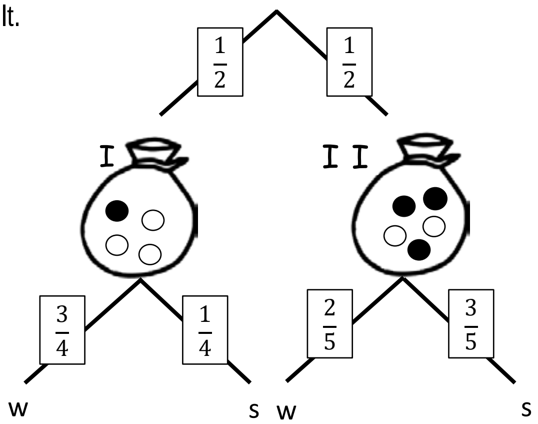
Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Wahrscheinlichkeit
Mathematische Wahrscheinlichkeit

Nutzen der Pfadregel (Produktregel) | 54

Von zwei Säckchen wird zufällig ein Säckchen ausgewählt.
Aus diesem Säckchen wird eine Kugel gezogen.

Pia zeichnet ein passendes Baumdiagramm.



Pia sagt: „Wenn man Säckchen **I** hat, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen $\frac{3}{4}$.

Zuvor habe ich aber nur mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ das Säckchen **I** gewählt.

Also ist die Wahrscheinlichkeit,

eine weiße Kugel aus Säckchen **I** zu ziehen, nur die Hälfte von $\frac{3}{4}$, also $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$."

- Berechne nun, wie wahrscheinlich es ist, aus dem Säckchen **II** eine weiße Kugel zu ziehen.

Bild 57: „Zwei Säckchen 1", LISUM, CC-BY-SA 4.0

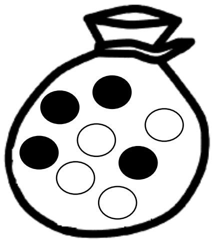
Daten & Zufall
Sekundarstufe I

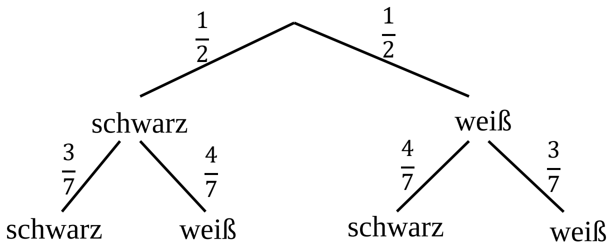
Idee der Wahrscheinlichkeit
Mathematische Wahrscheinlichkeit

Rechnen mit der Pfadregel (Produktregel) I | 55

Aus einem Säckchen wird zweimal hintereinander eine Kugel gezogen, ohne diese wieder zurückzulegen.

Klaus zeichnet das passende Baumdiagramm dazu:





- Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass …

  … Klaus zweimal schwarz zieht: P(ss) =
  … Klaus zweimal weiß zieht:
  … Klaus zweimal schwarz **oder** zweimal weiß zieht:

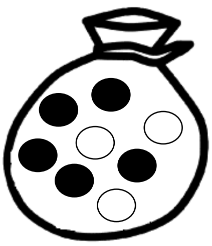
Bild 58: „Ein Säckchen 1", LISUM, CC-BY-SA 4.0

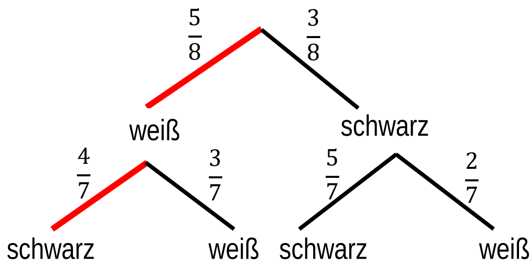
Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Wahrscheinlichkeit
Mathematische Wahrscheinlichkeit

Rechnen mit der Pfadregel (Produktregel) II | 56

Aus einem Säckchen wird zweimal hintereinander eine Kugel gezogen, ohne diese wieder zurückzulegen.
Klaus zeichnet das passende Baumdiagramm dazu:





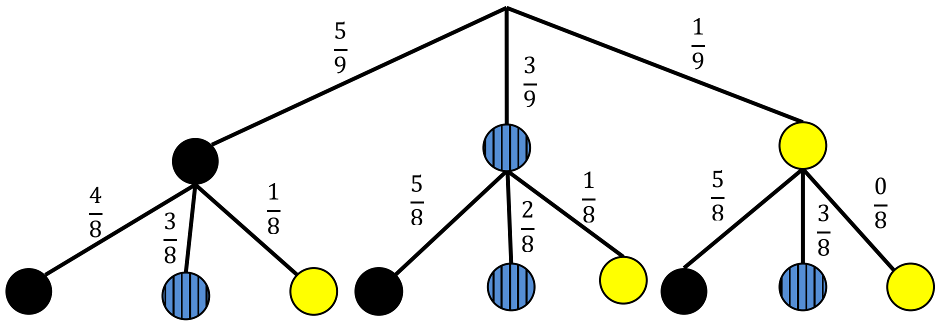
Klaus berechnet für die Wahrscheinlichkeit, zweimal schwarz zu ziehen: P(ss) = $\frac{5}{8} + \frac{4}{7} = \frac{63}{56}$.

- Erkläre, was an der Rechnung von Klaus falsch ist.

Bild 59: „Ein Säckchen 2", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Nutzen der Gegenwahrscheinlichkeit I

Birgit zieht aus einem Gefäß zwei Kugeln hintereinander, ohne sie zurückzulegen.
Ihr Baumdiagramm dazu sieht so aus:



Ina rechnet: P(nicht zweimal schwarz) = $\frac{5}{9}\cdot\frac{3}{8}+\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{8}+\frac{3}{9}\cdot\frac{5}{8}+\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}+\frac{3}{9}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\cdot\frac{5}{8}+\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{9}\cdot\frac{0}{8}=\frac{13}{18}$

Klaus rechnet: P(nicht zweimal schwarz) = $1-\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}=\frac{13}{18}$

- Erkläre beide Rechnungen.

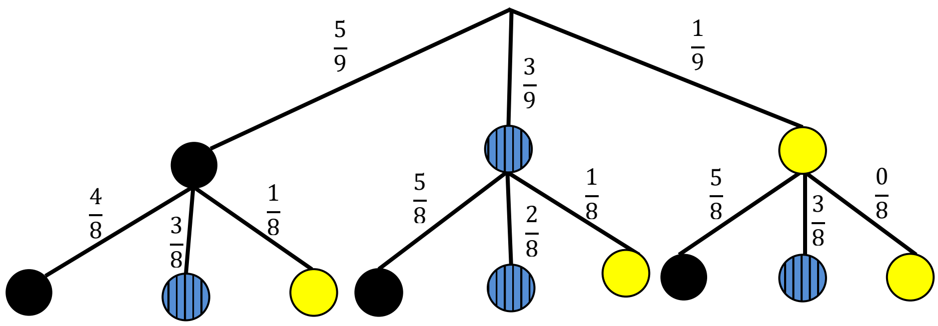
Bild 60: „Baumdiagramm 2“, LISUM, CC-BY SA 4.0

Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Wahrscheinlichkeit
Mathematische Wahrscheinlichkeit

Nutzen der Gegenwahrscheinlichkeit II

Birgit zieht aus einem Gefäß zwei Kugeln hintereinander, ohne sie zurückzulegen.
Ihr Baumdiagramm dazu sieht so aus:



- Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie **nicht** zwei gleichfarbige Kugeln zieht.

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Bild 61: „Baumdiagramm 2“, LISUM, CC-BY SA 4.0

Daten & Zufall
Sekundarstufe I

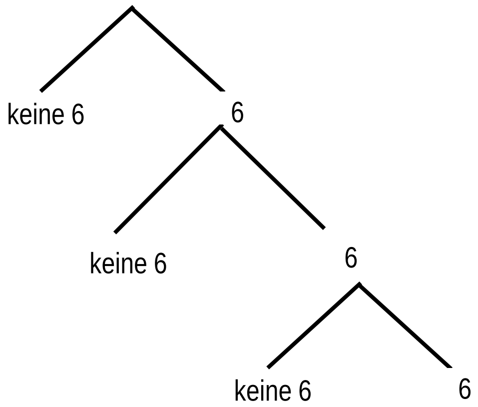
Idee der Wahrscheinlichkeit
Mathematische Wahrscheinlichkeit

Zeichnen eines reduzierten Baumdiagramms I

59

Isabelle behauptet: „Die Wahrscheinlichkeit, dreimal hintereinander eine „6“ zu würfeln, beträgt $\frac{1}{216}$.“

- Schreibe die Wahrscheinlichkeiten an die Pfade des **reduzierten Baumdiagramms** und zeige, dass Isabelles Ergebnis stimmt.



Daten & Zufall
Sekundarstufe I

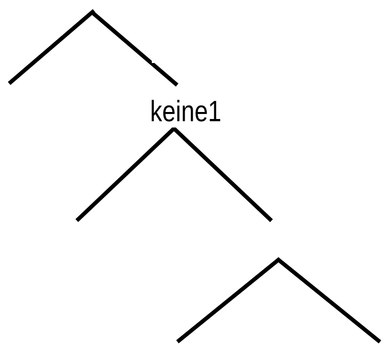
Idee der Wahrscheinlichkeit
Mathematische Wahrscheinlichkeit

Zeichnen eines reduzierten Baumdiagramms II

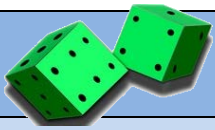
60

Saskia würfelt dreimal hintereinander und zählt, wie oft sie eine Eins würfelt.

