FACHBRIEF NR. 26

MATHEMATIK

Themenschwerpunkt:

Die Abiturprüfung im Schuljahr 2024/2025

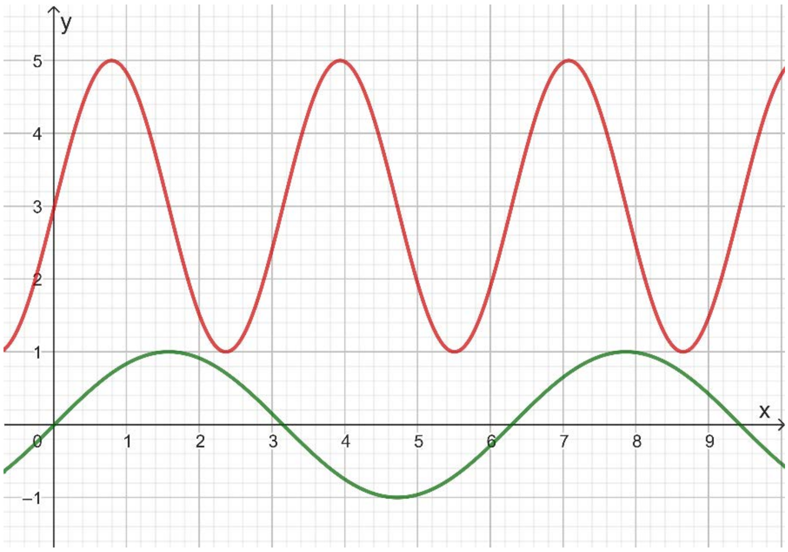


Abbildung: SenBJF 2023

Die Fachverantwortlichen werden gebeten, den Fachbrief den unterrichtenden Kolleginnen und Kollegen in geeigneter Form zur Verfügung zu stellen.
Zeitgleich wird er veröffentlicht unter:

http://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fachbriefe-bln

Ihre Ansprechpartnerin/Ihr Ansprechpartner in der Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Familie:

Ralf Punkenburg (Fachaufsicht Mathematik) Ralf.Punkenburg@senbjf.berlin.de

Kerstin Mahr Kerstin.Mahr@senbjf.berlin.de

Sehr geehrte Damen und Herren, liebe Kolleginnen und Kollegen,

zum Schuljahresbeginn erhalten Sie in diesem Fachbrief Informationen und Hinweise für die Arbeit im Fachbereich, für Ihren Unterricht und die Vorbereitung der Schülerinnen und Schüler auf die Prüfungen in diesem und den kommenden Schuljahren.

Für die schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik werden nun weitere Regelungen umgesetzt, die länderübergreifend vereinbart worden sind. Bei den schriftlichen Arbeiten für die Schulabschlüsse in der Sekundarstufe I entfallen nun alle Pandemie-bedingten Sonderregelungen, es gelten wieder die fachlichen Vorgaben und die Bearbeitungszeiten aus der Zeit vor der Corona-Pandemie.

Ich wünsche Ihnen einen guten Start in das neue Schuljahr.

Mit freundlichen Grüßen

Inhalt:

Anlagen:

Beispielaufgaben zur schriftlichen Abiturprüfung

Dokument mit mathematischen Formeln

1 Die schriftliche Abiturprüfung im Schuljahr 2023/2024

Wie bereits im Fachbrief Nr. 25 angekündigt worden ist, gibt es in der schriftlichen Abiturprüfung ab dem Jahr 2024 Wahlmöglichkeiten im hilfsmittelfreien Aufgabenteil[1]. Diese Regelung wurde in den Gremien der Kultusministerkonferenz (KMK) vereinbart und wird daher selbstverständlich auch in Berlin umgesetzt. Die Einführung dieser Wahlmöglichkeiten hat zur Folge, dass es bei Verteilung der Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche leichte Verschiebungen gibt. Es gilt jedoch unverändert die Vorgabe der Bildungsstandards: *„Der Schwerpunkt der zu erbringenden Prüfungsleistungen liegt im Anforderungsbereich II. Darüber hinaus sind die Anforderungsbereiche I und III zu berücksichtigen. Im Prüfungsfach auf grundlegendem Anforderungsniveau sind die Anforderungsbereiche I und II stärker zu akzentuieren, auf erhöhtem Anforderungsniveau sind die Anforderungsbereiche II und III stärker zu akzentuieren.“*
Die ländereigenen Prüfungsaufgaben werden alle Länder nun jedoch analog zu den Poolaufgaben gestalten: *„Die Aufgaben des ländergemeinsamen Abituraufgabenpools stellen eine mögliche Umsetzung der Bildungsstandards dar. Bei der Verteilung der Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche orientieren sich die ländereigenen Aufgaben an der Struktur, die die Aufgaben des Abituraufgabenpools aufweisen.“*