- Ergänze das reduzierte Baumdiagramm.
- Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Saskia dreimal hintereinander keine Eins würfelt.



Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0



Anwenden des reduzierten Baumdiagramms und der Gegenwahrscheinlichkeit in einer Realsituation | 61

Ein Fischzuchtbetrieb bietet Hobbyanglern an, sich die Fische aus seinen Teichen selbst zu fangen. Nach der Reinigung und Neubesetzung eines solchen Teiches befinden sich in diesem 30 Fische, von denen 20 Forellen sind.

Fritz angelt an diesem Teich als Erster und fängt drei Fische.

- Zeichne ein vollständiges Baumdiagramm.
- Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle drei Fische Forellen sind.
- Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er keine Forelle fängt.
- Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er **mindestens eine** Forelle fängt.

Darum geht es

Die Kombinatorik als Lehre vom Zählen bzw. Abzählen befasst sich konkret mit der Frage:
„Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, eine bestimmte Anzahl von Elementen auszuwählen oder anzuordnen?“ Es geht also maßgeblich um das systematische Abzählen von Möglichkeiten, das eine Grundlage zum Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bildet.

Das **allgemeine Zählprinzip der Kombinatorik** ist gleichzeitig eine Grundvorstellung der Multiplikation. Es gibt zwei oder mehr unterschiedliche Mengen. Jedem Element der einen Menge wird ein Element der anderen Menge(n) zugeordnet. Die Anzahl der verschiedenen Zuordnungsmöglichkeiten wird durch Multiplikation ermittelt.

Zum Beispiel: *Es gibt drei T-Shirts, zwei Hosen und drei Paar Schuhe zur Auswahl und es soll herausgefunden werden, wie viele Möglichkeiten es gibt, sich verschieden anzuziehen.*
Es sind 3 · 2 · 3 = 18 Möglichkeiten.

Es gibt drei Grundsituationen in der Kombinatorik, die sehr häufig vorkommen.

Permutation	Variation	Kombination
Anordnung <u>aller</u> Elemente (Reihenfolge beachten)	Auswahl und Anordnung <u>einiger</u> Elemente (Reihenfolge beachten)	Auswahl <u>einiger</u> Elemente (Reihenfolge nicht beachten)
<u>Beispielsituation</u>: *Mit den Ziffernkarten* 1 , 2 , 3 *und* 4 *sollen vierstellige Zahlen gelegt werden.* *Wie viele Zahlen sind möglich?*	*<u>Beispielsituation</u>:* *Sechs Personen laufen um die Wette.* *Wie viele Möglichkeiten gibt es, den 1., 2. und 3. Platz zu belegen?*	*<u>Beispielsituation</u>:* *Aus fünf verschiedenen Sammelbildern sollen zwei ausgewählt werden.* *Wie viele verschiedene Paare gibt es?*

Im Unterricht der Grundschule und der Sekundarstufe I spielt die mathematische Bezeichnung der Grundsituationen (Variation, Permutation, Kombination) keine Rolle. Vielmehr müssen die Schüler*innen in der Lage sein, diese Situationen durch gezieltes Fragen vollständig zu erfassen:

- Wie viele Elemente (Gesamtmenge) stehen insgesamt zur Verfügung?
- Werden alle oder nur einige Elemente dieser Gesamtmenge verwendet?
- Ist die Reihenfolge der Elemente zu beachten?

Häufig müssen Sonderfälle betrachtet werden. Dazu gehört z. B. die mehrfache Verwendung eines Elements (<u>mit</u> Wiederholung). Weitere Sonderfälle entstehen, wenn zusätzliche Bedingungen beschrieben werden. Deshalb sollten auch diese Fragen beantwortet werden:

- Kommen die Elemente in der Anordnung mehrfach (mit Wiederholung) vor?
  (z. B. Einstellung der Ziffern bei einem Zahlenschloss)
- Werden Bedingungen für die Anordnungen beschrieben?
  (z. B. Der blaue Stein darf nie unten liegen.)

Bei kombinatorischen Aufgabenstellungen stehen vor allem die Lösungsprozesse im Vordergrund. Ziel ist es, ausgehend vom Probieren und dem ersten noch sehr unsystematischen Finden einzelner Anordnungen, die Schüler*innen an systematische Vorgehensweisen heranzuführen. Diese ermöglichen es, Strategien zu entwickeln und damit alle Anordnungen sicher zu finden.

Für die Entwicklung dieser Strategien ist es hilfreich, die Situationen handelnd zu begreifen sowie zeichnerisch und symbolisch darzustellen. Dabei ist es wichtig, Situationen und Anordnungen immer wieder miteinander zu vergleichen. Durch die Bearbeitung von Situationen der gleichen Art erlangen die Schüler*innen ein tiefgreifendes Verständnis für die gemeinsamen mathematischen Strukturen der Situationen.

Darum geht es

Um die Ergebnisse der Anordnungen aufzuschreiben, sollten verschiedene Darstellungsformen (z. B. Listen, Tabellen, Baumdiagramme) genutzt werden. Auch die Darstellungen müssen immer wieder verglichen und auf ihre Eignung überprüft werden.

Ziel des Unterrichts ist es, die verschiedenen Grundsituationen zu modellieren und Zählstrategien zu nutzen, um Anzahlen schnell zu erfassen. Dazu werden Baumdiagramme und Urnenmodelle genutzt.

Förderaufgaben
„Idee der Kombinatorik“
Grundschule

Förderschritte zu den Diagnoseaufgaben „Zählstrategien und Wahrscheinlichkeiten“ (B,C,D): 1

Übersicht über die Förderempfehlungen (Grundschule):

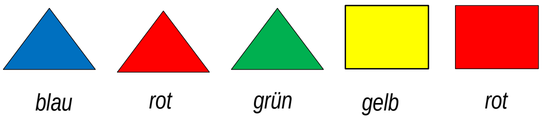
1. Legen von Häusern (Kreuzprodukt)
2. Bauen und Anordnen von Würfeltürmen (Permutation)
3. Ordnen von Anordnungen aus Spielfiguren (Permutation)
4. Ordnen von Würfeltürmen (Permutation)
5. Schütteln von Händen (Kombination)
6. Legen von Anordnungen mit „Eiskugeln“ (Kombination mit Wiederholung)
7. Legen von Anordnungen mit „Eiskugeln“ (Kombination mit Wiederholung)
8. Legen von zweistelligen Zahlen (Variation)
9. Bauen von Würfeltürmen (Variation)
10. Zeichnen von Häusern (Kreuzprodukt)
11. Auswählen fehlender Verkleidungsmöglichkeiten (Kreuzprodukt)
12. Beschreiben und Fortsetzen von Anordnungen (Kreuzprodukt)
13. Zeichnerisches Darstellen und Ordnen von Möglichkeiten (Kreuzprodukt)
14. Zeichnen (systematisch) von Würfeltürmen (Variation)
15. Vergleichen von unterschiedlichen zeichnerischen Lösungen (Variation mit/ohne Wiederholung)
16. Einzeichnen unterschiedlicher Anordnungen (Variation mit Wiederholung)
17. Überprüfen der Darstellungen (Permutation)
18. Zeichnen unterschiedlicher Zieleinläufe (Permutation)
19. Vergleichen von Anordnungen (Permutation)
20. Zeichnen von Würfeltürmen (Variation)
21. Vergleichen und Bewerten von Darstellungen
22. Zeichnen (systematisch) von Eiskugelvariationen (Kombination mit Wiederholung)
23. Beschreiben und Überprüfen von Darstellungen (Kombination)
24. Darstellen einer Lösung (Kombination)
25. Finden und Darstellen von Möglichkeiten in einer Tabelle (Kreuzprodukt)
26. Darstellen von Möglichkeiten mithilfe von Buchstaben (Kreuzprodukt)
27. Beschreiben einer symbolischen Darstellung (Permutation)
28. Bestimmen und Ordnen von Möglichkeiten mithilfe von Buchstaben (Permutation)
29. Finden und Ordnen von Möglichkeiten mithilfe einer Stellenwerttafel (Permutation)
30. Systematisches Aufschreiben von Anordnungen (Permutation mit Beachtung von Bedingungen)
31. Beschreiben und Vervollständigen einer symbolischen Darstellung (Variation)
32. Geordnetes Darstellen von Möglichkeiten mithilfe von Buchstaben (Variation)
33. Geordnetes Darstellen von Möglichkeiten mithilfe von Buchstaben (Variation)
34. Ergänzen fehlender zweistelliger Zahlen (Variation)
35. Beschreiben und Fortsetzen der Möglichkeiten in einem Baumdiagramm (Kreuzprodukt)
36. Beschreiben der Darstellung eines Baumdiagramms (Variation)
37. Nachbauen von Würfeltürmen und Vervollständigen des Baumdiagramms (Variation)
38. Finden von Fehlern im Baumdiagramm (Variation)

Daten & Zufall Grundschule	Idee der Kombinatorik Unterscheiden & Herstellen von Möglichkeiten

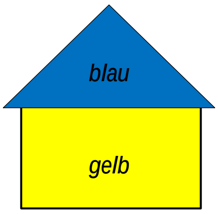
Legen von Häusern (Kreuzprodukt)	1

Material: *Dreiecke in den Farben Blau, Rot und Grün, Rechtecke in den Farben Gelb und Rot*

Aus den Dreiecken und Rechtecken sollen Häuser gelegt werden.



So könnte ein gelegtes Haus aussehen:



Lege weitere Häuser.

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

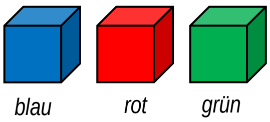
Daten & Zufall Grundschule	Idee der Kombinatorik Unterscheiden & Herstellen von Möglichkeiten

Bauen und Anordnen von Würfeltürmen (Permutation)	2

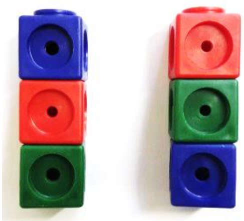
Material: *jeweils 6 blaue, rote und grüne Würfel (z. B. Steckwürfel)*

Es sollen Türme aus **drei** Würfeln gebaut werden. Verwende für jeden Turm drei **verschiedene** Farben.

Es gibt diese Farben:



Hier siehst du zwei Steckwürfeltürme. Baue diese Türme nach.



Baue weitere Steckwürfeltürme.

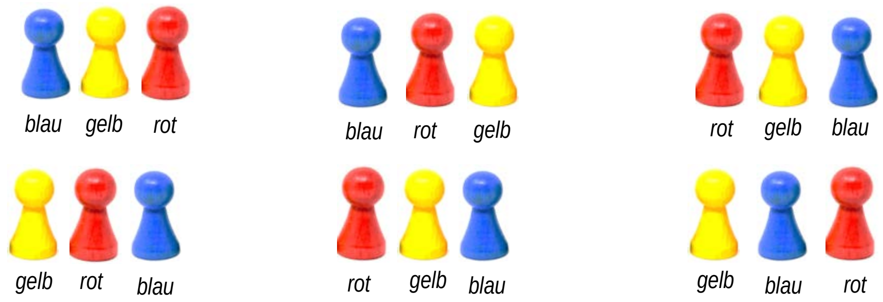
Bild 1: „Zwei Steckwürfeltürme 1“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Ordnen von Anordnungen aus Spielfiguren (Permutation) | 3

Material: *blaue, gelbe und rote Spielfiguren*

Drei Spielfiguren sollen in einer Reihe nebeneinander stehen.

Jede Farbe darf in jeder Reihe nur **einmal** vorkommen.



Stelle die Möglichkeiten mit Spielfiguren nach.

Versuche, die Möglichkeiten zu ordnen.

Beschreibe, wie du vorgegangen bist.

Bild 2-7: „Spielfiguren1 bis 6", pixabay.com, CC0

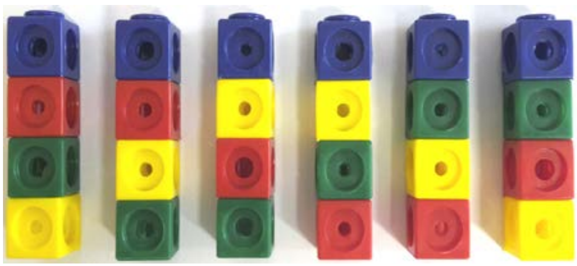
Ordnen von Würfeltürmen (Permutation) | 4

Material: *blaue, rote, gelbe und grüne Steckwürfel*

Tim hat mit **vier verschiedenen** Steckwürfeln Türme gebaut.
Jede Farbe darf in jedem Turm nur einmal vorkommen.

Tim hat angefangen, die Steckwürfeltürme zu ordnen.

Beschreibe, wie er vorgegangen ist.



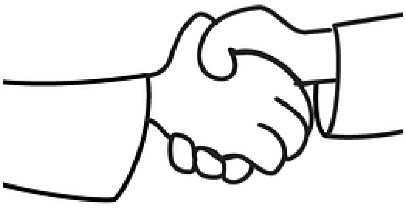
Baue die Steckwürfeltürme nach, finde weitere Möglichkeiten und ordne sie nach dem Muster von Tim.
Wie viele Möglichkeiten findest du?

Bild 8: „Sechs Steckwürfeltürme 1", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall Grundschule		Idee der Kombinatorik Unterscheiden & Herstellen von Möglichkeiten
Schütteln von Händen (Kombination)		5

Zum Abschied schütteln sich 4 **Kinder** aus der Sportgruppe die Hände.
Jedes Kind schüttelt jedem anderen Kind einmal die Hand.

Spiele die Situation gemeinsam mit 3 anderen Kindern nach.



Zählt mit, wie oft ihr euch insgesamt die Hände schüttelt.

Überlege: Wie oft schüttelt ihr euch die Hände, wenn noch ein 5. Kind dazukommt?

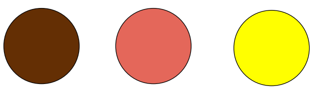
Wie oft schütteln sich 6 Kinder die Hände?

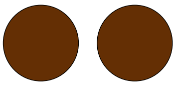
Bild 9: „Hände", pixabay.com, CC0

Daten & Zufall Grundschule		Idee der Kombinatorik Unterscheiden & Herstellen von Möglichkeiten
Legen von Anordnungen mit „Eiskugeln" (Kombination mit Wiederholung)		6

Material: *mehrere Kreise in den Farben Braun, Gelb, Rot*

Es sollen unterschiedliche Eiswaffeln mit immer **zwei** Kugeln entstehen. Es gibt diese Eissorten:



So kannst du legen: 

Lege andere Möglichkeiten.

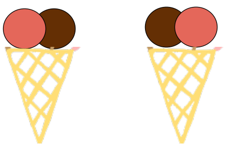
Überlege: Sind das zwei verschiedene Eistüten? 

Bild 10: „Eistüten und -kugeln", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall
Grundschule

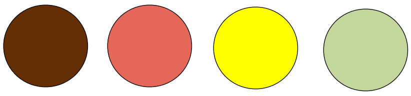
Idee der Kombinatorik
Unterscheiden & Herstellen von Möglichkeiten

Legen von Anordnungen mit „Eiskugeln“ (Kombination mit Wiederholung) | 7

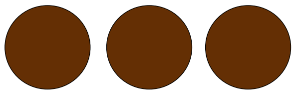
Material: *mehrere Kreise in den Farben Braun, Gelb, Rot und Grün*

Es sollen unterschiedliche Eiswaffeln mit immer **drei** Kugeln entstehen.

Es gibt diese Eissorten: *Schoko* *Erdbeere* *Vanille* *Pistazie*



So kannst du legen:



Lege andere Möglichkeiten.

Überlege: Sind das zwei verschiedene Eistüten?

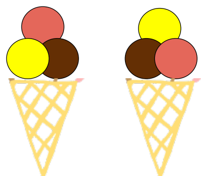


Bild 11: „Eistüten und -kugeln“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall
Grundschule

Idee der Kombinatorik
Unterscheiden & Herstellen von Möglichkeiten

Legen von zweistelligen Zahlen (Variation) | 8

Material: *Ziffernkarten* $\boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{9}$ *jeweils 8-mal*

Mit den Ziffernkarten $\boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{9}$ sollen **zweistellige** Zahlen gelegt werden.

Die einzelnen Ziffernkarten dürfen in jeder Zahl **nur einmal** vorkommen.

Lege möglichst viele **zweistellige** Zahlen.

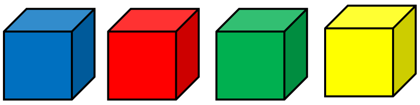
Kontrolliere, ob du keine Zahl doppelt gelegt hast.

Bauen von Würfeltürmen (Variation) | 9

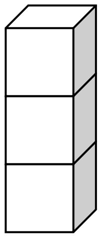
Material: *Würfel (z. B. Steckwürfel) in vier unterschiedlichen Farben (Blau, Rot, Grün, Gelb)*

Es sollen Türme aus **drei** Würfeln gebaut werden.
Verwende für jeden Turm immer **drei verschiedene** Farben.

Es gibt diese Farben:



blau *rot* *grün* *gelb*

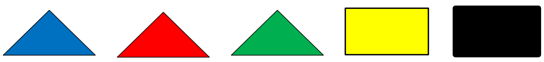


Baue aus **drei** verschiedenfarbigen Würfeln Türme.
Ordne die gebauten Türme.

Zeichnen von Häusern (Kreuzprodukt) | 10

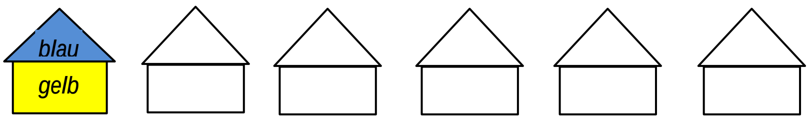
Es sollen unterschiedliche Häuser aus Dreiecken und Rechtecken entstehen.

Es gibt diese Dreiecke und Rechtecke:



blau *rot* *grün* *gelb* *schwarz*

Zeichne die Häuser so:



Zeichne andere Möglichkeiten.

Kontrolliere: Hast du Häuser doppelt gezeichnet?
Fehlen Häuser?

Daten & Zufall
Grundschule

Idee der Kombinatorik
Unterscheiden von Möglichkeiten

Auswählen fehlender Verkleidungsmöglichkeiten (Kreuzprodukt) | 11

Ein Clown kann zwischen einer **roten** und einer **gelben Perücke** und zwischen **drei unterschiedlichen Hüten** wählen.

Es gibt 6 verschiedene Verkleidungsmöglichkeiten. Anna hat angefangen, die Möglichkeiten zu legen:

Wonach hat Anna die Clowns geordnet?

Wie müssen die letzten drei Clowns aussehen?