Zu den Angaben in diesem Kapitel werden alle Schulen ein Schreiben erhalten, in dem die bisherigen Regelungen der AV Prüfungen aktualisiert werden.

1.1 Wahlaufgaben im hilfsmittelfreien Aufgabenteil (Aufgabenteil 1)

Die Wahlmöglichkeiten im hilfsmittelfreien Aufgabenteil (OHiMi) wurden bereits im Fachbrief Nr. 25 dargestellt. Zu beachten ist, dass es zwei „Typen“ von hilfsmittelfreien Aufgaben gibt: Solche, die keinen Anteil im Anforderungsbereich III haben (Aufgabengruppe 1) und solche mit einem Anteil im AFB III (Aufgabengruppe 2). Hier nochmals die Übersicht für Grund- und Leistungskurs:

Aufgabenwahl im OHiMi - Grundkurs	
Vorgelegt werden:	***Bearbeitet werden müssen:***
3 Aufgaben der Aufgabengruppe I (mit je 5 BE)	diese 3 Aufgaben
3 Aufgaben der Aufgabengruppe I (mit je 5 BE)	eine dieser 3 Aufgaben
3 Aufgaben der Aufgabengruppe II (mit je 5 BE)	eine dieser 3 Aufgaben
	also insgesamt 5 Aufgaben mit 25 BE

Aufgabenwahl im OHiMi - Leistungskurs	
Vorgelegt werden:	***Bearbeitet werden müssen:***
4 Aufgaben der Aufgabengruppe I (mit je 5 BE)	diese 4 Aufgaben
6 Aufgaben der Aufgabengruppe II (mit je 5 BE)	2 von diesen 6 Aufgaben
	also insgesamt 6 Aufgaben mit 30 BE

[1] siehe Fachbrief Mathematik Nr. 25 (https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fachbriefe-mathematik)

Diese Wahlmöglichkeiten gestatten es den Prüflingen, Aufgaben zu bestimmten Sachgebieten zu bevorzugen. Die Pflicht- und Wahlaufgaben werden jedoch so verteilt, dass die Prüflinge auf jeden Fall Aufgaben zu allen drei Sachgebieten (Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik) bearbeiten müssen.

1.2 Aufgabenwahl im Aufgabenteil 2

Die Übersicht zu der Aufgabenwahl im Aufgabenteil 2 wurde bereits im Fachbrief Mathematik Nr. 25 dargestellt und wird an dieser Stelle lediglich wiederholt. Die Aufgaben haben damit (wieder) den Umfang, wie sie von der länderübergreifenden Kommission für den Aufgabenpool bereitgestellt werden. Aufgabenbeispiele aus den vergangenen Jahren werden vom Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB) veröffentlicht[2].

Aufgabenwahl im Teil 2 - Grundkurs	
Vorgelegt werden:	*Bearbeitet werden müssen:*
2 Aufgaben zur Analysis (mit je 35 BE)	eine dieser beiden Aufgaben
1 Aufgabe zur Analytischen Geometrie (mit 20 BE)	diese Aufgabe
1 Aufgabe zur Stochastik (mit 20 BE)	diese Aufgabe
	also insgesamt 3 Aufgaben mit 75 BE

Aufgabenwahl im Teil 2 - Leistungskurs	
Vorgelegt werden:	*Bearbeitet werden müssen:*
2 Aufgaben zur Analysis (mit je 40 BE)	eine dieser beiden Aufgaben
1 Aufgabe zur Analytischen Geometrie (mit 25 BE)	diese Aufgabe
1 Aufgabe zur Stochastik (mit 25 BE)	diese Aufgabe
	also insgesamt 3 Aufgaben mit 90 BE

Die Prüfungsklausuren haben also wie bisher insgesamt 100 BE im Grundkurs und 120 BE im Leistungskurs.