Kreise ein:

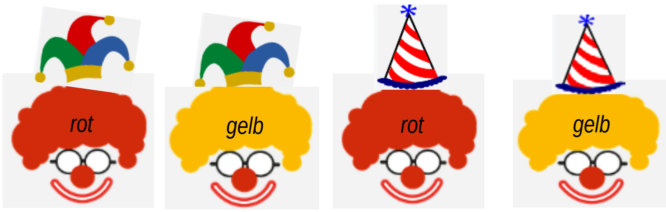


Bild 12: „Drei Clowns", pixabay.com, CC0
Bild 13: „Vier Clowns", pixabay.com, CC0

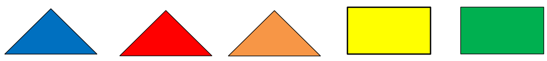
Daten & Zufall
Grundschule

Idee der Kombinatorik
Unterscheiden & Herstellen von Möglichkeiten

Beschreiben und Fortsetzen von Anordnungen (Kreuzprodukt) | 12

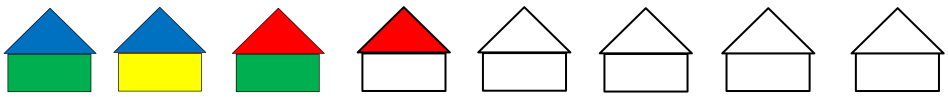
Es sollen unterschiedliche Häuser aus Dreiecken und Rechtecken entstehen.

Es gibt diese Dreiecke und Rechtecke:



blau *rot* *orange* *gelb* *grün*

Jonas hat begonnen, Häuser aufzuzeichnen:



Wonach hat er die Häuser geordnet?

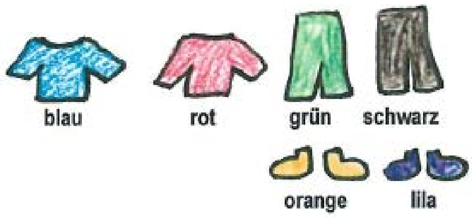
Setze seine Ordnung fort.

Daten & Zufall
Grundschule

Idee der Kombinatorik
Unterscheiden & Herstellen von Möglichkeiten

Zeichnerisches Darstellen und Ordnen von Möglichkeiten (Kreuzprodukt) | 13

Belya hat 8 **Möglichkeiten**, sich verschieden anzuziehen.
Er hat diese Kleidungsstücke zur Auswahl:



Zeichne alle Möglichkeiten mit Farben.
Ordne deine Ergebnisse:

1. Zeichne zuerst alle Möglichkeiten mit dem blauen T-Shirt.
2. Zeichne danach alle Möglichkeiten mit dem roten T-Shirt.
3. ...

T-Shirt	blau	blau	blau					
Hose	grün	grün						
Schuhe	orange							

Bild 14: „Kleidungsstücke 1", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall
Grundschule

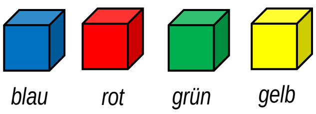
Idee der Kombinatorik
Herstellen & Bestimmen der Anzahl von Möglichkeiten

Zeichnen (systematisch) von Würfeltürmen (Variation) | 14

Es sollen Türme aus **zwei** Würfeln gebaut werden.

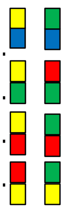
Verwende für jeden Turm zwei **verschiedene** Farben.

Es gibt diese Farben:



Versuche, deine Ergebnisse zu ordnen:

- Zeichne zuerst alle Möglichkeiten mit dem **blauen** Würfel **unten**. …
- Zeichne danach alle Möglichkeiten mit dem **grünen** Würfel **unten**. …
- Zeichne nun alle Möglichkeiten mit dem **roten** Würfel **unten**. …
- Zeichne zum Schluss alle Möglichkeiten mit dem **gelben** Würfel **unten**. …



Zähle alle Türme.
Wie viele Möglichkeiten hast du gefunden?

Vergleichen von unterschiedlichen zeichnerischen Lösungen (Variation mit/ohne Wiederholung) | 15

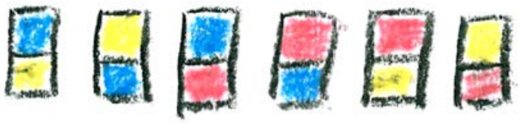
Max und Lisa sollen aus Würfeln 2er Türme bauen.

Sie haben unterschiedliche Lösungen aufgezeichnet.

Welche Farben standen zur Auswahl?

Max:

Lisa:



Vergleiche die Lösungen. Beschreibe die Unterschiede.

Bild 15-16: „Skizzierte Würfeltürme“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

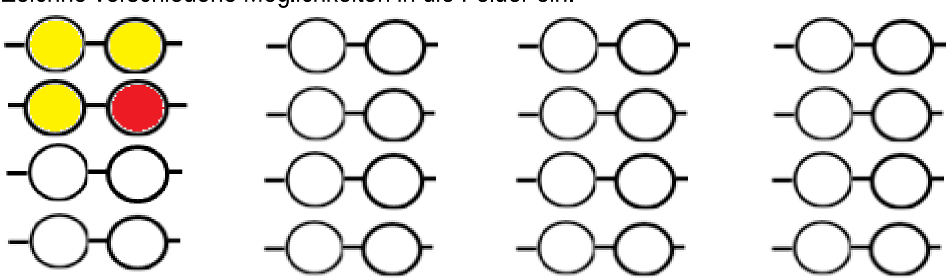
Einzeichnen unterschiedlicher Anordnungen (Variation mit Wiederholung) | 16

Du hast viele gelbe, rote und schwarze Spielfiguren im Spiel.

gelb *rot* *schwarz*

Kurz vor dem Ziel stehen zwei Spielfiguren hintereinander.

Zeichne verschiedene Möglichkeiten in die Felder ein.



Kontrolliere, ob du alle Möglichkeiten gefunden hast.

Bild 17: „Spielfiguren 7“, pixabay.com, CC0

Daten & Zufall Grundschule	Idee der Kombinatorik Unterscheiden von Möglichkeiten

Überprüfen der Darstellungen (Permutation)	17

Drei Stühle stehen hintereinander.
Auf jedem Stuhl sitzt ein Kind.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten sich hinzusetzen.

Nina zeichnet ihre Lösung auf:

Schaue dir Ninas Lösung an.

Was fällt dir auf?
Beschreibe.

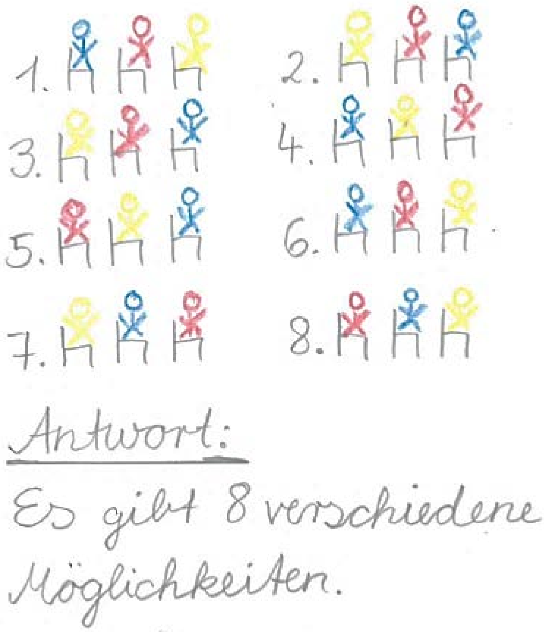


Bild 18: „Zeichnung Stühle mit Strichmännchen", LISUM, CC-BY-SA 4.0

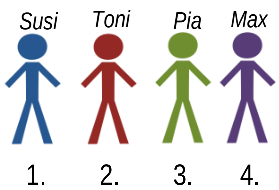
Daten & Zufall Grundschule	Idee der Kombinatorik Unterscheiden & Herstellen von Möglichkeiten

Zeichnen unterschiedlicher Zieleinläufe (Permutation)	18

Susi, Toni, Max und Pia laufen um die Wette.

In welcher Reihenfolge können die Kinder das Ziel erreichen?

Hier siehst du einen möglichen Zieleinlauf:



Finde andere Möglichkeiten und zeichne sie auf.

Kontrolliere, ob du Möglichkeiten doppelt gezeichnet hast.
Beschreibe, wie man überprüfen kann, ob noch Möglichkeiten fehlen.

Bild 19: „Strichmännchen 2", pixabay.com, CC0

Daten & Zufall
Grundschule

Idee der Kombinatorik
Unterscheiden von Möglichkeiten

Vergleichen von Anordnungen (Permutation) — 19

Material: *Ziffernkarten* 1 3 6

Mit den Ziffernkarten sollen **dreistellige** Zahlen gebildet werden.

Timo hat angefangen, seine Lösungen aufzumalen. Eva meint, sie hätte bereits alle dreistelligen Zahlen aufgemalt.

Timo:

1 3 6 | 1 6 3 | 3 3 3
1 1 1 | 1 1 6 | 3 3 1
1 1 3 | 3 3 6

Eva:

1 6 3 | 1 3 6
3 6 1 | 3 1 6
6 3 1 | 6 1 3

Vergleiche beide Lösungen miteinander. Was fällt dir auf?

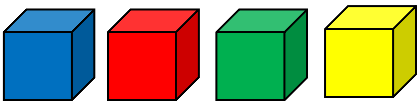
Daten & Zufall
Grundschule

Idee der Kombinatorik
Unterscheiden & Herstellen von Möglichkeiten

Zeichnen von Würfeltürmen (Variation) — 20

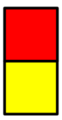
Es sollen Türme aus **zwei** Würfeln gebaut werden.
Verwende für jeden Turm zwei **verschiedene** Farben.

Es gibt diese Farben:



blau *rot* *grün* *gelb*

So kannst du zeichnen:



Finde andere Möglichkeiten.

Kontrolliere, ob du Türme doppelt gezeichnet hast.
Beschreibe, wie man überprüfen kann, ob noch Möglichkeiten fehlen.

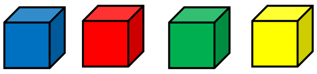
Daten & Zufall
Grundschule

Idee der Kombinatorik
Unterscheiden von Möglichkeiten

Vergleichen und Bewerten von Darstellungen (Variation) | 21

Es sollen Türme aus **zwei** Würfeln gebaut werden.
Verwende für jeden Turm zwei **verschiedene** Farben.

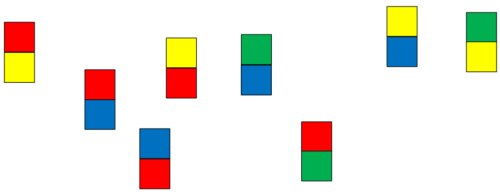
Es gibt diese Farben:



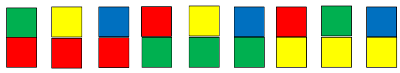
blau *rot* *grün* *gelb*

Alex und Elanur haben begonnen, Steckwürfeltürme zu zeichnen.

Alex:



Elanur:



Alex sagt: „Elanurs Zeichnung ist besser als meine.“
Was meint Alex damit?

Daten & Zufall
Grundschule

Idee der Kombinatorik
Herstellen & Bestimmen der Anzahl von Möglichkeiten

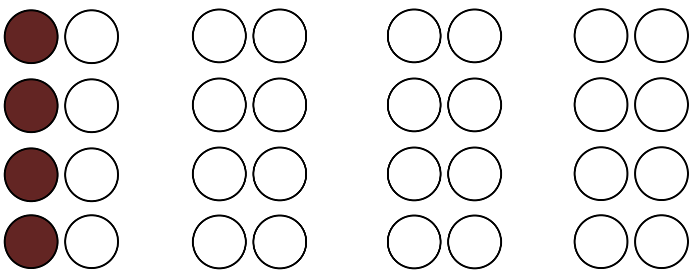
Zeichnen (systematisch) von Eiskugelvariationen (Kombination mit Wiederholung) | 22

Es sollen unterschiedliche Eiswaffeln mit immer **zwei** Kugeln entstehen.

Es gibt diese Eissorten:

Schoko *Erdbeere* *Vanille* *Pistazie*

Male aus.
Beginne zunächst mit der Sorte „Schoko“.



Kontrolliere, ob du eine Möglichkeit doppelt gemalt hast.
Wie viele Möglichkeiten gibt es?

Daten & Zufall
Grundschule

Idee der Kombinatorik
Unterscheiden von Möglichkeiten

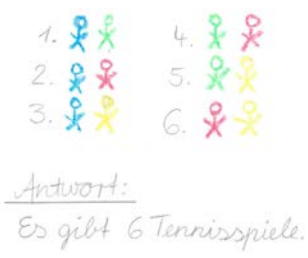
Beschreiben und Überprüfen von Darstellungen (Kombination) — 23

Vier Kinder planen ein Tennisturnier. Immer **zwei Kinder** spielen gegeneinander.
Jeder soll einmal gegen jeden spielen.

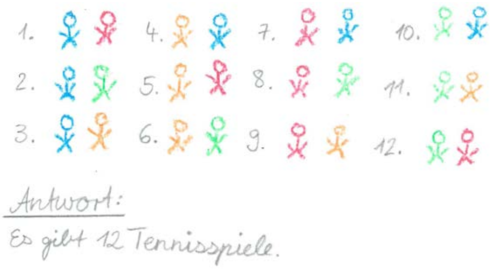
Lukas fragt: „Wie viele Tennisspiele gibt es dann insgesamt?“

Lukas und Fatima haben ihren Lösungsweg aufgemalt:

Lukas:



Fatima:



- Beschreibe die Lösungen.
- Wer hat die Aufgabe richtig gelöst? Begründe.

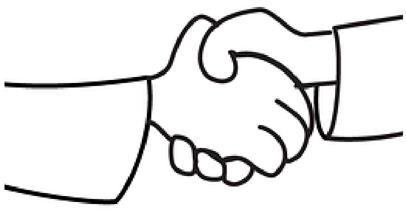
Bild 20: „Strichmännchen 3“, LISUM, CC-BY-SA 4.0
Bild 21: „Strichmännchen 4“, LISUM CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall
Grundschule

Idee der Kombinatorik
Herstellen & Bestimmen der Anzahl von Möglichkeiten

Darstellen einer Lösung (Kombination) — 24

Max, Kim, Sina, Pia und Lina schütteln sich zur Begrüßung die Hände.



Wie oft werden die Hände geschüttelt?

Zeichne oder schreibe deinen Lösungsweg so auf, dass andere ihn verstehen.

Max

Lina

Kim

Sina

Pia

Bild 22: „Hände“, pixabay.com, CC0

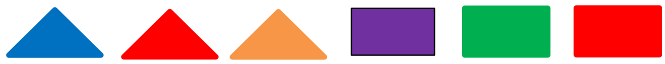
Daten & Zufall
Grundschule

Idee der Kombinatorik
Herstellen von Möglichkeiten

Finden und Darstellen von Möglichkeiten in einer Tabelle (Kreuzprodukt) | 25

Es sollen unterschiedliche Häuser aus Dreiecken und Rechtecken entstehen.

Es gibt diese Dreiecke und Rechtecke:



Sandra hat begonnen, alle Möglichkeiten in einer Tabelle darzustellen:

Was bedeuten die Buchstaben?

Setze die Tabelle fort.

	b	r	
l	b l	r l	

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall
Grundschule

Idee der Kombinatorik
Herstellen von Möglichkeiten

Darstellen von Möglichkeiten mithilfe von Buchstaben (Kreuzprodukt) | 26

Emil hat 3 **T-Shirts** (**g**elb, **r**ot, **b**lau), 2 **Hosen** (**o**range, **w**eiß) und 2 **Paar Schuhe** (**l**ila, **s**chwarz) zur Auswahl.
Er hat 12 **Möglichkeiten**, sich verschieden anzuziehen.

Taha hat alle Möglichkeiten aufgezeichnet:

Schreibe alle Möglichkeiten geordnet und mit Buchstaben auf.

Schreibe so und streiche die notierten Möglichkeiten durch:

1. g o l
2. g o s
3. b o l
4. …

Bild 23: „Zeichnung Kleidung 2", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall
Grundschule

Idee der Kombinatorik
Unterscheiden von Möglichkeiten

Beschreiben einer symbolischen Darstellung (Permutation) | 27

Susi, Tom und Leon möchten sich nebeneinander auf <u>drei Stühle</u> setzen.

Sie überlegen, wie sie sitzen können.

Kai hat seinen Lösungsweg aufgeschrieben:

<u>Kai</u>

1. S T L	3. T S L	5. L S T
2. S L T	4. T L S	6. L T S

Was bedeuten die Buchstaben in Kais Lösungsweg?

Beschreibe.

Daten & Zufall
Grundschule

Idee der Kombinatorik
Bestimmen der Anzahl von Möglichkeiten

Bestimmen und Ordnen von Möglichkeiten mithilfe von Buchstaben (Permutation) | 28

Es gibt **vier** Stühle. Adrian, Sina, Finja und Christian möchten sich nebeneinander setzen.

a) Schätze zuerst: Gibt es mehr oder weniger als 10 verschiedene Möglichkeiten?
Versuche, es zu erklären.

b) Finde alle Möglichkeiten.
Schreibe sie geordnet auf.

Tobias hat schon angefangen, aufzuschreiben:

1. *A S C F*
2. *A S F C*
3. *A C S F*
4. *A C F S*
5. *A F S C*
6. *…*

Daten & Zufall Grundschule	Idee der Kombinatorik Bestimmen der Anzahl von Möglichkeiten
Finden und Ordnen von Möglichkeiten mithilfe einer Stellenwerttafel (Permutation)	29

Mit den Ziffern 1, 3, 5 sollen **dreistellige** Zahlen gebildet werden.

Jede Ziffer darf immer nur einmal pro Zahl vorkommen.

Wie viele Möglichkeiten findest du?

Ordne deine Ergebnisse:

1. Schreibe zuerst alle Möglichkeiten mit der Ziffer 1 an der Hunderterstelle.
2. Schreibe danach alle Möglichkeiten mit der Ziffer 3 an der Hunderterstelle.
3. …

H	Z	E
1		

Daten & Zufall Grundschule	Idee der Kombinatorik Herstellen von Möglichkeiten
Systematisches Aufschreiben von Anordnungen (Permutation mit Beachtung von Bedingungen)	30

Paul, Susi, Emilia und Jonas sind mehrmals um die Wette gelaufen.

Welche Zieleinläufe sind möglich? Wie viele Zieleinläufe hast du gefunden?

Schreibe geordnet auf.

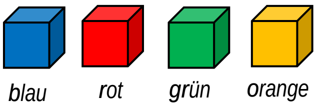
S E J P
S E P J
S J E P
S J P E
…

Paul ist nie Erster geworden. Wie viele mögliche Zieleinläufe sind es dann weniger?

Beschreiben und Vervollständigen einer symbolischen Darstellung (Variation) — 31

Es sollen Türme aus **drei** Würfeln gebaut werden.
Verwende für jeden Turm **drei verschiedene** Farben.

Es gibt diese Farben:



Stefan hat angefangen, Steckwürfeltürme zu bauen und danach die Möglichkeiten aufgeschrieben:

o	r
g	g
b	b

- Beschreibe, wie Stefan seine Lösung aufgeschrieben hat.
- Schreibe alle fehlenden Möglichkeiten auf.