1.3 Bearbeitungszeiten

Ab dem Schuljahr 2023/2024 gelten wieder die Bearbeitungszeiten, die länderübergreifend in den Vereinbarungen der KMK festgelegt sind. Da die Prüflinge sowohl im hilfsmittelfreien Teil als auch im Teil 2 Wahlmöglichkeiten haben, kann die Bearbeitungszeit in beiden Teilen jeweils um 30 Minuten verlängert werden. Auch wenn dadurch die insgesamt zur Verfügung stehende Bearbeitungszeit weiter ausgedehnt wird, wurde für Berlin und Brandenburg entschieden, diese Möglichkeit zu nutzen. Also gilt:

Grundkurs: **Bearbeitungszeit 285 Minuten (inkl. Auswahlzeit)**
Leistungskurs: **Bearbeitungszeit 330 Minuten (inkl. Auswahlzeit)**

[2] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/

Zu Beginn der Bearbeitungszeit werden alle Aufgaben ausgegeben.

Neu (also anders als bisher!) ist, dass jede Schülerin und jeder Schüler individuell über die Abgabe der Bearbeitung der hilfsmittelfreien Aufgaben entscheidet und die zulässigen Hilfsmittel (Formelsammlung/Formeldokument, Taschenrechner/CAS-Gerät) unmittelbar nach der Abgabe erhält. Dieser Austausch muss nicht „sekundengenau", jedoch zügig erfolgen. Die hilfsmittelfreien Aufgaben müssen jedoch spätestens 90 Minuten (für den Grundkurs) bzw. 100 Minuten (für den Leistungskurs) nach Beginn der Bearbeitungszeit abgegeben werden.

2 Die Abiturprüfung im Fach Mathematik ab dem Schuljahr 2024/2025

Alle Regelungen für die Abiturprüfung im Schuljahr 2023/2024 bleiben auch für die Prüfung im Schuljahr 2024/2025 und die Folgejahre bestehen. Weitere, zusätzliche Änderungen ab dem Schuljahr 2024/2025 werden im Folgenden erläutert.

2.1. Einheitliches Formeldokument für die Abiturprüfung im Fach Mathematik

Für die Abiturprüfung im Fach Mathematik ist ab dem Prüfungsdurchgang im Schuljahr 2024/25 nur noch ein Formeldokument im Land Berlin zugelassen. Die Verwendung von anderen Formelsammlungen oder eine Ergänzung bzw. Veränderung des Dokuments ist nicht gestattet. Dies gilt für die schriftliche Abiturprüfung, jedoch ebenfalls für Prüfungen im 4. Prüfungsfach und für zusätzliche mündliche Prüfungen. Das Formeldokument ist diesem Fachbrief als Anhang beigefügt[3].

Die Auswahl der Inhalte und die Gestaltung dieses Formeldokuments wurden in intensiven Beratungen länderübergreifend abgestimmt. Auch wenn dieses im Umfang sehr reduzierte Dokument vermutlich nicht auf die ungeteilte Zustimmung aller Berliner Mathematiklehrkräfte treffen wird, ist es sicherlich ein wichtiger Fortschritt, dass nun bundesweit ein einheitliches Dokument verwendet wird, das gleiche Prüfungsbedingungen gewährleistet.

Ab dem Schuljahr 2024/2025 ist dieses Formeldokument in Klausuren der Kurshalbjahre Q3 und Q4 verbindlich, ausschließlich und unverändert zu verwenden. Die Verwendung auch in den Kurshalbjahren Q1 und Q2 wird nachdrücklich empfohlen. Für eine Nutzung anderer Formeldokumente (z. B. der bisher gebräuchlichen Tafelwerke) im Unterricht gibt es sehr wenige Anlässe, die didaktisch begründet werden könnten.

Für die Abiturprüfung sollte jede Schule einen Satz dieses Formeldokuments bereitstellen. Es ist sicherzustellen, dass nur diese Formeldokumente – ohne Notizen, Anmerkungen oder Zusätze – eingesetzt und verwendet werden.

[3] Das Formeldokument für Mathematik ist identisch mit dem Teil zur Mathematik der mathematisch-naturwissenschaftlichen Formelsammlung, die für die Verwendung in der Abiturprüfung der naturwissenschaftlichen Fächer vorgesehen ist. Im Unterricht und in der Abiturprüfung im Fach Mathematik kann auch diese Version verwendet werden. Siehe https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/abitur/dokumente/naturwissenschaften/

2.2. Prüfungsschwerpunkte und Hinweise zu den Themengebieten

Um die Ausführungen des aktuellen Rahmenlehrplans für die Sekundarstufe II im Hinblick auf die schriftliche Abiturprüfung zu schärfen, sind die Prüfungsschwerpunkte[4] für das Jahr 2024/2025 umfangreicher und inhaltlich konkreter gestaltet worden.

Der aktuelle Berliner Rahmenlehrplan für die Sekundarstufe II basiert auf den Vorgaben der Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife[5], ist jedoch an mehreren Stellen sehr detailliert in den inhaltlichen Angaben. Die inhaltliche Fokussierung der Abituraufgaben auf den Kern der Bildungsstandards, die aus der Verpflichtung zur Verwendung von Aufgaben aus dem Pool resultiert, erfordert nun wohlüberlegte und angemessene Entscheidungen für die Schwerpunktsetzung im Unterricht. Nicht alle Themen und Inhalte des aktuellen Rahmenlehrplans sind im Hinblick auf die schriftliche Abiturprüfung von gleicher Bedeutung.

Die gründliche Beachtung der Prüfungsschwerpunkte für das Abitur 2025 erleichtert die Vorbereitung auf die Prüfung im Unterricht. Dabei ist zu beachten, dass sich die Rahmenlehrpläne für Berlin und Brandenburg geringfügig unterscheiden. Daher gibt es auch bei den Prüfungsschwerpunkten an einzelnen Stellen unterschiedliche Vorgaben.

Die Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife sind teilweise so allgemein formuliert, dass der inhaltliche Umfang und das Niveau konkreter Aufgabenstellungen daraus nicht eindeutig hervorgehen. Diese fachlich-inhaltliche Uneindeutigkeit hat zu Unterschieden in den Rahmenlehrplänen der Länder geführt, die bei der Entwicklung der Poolaufgaben zutage getreten sind. Um diese Unterschiede auszugleichen und zu Prüfungsaufgaben zu gelangen, die in allen Ländern eingesetzt werden können, wurden im Januar 2022 durch die länderübergreifende Kommission beim IQB konkrete fachlich-inhaltliche Vorgaben in dem Dokument *„Inhaltliche Vereinbarungen zur Gestaltung der Aufgaben“*[6] festgelegt.

Die Konkretisierungen in diesem Dokument zeigen, dass die inhaltliche Tiefe, auf der im Land Berlin im erhöhten Niveau gebrochen-rationale Funktionen und Logarithmusfunktionen unterrichtet werden, die erwartete inhaltliche Tiefe deutlich übersteigt. Im Unterricht der Leistungskurse sollten hingegen trigonometrische Funktionen intensiver behandelt werden. Beispielaufgaben zur Illustration der inhaltlichen Tiefe befinden sich im Anhang des Fachbriefs.

Aufgaben zur Analysis aus dem Aufgabenpool bestehen typischerweise aus zwei Aufgabenteilen. Trigonometrische Funktionen sind nicht der Schwerpunkt der Aufgabe, können jedoch in Teilaufgaben vorkommen. Eine umfangreiche Kurvenuntersuchung einer komplexen trigonometrischen Funktion wird in Poolaufgaben nicht verlangt.

[4] siehe Prüfungsschwerpunkte für das Abitur im Schuljahr 2024/2025 unter https://www.berlin.de/sen/bildung/schule/pruefungen-und-abschluesse/abitur/
[5] siehe https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/subject/
[6] siehe https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/dokumente/mathematik/

Im Folgenden werden inhaltsbezogene Kompetenzen des Berliner Rahmenlehrplans und der Prüfungsschwerpunkte an einigen Stellen konkretisiert, um eine Passung mit möglichen Aufgabenstellungen in der Abiturprüfung darzustellen.