Bild 24: „Zwölf Steckwürfeltürme“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

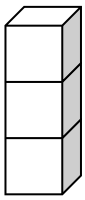
Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall
Grundschule

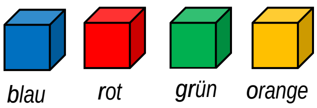
Idee der Kombinatorik
Herstellen von Möglichkeiten

Geordnetes Darstellen von Möglichkeiten mithilfe von Buchstaben (Variation) — 32

Es sollen Türme aus **drei** Würfeln gebaut werden.
Für jeden Turm gibt es **drei verschiedene** Farben.



Es gibt diese Farben:



Finde verschiedene Möglichkeiten.

Schreibe sie geordnet auf.

b	b	b	…
r	r	g	
g	o	r	

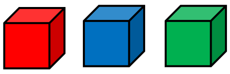
Daten & Zufall
Grundschule

Idee der Kombinatorik
Bestimmen der Anzahl von Möglichkeiten

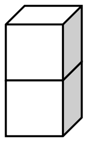
Geordnetes Darstellen von Möglichkeiten mithilfe von Buchstaben (Variation) | 33

Es sollen Türme aus **zwei** Würfeln gebaut werden.

Es gibt diese Farben:



rot *blau* *grün*



Jede Farbe darf mehrmals vorkommen.

Wie viele Möglichkeiten findest du?

Schreibe deine Ergebnisse geordnet auf.

b	b	…
b	r	

Daten & Zufall
Grundschule

Idee der Kombinatorik
Bestimmen der Anzahl von Möglichkeiten

Ergänzen fehlender zweistelliger Zahlen (Variation) | 34

Aus den Ziffern 1, 4, 8, 9 sollen **zweistellige** Zahlen gebildet werden.

Die Ziffern dürfen auch mehrmals benutzt werden.

Max hat diese zweistelligen Zahlen aufgeschrieben:

11, 14, 18, 19, 41, 44, ….

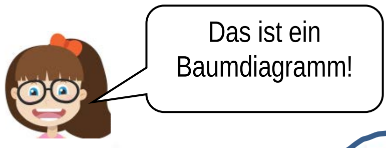
Ergänze die fehlenden Zahlen.

Beschreiben und Fortsetzen der Möglichkeiten in einem Baumdiagramm (Kreuzprodukt) | 35

Emil hat T-Shirts (braun, rot), Hosen (orange, gelb) und Schuhe (grün, schwarz) zur Auswahl.

Er hat 8 **Möglichkeiten** sich verschieden anzuziehen.

Julia hat alle Möglichkeiten aufgezeichnet und angefangen, sie in ein Baumdiagramm zu übertragen.



Julia hat die erste Möglichkeit im Baumdiagramm gesucht und eingekreist.

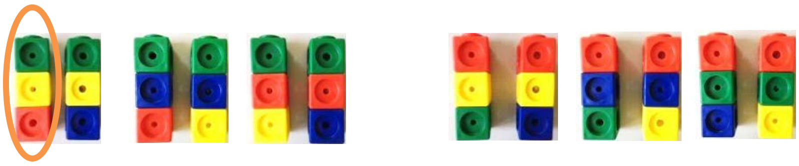
Setze das Baumdiagramm fort.

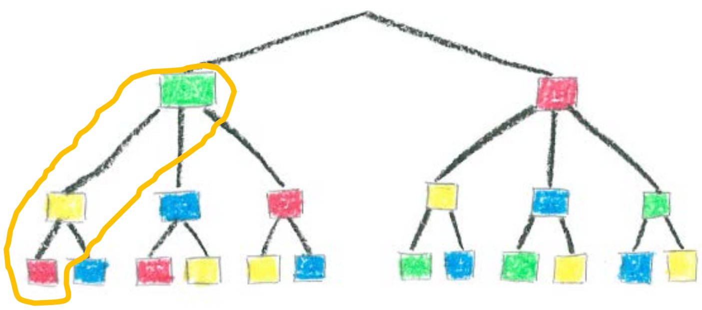
Bild 25: „Zeichnung Kleidung 3", LISUM, CC-BY-SA 4.0 *Bild 26: „ Mädchenkopf 1", pixabay.com, CC0*
Bild 27: „Zeichnung Kleidung 4", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Beschreiben der Darstellung eines Baumdiagramms (Variation) | 36

Isa hat mit Steckwürfeln gebaut und ein Baumdiagramm gezeichnet:



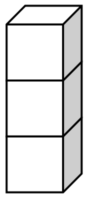


Isa hat den ersten Turm im Baumdiagramm gesucht und eingekreist.
Zeige weitere Türme im Baumdiagramm.

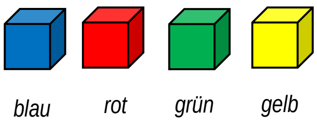
Bild 28: „Zwölf Steckwürfeltürme geteilt 1", LISUM, CC-BY-SA 4.0
Bild 29: „Baumdiagramm skizziert 1", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Nachbauen von Würfeltürmen und Vervollständigen des Baumdiagramms (Variation)

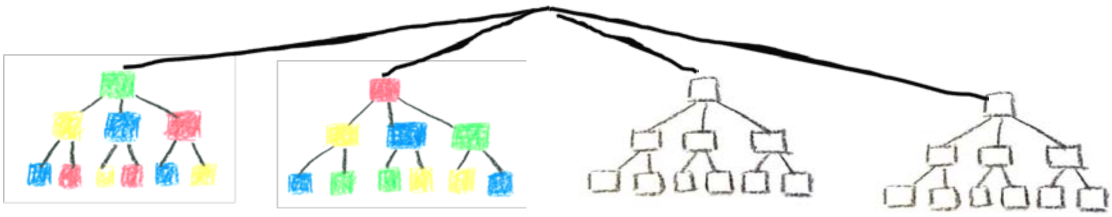
Es sollen Türme aus **drei** Würfeln gebaut werden.
Verwende für jeden Turm **drei verschiedene** Farben.



Es gibt diese Farben:



Linda hat mit den Steckwürfeln Türme gebaut und angefangen, ein Baumdiagramm zu zeichnen.
Baue die ersten beiden Türme nach.



Setze das Baumdiagramm fort.

Bild 30: „Baumdiagramm skizziert 2", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Finden von Fehlern im Baumdiagramm (Variation)

Es sollten Dreiertürme gebaut werden. Die roten und grünen Steckwürfel dürfen nur unten sein.

Isa hat mit Steckwürfeln gebaut und ein Baumdiagramm gezeichnet:

Dabei hat sie einen Fehler gemacht. Kreise den Fehler ein.

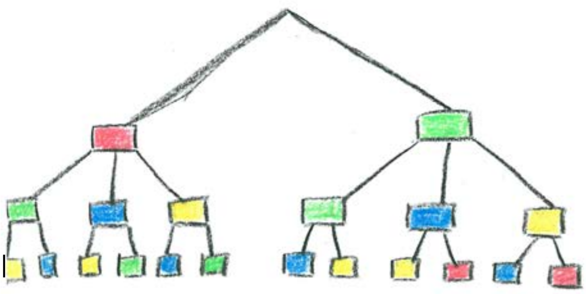


Bild 31: „Zwölf Steckwürfeltürme geteilt 2", LISUM, CC-BY-SA 4.0
Bild 32: „Baumdiagramm skizziert 2", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Förderaufgaben
„Idee der Kombinatorik“
Sekundarstufe I

Förderschritte zu den Diagnoseaufgaben „Zählstrategien und Wahrscheinlichkeiten“ (E, F, G): 1

Übersicht über die Förderempfehlungen (Sekundarstufe I):

1. Anordnen unterschiedlicher Karten (Permutation)
2. Anordnen der Karten und Finden aller Möglichkeiten (Permutation)
3. Übersichtliche Darstellung von Anordnungen (Permutation)
4. Bestimmen der Anzahl mit einer Tabelle (Permutation, Variation)
5. Überprüfen der Darstellung von Möglichkeiten in einer Tabelle (Kombination)
6. Bestimmen der Anzahl ohne vorgefertigte Hilfsmittel (Kombination)
7. Systematisches Ermitteln der Anzahl von Möglichkeiten I (Augensumme)
8. Systematisches Ermitteln der Anzahl von Möglichkeiten II (Produkt)
9. Erstellen eines Baumdiagramms und Nutzen von Symbolen I
10. Erstellen eines Baumdiagramms und Nutzen von Symbolen II
11. Überprüfen und Beschreiben von Darstellungen (Kombination)
12. Ermitteln der Anzahl von Möglichkeiten unter verschiedenen Bedingungen
13. Bestimmen der Anzahl von Anordnungen und Darstellen im Baumdiagramm I
14. Bestimmen der Anzahl von Anordnungen und Darstellen im Baumdiagramm II
15. Ermitteln der Anzahl von Möglichkeiten (Variation)
16. Ermitteln der Anzahl von Möglichkeiten (Kombination)
17. Ermitteln der Anzahl von Möglichkeiten (Variation ohne Wiederholung)
18. Ermitteln der Anzahl von Möglichkeiten (Variation mit Wiederholung)

Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Kombinatorik

Anordnen unterschiedlicher Karten (Permutation) | 1

Material: 3 beschriebene Karten

Max Richter möchte für ein Passwort die Anfangsbuchstaben seines Namens und den Tag und den Monat seines Geburtstages 07.12.2005 nutzen. Er will die beiden Buchstaben (MR), den Tag (07) und den Geburtsmonat (12) zusammenlassen.