Es wird vorausgesetzt, dass Prüflinge

- den Flächeninhalt unter einem Funktionsgraphen näherungsweise durch Zählen von Flächeneinheitsquadraten bestimmen können (siehe Beispielaufgaben im Anhang),
- die Zusammenhänge zwischen den Graphen der Funktion, der Ableitung und der Stammfunktion erläutern (siehe Beispielaufgaben im Anhang) und diese z. B. in Skizzen sachgerecht darstellen können,
- Schnittwinkel zwischen Funktionsgraphen bestimmen können,
- auch auf dem grundlegenden Niveau Werte von Parametern in Funktionsgleichungen aus vorgegebenen Eigenschaften bestimmen können (siehe Beispielaufgaben im Anhang),
- Teilverhältnisse von Strecken und den Mittelpunkt einer Strecke bestimmen können,
- Gleichungssysteme mit bis zu drei Variablen lösen können (die sich im grundlegenden Niveau schnell auf zwei Variable reduzieren lassen und im erhöhten Niveau übersichtlich mit dem Additionsverfahren gelöst werden können),
- auf erhöhtem Niveau Differential- und Integralrechnung zu grundlegenden gebrochen-rationalen Funktionen der Form $f(x) = \frac{1}{(ax+b)^n}; n \in \mathbb{N}; a, b \in \mathbb{R}$ beherrschen,
- auf erhöhtem Niveau Differential- und Integralrechnung zu Logarithmusfunktionen der Form $f(x) = \ln(ax + b); a, b \in \mathbb{R}$ beherrschen,
- auf erhöhtem Niveau Differential- und Integralrechnung zu grundlegenden Sinus- und Kosinusfunktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin\big(b \cdot (x - c)\big) + d$ und $g(x) = a \cdot \cos\big(b \cdot (x - c)\big) + d; a, b, c, d \in \mathbb{R}$ beherrschen.

Es wird <u>nicht</u> vorausgesetzt, dass Prüflinge

- Gleichungen unter Verwendung der Polynomdivision lösen,
- ein systematisches Verfahren zum Lösen von Gleichungssystemen (z. B. Gauß-Algorithmus) kennen,
- die Verfahren der partiellen Integration und der Integration durch Substitution kennen (Ausnahme: die Integration durch lineare Substitution),
- die Differential- und Integralrechnung zu allgemeinen gebrochen-rationalen Funktionen und allgemeinen Logarithmusfunktionen beherrschen,
- auf dem grundlegenden Niveau Funktionenscharen kennen (jedoch Parameter in Funktionsgleichungen bestimmen können, siehe oben),
- mit Ausnahme des Zusammenhangs $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$ Additionstheoreme kennen und anwenden,
- die Hessesche Normalform zur Abstandberechnung kennen.

2.3. Hinweise zu formalen Schreibweisen

Ab der Abiturprüfung 2025 müssen 50 % der schriftlichen Abituraufgaben aus dem Aufgabenpool der Länder übernommen werden, ohne dass auch geringfügige Änderungen vorgenommen werden dürfen. Daher ist es notwendig, dass die formalen Schreibweisen, die in den Poolaufgaben benutzt werden, den Prüflingen im Land Berlin bekannt sind und von ihnen sicher verwendet werden können.
Grundsätzlich hat man sich länderübergreifend darauf verständigt, dass alle symbolischen Darstellungen, die Bestandteil des Dokuments mit mathematischen Formeln[7] sind, in den schriftlichen Abituraufgaben vorkommen können. Daher ist es notwendig, das Formeldokument im Unterricht regelmäßig zu nutzen, die darin verwendeten Schreibweisen einzuführen und zu besprechen.
Darüber hinaus müssen folgende Darstellungen beherrscht werden:

- verschiedene Symbolschreibweisen von Funktionen,
  z. B. $f(x) = x^3 - x^2$ und $f: x \mapsto x^3 - x^2$,
- die Verwendung des Summenzeichens, z. B. $P(X \leq 50) = \sum_{k=0}^{50} \binom{75}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{50-k}$,
- die Verwendung der Symbolschreibweise von Ereignissen und deren Verknüpfungen,
  z. B. $A, \overline{B}, A \setminus B, A \cap \overline{B}, \overline{A \cup \overline{B}}$,
- verschiedene Bezeichnungen der Koordinatenachsen (x-, y- und z-Achse; x_1-, x_2- und x_3-Achse), oder z. B. in der Analysis Koordinatensysteme mit den Achsenbezeichnungen t und h und Funktionsgleichungen z. B. der Form $h(t) = 1 - t^2$.