M R | **0 7** | **1 2**

- Lege alle möglichen Passwörter.
- Finde heraus, wie viele Möglichkeiten es insgesamt sind.

Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Kombinatorik

Anordnen der Karten und Finden aller Möglichkeiten (Permutation) | 2

Material: *3 beschriebene Karten:* **M R** | **07** | **12**
Schere

Max hat mit den gegebenen Karten ein Passwort erstellt.
Um noch mehr Möglichkeiten zu erhalten, zerschneidet er die Buchstabenkarte.
Er legt mit den 4 Karten diese Anordnung.

M | **R** | **0 7** | **1 2**

Er notiert das Ergebnis als Ast eines Zählbaums:

M — R — 07 — 12

- Wie viele Passwörter kann er jetzt legen?

Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Kombinatorik

Systematisches Aufschreiben von Anordnungen (Permutation) | 3

mögliches Material: 6 Karten

Es wird ein 6-stelliges Passwort benötigt.
Max benutzt diese 6 Zeichen, um ein Passwort zu erstellen.

M R 0 7 1 2

- Finde heraus, wie viele Passwörter mit M R 0 7 beginnen.
- Finde heraus, wie viele Passwörter mit M R 0 beginnen.
- Finde heraus, wie viele Passwörter mit M R beginnen.
- Nun will er alle Möglichkeiten herausfinden.

Wie viele sind es?
Beschreibe eine mögliche Lösung.

Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Kombinatorik

Bestimmen der Anzahl mit einer Tabelle (Permutation, Variation) | 4

Bei einem Pferderennen kann man verschiedene Wetten abgeben.
Eine Wettmöglichkeit ist die Reihenfolge des Zieleinlaufes.

- Angenommen es starten heute nur 3 Pferde (Paul, Quirin und Rosi).
  Nutze die Tabelle und erkunde, wie viele Möglichkeiten des Zieleinlaufes es gibt.

1.Platz	2.Platz	3.Platz
…	…	…

- Finde heraus, wie viele Möglichkeiten des Zieleinlaufes es bei 4 und bei 5 Pferden gibt.
  Gib den Pferden Namen und stelle damit deine Lösung dar. Erkläre.

- Überlege, wie man die Lösung auch ohne eine Tabelle finden kann. Erkläre.

Bild 1: "Rennpferd", pixabay.com, CC0

Daten & Zufall Sekundarstufe I	Idee der Kombinatorik	
Überprüfen der Darstellung von Möglichkeiten in einer Tabelle (Kombination)		5

4 Schüler (Max, Luise, Robin, Elisa) verabschieden sich voneinander mit Händedruck.
Jeder soll sich von jedem Anderen verabschieden.
Es stellt sich die Frage, wie oft werden dabei die Hände gedrückt?

Jemand hat die Situation in einer Tabelle dargestellt und für jedes Mal Händedrücken ein Kreuz gesetzt.

	Max	Luise	Robin	Elisa
Max	–	x	x	x
Luise	x	–	x	x
Robin	x	x	–	x
Elisa	x	x	x	–

- Welcher Fehler steckt in dieser Tabelle?
- Wie verändert sich die Tabelle, wenn ein Schüler wegfällt? Beschreibe.

Daten & Zufall Sekundarstufe I	Idee der Kombinatorik	
Bestimmen der Anzahlen ohne vorgefertigte Hilfsmittel (Kombination)		6

An einem Fußballturnier nehmen 5 Mannschaften teil.

Es sollen alle Mannschaften ohne Rückspiel genau einmal gegeneinander spielen.

- Stelle alle möglichen Spiele in einer Tabelle dar.
- Wie viele Spiele sind es?
- Wie verändert sich deine Tabelle, wenn es jeweils noch ein Rückspiel gibt.
  Zeichne in die Tabelle ein.

Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Kombinatorik

Systematisches Ermitteln der Anzahl von Möglichkeiten I | 7

Es wird mit einem roten und einem grünen Würfel gewürfelt.

Die Augensummen wurden in der Tabelle notiert.

- Vervollständige die angefangene Tabelle.
- Kennzeichne alle Felder, die der Augensumme 5 entsprechen. Wie viele sind es?
- Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Augensumme 8?
- Wie viele verschiedene Augensummen gibt es?

		Grüner Würfel					
		1	2	3	4	5	6
Roter Würfel	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9		
	6	7	8				12

Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Kombinatorik

Systematisches Ermitteln der Anzahl von Möglichkeiten II | 8

Es wird mit einem grünen und einem roten Würfel gleichzeitig gewürfelt. Aus den Augenzahlen beider Würfel wird das Produkt gebildet.

- Vervollständige die Tabelle.
- Wie viele Möglichkeiten gibt es für das Produkt 6?
  Welches andere Produkt kommt genauso häufig vor?

		Grüner Würfel					
Roter Würfel							

Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Kombinatorik

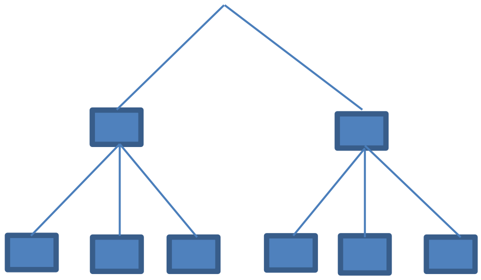
Erstellen eines Baumdiagramms und Nutzen von Symbolen I | 9

Bei einem Onlinespiel kann die Spielfigur durch drei verschiedene Tore 1, 2 und 3 gehen.
Hinter dem Tor erscheint im weiteren Spiel eine Hexe (H) oder eine gute Fee (F).

- Fülle die Lücke aus: Dieser Vorgang kann als …. stufiges Zufallsexperiment angesehen werden.

- Entscheide, welches Baumdiagramm (1 oder 2) diesen Vorgang beschreibt. Ergänze die Kurzzeichen.

Baumdiagramm 1:



Baumdiagramm 2:

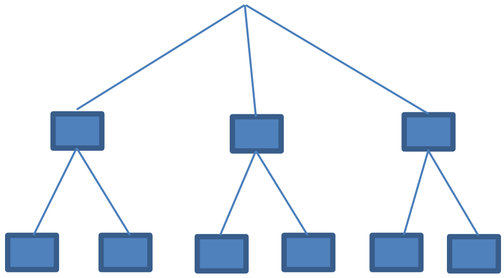


Bild 2: „Zwei Baumdiagramme“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

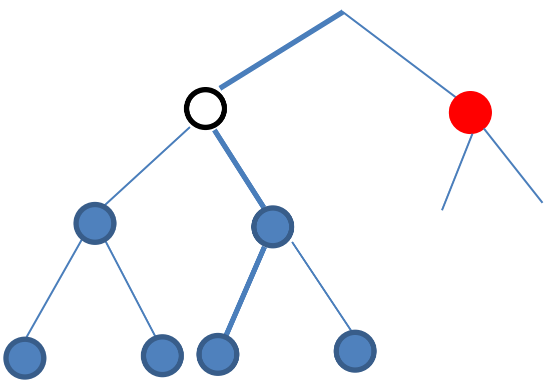
Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Kombinatorik

Erstellen eines Baumdiagramms und Nutzen von Symbolen II | 10

In einem undurchsichtigen Gefäß befinden sich gleich viele weiße und rote Kugeln.
Luise entnimmt nacheinander 3 Kugeln. Sie hat ein Baumdiagramm begonnen.

- Erkläre die Bedeutung des markierten Pfades.
- Vervollständige das begonnene Baumdiagramm.



- Zeichne dieses Baumdiagramm unter Verwendung von Kurzzeichen W für weiß und R für rot.

Bild 3: „Baumdiagramm schematisch 1“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Kombinatorik

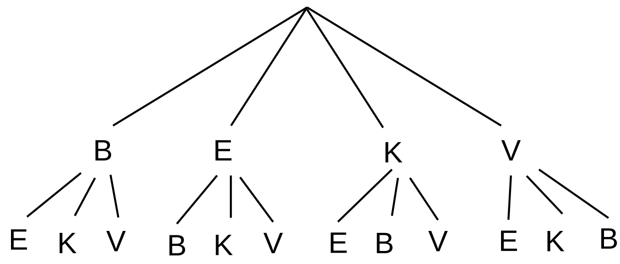
Überprüfen und Beschreiben von Darstellungen (Kombination) | 11

Es gibt 4 verschiedene Sorten Eis: **Bl**aubeere, **E**rdbeere, **K**irsche und **V**anille.

Marie möchte 2 unterschiedliche Kugeln bestellen. Die Reihenfolge der Kugeln ist egal.

Marie fragt sich, wie viele Kombinationsmöglichkeiten es gibt und zeichnet die Varianten auf.

Die Buchstaben sind die Anfangsbuchstaben der Eissorten.



Marie behauptet:

„Es gibt diese 12 Möglichkeiten."

Hedwig sagt: „Es sind nur 6 Möglichkeiten."

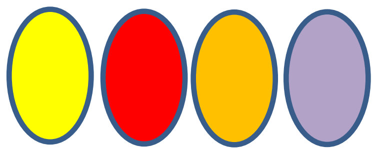
- Wer hat recht?
- Begründe mithilfe des Baumdiagramms.

Bild 4: „Baumdiagramm mit Buchstaben 1", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Kombinatorik

Ermitteln der Anzahl von Möglichkeiten unter verschiedenen Bedingungen | 12

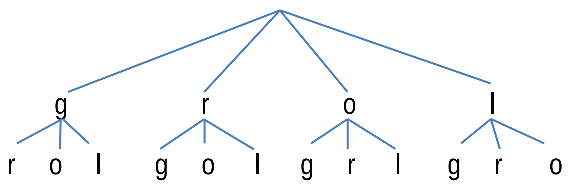


In einem Osternest liegen 4 Ostereier.

Sie sind gelb, rot, orange und lila gefärbt.

Luisa nimmt nacheinander 2 Eier aus dem Nest.

- Finde mithilfe des Baumdiagramms heraus, wie viele Möglichkeiten es dafür gibt.



- In einem anderen Osternest liegen nur 3 verschiedene Eier in den Farben Gelb, Rot und Orange.

  Beschreibe, wie sich das Baumdiagramm verändert. Wie viele Möglichkeiten gibt es jetzt?

- Ein weiteres Osternest enthält 5 verschiedene Eier in den Farben Gelb, Rot, Orange, Lila und Blau.

  Beschreibe, wie sich das Baumdiagramm verändert. Wie viele Möglichkeiten gibt es jetzt?

Bild 5: „Farbige Eier", LISUM, CC-BY-SA 4.0
Bild 6: „Baumdiagramm mit Buchstaben 2", LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall
Sekundarstufe I

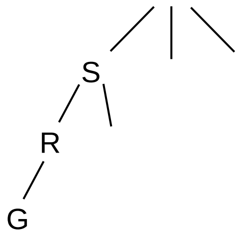
Idee der Kombinatorik

Bestimmen der Anzahl von Anordnungen und Darstellen im Baumdiagramm I | 13

Bei einem Stadtfest wird eine Tombola veranstaltet.

Die Teilnehmer müssen 3 Kugeln aus einem undurchsichtigen Behälter ziehen.
Die gezogenen Kugeln werden nicht zurückgelegt.
Im Behälter sind genau 3 Kugeln in den Farben Rot, Gelb und Schwarz enthalten.

- Wie viele verschiedene Reihenfolgen sind möglich?
- Vervollständige dazu das Baumdiagramm.



- Zeichne auch ein Baumdiagramm für den Fall, dass bei der Tombola die gezogenen Kugeln immer wieder zurückgelegt werden.
  Wie viele Reihenfolgen sind damit möglich?

Bild 7: „Baumdiagramm mit Buchstaben 3“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Kombinatorik

Bestimmen der Anzahl von Anordnungen und Darstellen im Baumdiagramm II | 14

In einem Möbelhaus wird ein Gewinnspiel veranstaltet.
Jeder Kunde darf am Eingang zweimal an einem Glücksrad drehen.

- Stelle alle Möglichkeiten, die beim Drehen auftreten können, in einem Baumdiagramm dar.
  Wie viele sind es?

Wer das Glück hat, dass zweimal dieselbe Farbe gedreht wird, der gewinnt einen Einkaufsgutschein.

- Kennzeichne alle Pfade, bei denen der Kunde gewinnt.
  Wie viele sind es?

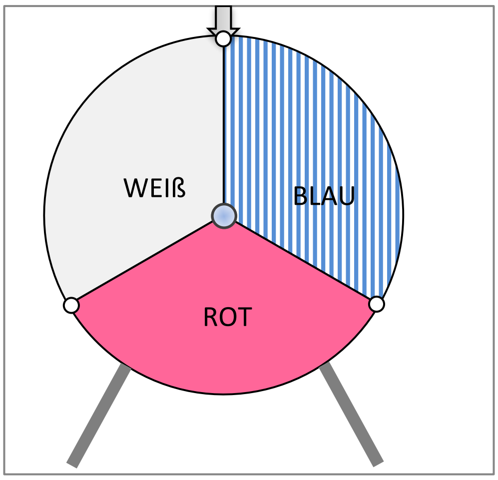
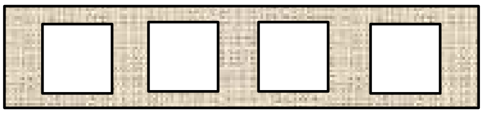


Bild 8: „Glücksrad“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Ermitteln der Anzahl von Möglichkeiten (Variation) | 15

Material: *4 leere Stühle oder schematische Darstellung*



Anna setzt sich zuerst auf einen der vier Stühle. Danach setzt sich Ben auf einen der verbleibenden Stühle.

- Probiere mit Mitschülern einige Möglichkeiten aus.
- Wie viele Möglichkeiten gibt es insgesamt? Begründe.

Hilfestellung:

Anna hat verschiedene Möglichkeiten sich hinzusetzen.
Wenn danach Ben Platz nimmt, bleiben ihm auch noch mehrere Möglichkeiten.
Entscheide dich für eine der folgenden Rechnungen: 4+4, 4+3, 4·4, 4·3.

- Nun stehen fünf Stühle da. Wie viele Möglichkeiten gibt es jetzt?

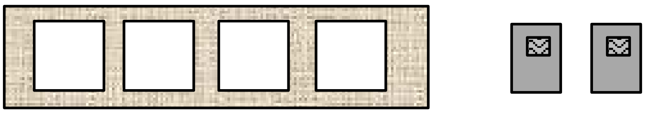
Bild 9: „Platzhalter 1“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Kombinatorik

Ermitteln der Anzahl von Möglichkeiten (Kombination) | 16

Material: *4 leere Stühle und 2 gleiche, nicht unterscheidbare Lehrbücher*



Die 2 gleichen Lehrbücher sollen jeweils einzeln auf einen der vier Stühle gelegt werden.

- Probiere einige Möglichkeiten aus.
- Finde alle verschiedenen Anordnungen heraus.

  Schreibe dazu die Möglichkeiten systematisch auf.
- Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn ein fünfter Stuhl hinzukommt?

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Bild 10: „Platzhalter 2“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Kombinatorik

Ermitteln der Anzahl von Möglichkeiten I (Variationen ohne Wiederholung) | 17

Fünf Hobbysegler starten jedes Jahr zu einer mehrtägigen Segeltour.
Vor dem Start losen sie den Kapitän und einen Steuermann aus.
Das erste Los bestimmt den Kapitän, das zweite den Steuermann.

Der Einfachheit halber werden die fünf Segler mit den Buchstaben A, B, C, D, E benannt.
Mögliche Paare mit Kapitän + Steuermann sollen als Klammer aufgeschrieben werden.
Der Kapitän steht an erster Stelle, an zweiter Stelle steht der Steuermann, z. B. (D; B).

- Schreibe alle möglichen Paare auf, bei denen Segler C der Kapitän ist.
- Überlege, wie viele verschiedene Kapitäne möglich wären.
- Zu jedem Kapitän sind mehrere Steuermänner möglich, wie viele jeweils?
- Finde heraus, wie viele Varianten „Kapitän und Steuermann“ es geben muss. Begründe.
- Wie verändert sich die Anzahl, wenn aus 6 Seglern gewählt wird? Erkläre.
- In einem anderen Boot sind es 10 Segler. Sie losen.
  Erkläre, wie viele Varianten „Kapitän und Steuermann“ es dann geben muss.
- Nun sollen drei Positionen (z. B. 1. Los = Kapitän, 2. Los = Steuermann und 3. Los = Koch) aus zehn Leuten gelost werden. Erkläre, wie man die Anzahl aller möglichen Teams berechnen kann.

Bild 11: „Segelboot“, pixabay.com, CC0

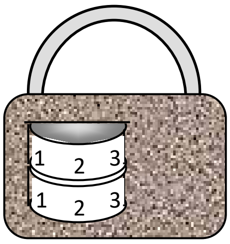
Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Daten & Zufall
Sekundarstufe I

Idee der Kombinatorik

Bestimmen der Anzahl von Möglichkeiten II (Variation mit Wiederholung) | 18

Ein (sehr einfaches) Kombinationsschloss besteht aus 2 Ringen.
Jeder Ring enthält die Ziffern 1, 2 und 3.
Nur wenn jeder Ring in der richtigen Position ist, öffnet das Schloss.



- Wie viele mögliche Ziffernkombinationen gibt es? Schreibe sie auf.
- In einem anderen Schloss sind in 2 Ringen 4 verschiedene Ziffern möglich.
  Wie viele Ziffernkombinationen gibt es dann? Erkläre.
- Jetzt stehen auf den 2 Ringen die Ziffern 0 – 9.
  Wie viele Ziffernkombinationen gibt es dann? Erkläre.
- In einem anderen Schloss mit 2 Ringen stehen auf einem Ring die Ziffern 1 – 9 und auf dem zweiten Ring die Ziffern 0 – 9. Wie viele Ziffernkombinationen gibt es dann? Erkläre.
- Ein handelsübliches Fahrradschloss hat 4 Ringe mit jeweils 10 verschiedenen Ziffern.
  Erkläre, wie man die Anzahl aller möglichen Ziffernkombinationen berechnen kann.

Bild 12: „Zahlenschloss“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Impressum

Herausgeber
Landesinstitut für Schule und Medien
Berlin-Brandenburg (LISUM)
14974 Ludwigsfelde-Struveshof
Tel.: 03378 209-0
Fax: 03378 209-149
www.lisum.berlin-brandenburg.de

Autorinnen und Autoren:
Barbara Becker, Jelka Domche, Ute Freibrodt, Ines Fröhlich, Heike Janke, Prof. Ulrich Kortenkamp, Prof. Ana Kuzle, Steffen Meyer, Susanne Mielke, Kerstin Mierig, Gretel Ost, Petra Radefahrt, Mike Reblin, Petra Schulte, Steffen Tschakert, Leona Velleuer, Grit Weber, Daniela Witt
Redaktion: Ute Freibrodt, Ines Fröhlich, Steffen Tschakert

Grafiken: Sybille Roßmann

Herstellung: Salzland Druck Staßfurt

ISBN 978-3-944541-46-4