2.4. Hinweise zu Themen und Inhalten aus der Sekundarstufe I

In der schriftlichen Abiturprüfungen können selbstverständlich Aufgaben vorkommen, die sich inhaltlich auf Themenbereiche der Sekundarstufe I[8] beziehen.

Beispiele für Themenbereiche:

- Einfluss von Parametern auf den Verlauf von Graphen (Streckung/Stauchung, Verschiebung, Symmetrie) (siehe Beispielaufgaben im Anhang),
  Prüflinge sollen
  - sowohl die Verschiebung in Richtung der x-Achse als auch in Richtung der y-Achse beherrschen,
  - wissen, dass eine Streckung mit dem Faktor –1 eine Spiegelung des Graphen entlang der x-Achse bewirkt,
  - wissen, dass die Substitution von x durch –x im Funktionsterm bewirkt, dass der Graph an der y-Achse gespiegelt wird.

[7] siehe Anhang
[8] siehe Rahmenlehrplan Teil C Mathematik unter https://www.berlin.de/sen/bildung/unterricht/faecher-rahmenlehrplaene/rahmenlehrplaene/

- Trigonometrische Funktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin\big(b \cdot (x - c)\big) + d$ und $g(x) = a \cdot \cos(b \cdot x)$,
  Prüflinge sollen für Funktionen dieser Form
  - aus einer Funktionsgleichung den Funktionsgraphen skizzieren können,
  - aus einem Funktionsgraphen die Funktionsgleichung aufstellen können,
  - aus der Funktionsgleichung charakteristische Punkte bestimmen können.
- Exponentialfunktionen der Form $f(x) = a \cdot b^x + c$,
- Ähnlichkeit (insbesondere Dreiecke),
- Flächenberechnungen,
- Körperberechnungen und Darstellungen,

2.5. Hinweise zu Formulierungen in den Aufgabenstellungen

Bei der Bearbeitung der Abituraufgaben ist es notwendig, die Aufgabenstellungen gründlich zu lesen, da sich aus der Formulierung der Aufgabenstellung der Umfang der Bearbeitung schlussfolgern lässt. Insbesondere bei Aufgabenstellungen zu Extrem- und Wendepunkten hängt der Umfang der Bearbeitung stark von der Aufgabenstellung ab. Oft ist die Untersuchung der Existenz eines Extrem- oder Wendepunkts nicht erforderlich (siehe Beispielaufgaben im Anhang).

Grundsätzlich gilt: Wenn der Aufgabentext eine Aussage enthält (z. B. „Der Graph hat einen Hochpunkt.“ oder „Das Viereck ist eine Raute.“), dann kann diese Aussage als wahr betrachtet werden, muss also nicht nachgewiesen werden.

2.6. Hinweise zur Korrektur und Bewertung

In den Erwartungshorizonten wird grundsätzlich nur eine von u. U. mehreren möglichen Lösungen dargestellt. Bei Lösungswegen sind in manchen Fällen (insbesondere bei „Standard-Aufgaben“) nicht alle Details vollständig dargestellt.

Bei einer abweichenden Bearbeitung muss die begutachtende Lehrkraft eigenständig prüfen, ob die Bearbeitung gleichwertig ist. Wenn Begründungen oder Erläuterungen verlangt werden, gibt es häufig eine große Bandbreite von Antwortmöglichkeiten, die als vollständig und korrekt bewertet werden können, auch wenn sich diese deutlich von der im Erwartungshorizont dargestellten Antwort unterscheiden.

Bei allen Bewertungen ist das entscheidende Kriterium, in wie weit die Bearbeitung sinnvoll, sachgerecht und zielgerichtet ist. Rechnerische und formale Mängel sind nachrangig zu bewerten. Dies bedeutet insbesondere bei Teilaufgaben mit wenigen Bewertungseinheiten, dass bei rechnerischen oder formalen Mängeln nicht zwingend ein Abzug von Bewertungseinheiten vorgenommen werden muss.

In der Regel werden Bewertungseinheiten nicht kleinschrittig zugeordnet, sodass didaktische Aspekte bei der Bewertung berücksichtigt werden können. Eine Zuordnung von einzelnen Bewertungseinheiten zu (rechnerischen) Teilschritten eines Bearbeitungsweges ist nicht geeignet, um mathematische Leistungen kompetenzorientiert zu bewerten.
Auch bei Bearbeitungen, bei denen ein „falschen Ansatz“ gewählt wurde oder unzulässige Voraussetzungen angenommen wurden, kann es Anteile geben, bei denen Schülerinnen oder Schüler Kenntnisse und Fähigkeiten im Zusammenhang mit der Aufgabenstellung zeigen. Solche Teilleistungen sind dann positiv zu bewerten.

Zu einigen Aspekten der Bewertung gab es in der letzten Zeit Fragen, die hier kurz beantwortet werden sollen:

- Bei Angaben von Zeitpunkten oder Zeitspannen ist die Angabe als Uhrzeit (im Format hh:mm) und die Angabe als Dezimalzahl (1,8 h oder 108 Minuten – oder z. B. auch 48 Minuten nach 14 Uhr) als gleichwertig anzusehen. Bei solchen Angaben sind sinnvolle Rundungen zulässig.
- Bei der grafischen Bestimmung des Graphen der Ableitungsfunktion darf die Lösung in der Genauigkeit vom Erwartungshorizont abweichen. Die Lage der Nullstellen und Extrempunkte sollten jedoch annährend stimmen und an einzelnen Punkten (bspw. den Wendepunkten) sollte die Steigung der Funktion näherungsweise durch Ermittlung der Steigung der Tangente bestimmt worden sein.
- Ermitteln mithilfe einer Abbildung bedeutet stets, dass etwas näherungsweise ermittelt wird.
- Es ist zulässig, mit gerundeten Werten weiter zu arbeiten oder gerundete Werte als Ergebnis anzugeben (ohne die vorgenommene Rundung weiter zu vermerken).
  Z. B.: $f(3) = \frac{1}{2}e^3 \approx 10 \;\Rightarrow\; H(3|10)$.
- In Sachzusammenhängen bei Aufgaben zur analytischen Geometrie kann als gleichwertig betrachtet werden, wenn ein Ergebnis als Punkt oder als Ortsvektor zu diesem Punkt angegeben wird (z. B. Angabe von $P(1|2|3)$ oder von $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$).
- Bei Aufgabenstellungen, bei denen Größen als Maßangaben interpretiert werden, dürfen Berechnungen nur mit den Maßzahlen (also ohne Maßeinheiten) ausgeführt werden. Betrachtungen zu Maßeinheiten werden nicht verlangt. Umrechnungen von gebräuchlichen Maßeinheiten (z. B. von kg und g oder cm² und m²) können jedoch vorkommen.

3 Geeignete CAS-Geräte für Einsatz in der Abiturprüfung

Im vergangenen Jahr gab es mehrere Rückfragen zur Verwendung von CAS-Geräten im Abitur, deren Beantwortung folgendermaßen zusammengefasst werden kann:

- Es sind sowohl CAS-Geräte („handhelds“) als auch CAS-Apps, die auf PCs oder Tabletts laufen, in der Prüfung zugelassen. Ohne eine ausdrückliche Genehmigung durch die Fachaufsicht Mathematik dürfen nur die Geräte TI-Nspire (Texas Instruments) oder Class-Pad (Casio) und die GeoGebra CAS-App verwendet werden. Die Nutzung anderer Geräte oder anderer Software muss rechtzeitig, d. h. zu Beginn der Qualifikationsphase, beantragt werden (vgl. Schreiben vom 25.02.2020).
- Bei der Verwendung von CAS-Apps muss ausgeschlossen werden, dass das Gerät anderweitig verwendet werden kann. Dies kann beispielsweise durch die Verwendung eines Prüfungsmodus erfolgen. Die Einhaltung dieser Regel ist im Verlauf der Prüfung zu kontrollieren.
- Falls GeoGebra als CAS-App verwendet wird, ist <u>ausschließlich</u> der CAS Rechner von GeoGebra im Prüfungsmodus zugelassen. Die Funktionalitäten aus anderen GeoGebra - Applets (bspw. GeoGebra Classic oder GeoGebra 3D) sind bei der Bearbeitung von Prüfungsaufgaben nicht zugelassen.

4 Klausuren in der Qualifikationsphase

Für die Klausuren in der Qualifikationsphase werden zwei Regelungen, die als Sonderregelungen in den vergangenen Jahren eingeführt worden sind, als Dauerregelungen in die Verordnung über die gymnasiale Oberstufe Berlin (VO-GO) übernommen[9]:

- Im vierten Kurshalbjahr schreiben die Schülerinnen und Schüler nur in ihren Prüfungsfächern Klausuren.
- Für die Klausur nach VO-GO § 14(3), die „die in der schriftlichen Abiturprüfung für das jeweilige Fach festgesetzten Zeitvorgaben und inhaltlichen Anforderungen“ erfüllt, ist eine Bearbeitungszeit von 180 Minuten ausreichend.

Einige Hinweise zur Gestaltung von Klausuren im Fach Mathematik sind bereits im Fachbrief Nr. 22 gegeben worden. Für Grund- und Leistungskurse gilt, dass sich die Klausuren in den Kurshalbjahren hinsichtlich der Aufgabenformate im Verlauf der Qualifikationsphase zunehmend an den Prüfungsklausuren in der Abiturprüfung orientieren sollen.

In der Regel haben Klausuren in den Kurshalbjahren einige Aufgaben, die ohne Hilfsmittel bearbeitet werden müssen. Für Ausnahmen davon gibt es kaum Begründungen, in Kursen mit CAS müssen hilfsmittelfreie Klausuraufgaben unbedingt vorkommen.

[9] Diese Änderungen der VO-GO werden zeitnah veröffentlicht.

Bei den Abiturklausuren werden je Bewertungseinheit 2,25 Minuten Bearbeitungszeit angesetzt. Daran sollten sich auch die Klausuren in den Kurshalbjahren orientieren. Abweichungen sind möglich, vor allem dann, wenn überschaubare Aufgabenformate gewählt werden.

Die Hinweise aus Abschnitt 2.6 dieses Fachbriefes zu den Grundsätzen der Bewertung gelten ebenfalls für Klausuren in den Kurshalbjahren.

Grundsätzlich dienen Klausuren „zur Feststellung der Lern-, Leistungs- und Kompetenzentwicklung und Vorbereitung auf die Anforderungen der Abiturprüfung“ (VO-GO, § 14(1)), sie beziehen sich demnach fachlich-inhaltlich auf den vorangegangenen Unterricht, sind aber gleichzeitig auf die Anforderungen der allgemeinen Hochschulreife ausgerichtet. Daher ist es nicht nur zulässig, sondern vielmehr anzustreben, dass Klausuren auch Themen und Inhalte aufgreifen, die laut Rahmenlehrplan in vorangegangenen Kurshalbjahren zu bearbeiten waren. Voraussetzung dafür ist, dass solche Themen eben auch im vorangegangenen Unterricht, z. B. in gemischten Übungen oder Wiederholungen, angesprochen worden sind.

Klausuren in den Kurshalbjahren müssen sich – wie der Unterricht – schwerpunktmäßig auf die Themen und Inhalte gemäß Rahmenlehrplan beziehen. Aufgaben zu Themen und Inhalten vorangegangener Kurshalbjahre können jedoch einen Anteil von höchstens ca. 1/3 des gesamten Umfangs der Klausur haben, sofern diese Themen und Inhalte im vorangegangenen Unterricht angesprochen wurden. Die Schülerinnen und Schüler müssen über die Anforderungen in Klausuren, also auch über das inhaltliche Spektrum möglicher Aufgabenstellungen, informiert werden.

5 Zentrale schriftliche Arbeiten in der Sekundarstufe I

Für die LEKzA im Jahr 2022 sowie für die eBBR/MSA-Prüfungsarbeiten und die vergleichenden Arbeiten zur Berufsbildungsreife (VA) im Jahr 2023 sind fachliche Hinweise veröffentlicht worden, die eine Schwerpunktsetzung im Unterricht und eine gezielte Vorbereitung der Schülerinnen und Schüler unterstützen sollten. Für das Fach Mathematik sind in dem Hinweisschreiben aus dem März 2021 Themenbereiche benannt worden, zu denen in diesen schriftlichen Arbeiten keine Aufgaben gestellt wurden. Gleichzeitig wurde die Bearbeitungszeit um 30 Minuten verlängert.

Für das Schuljahr 2023/2024 gelten diese Sonderregelungen nicht mehr, die Regelungen aus der „Vor-Corona-Zeit“ treten wieder in Kraft. Dazu wird hier ein kurzer Überblick gegeben.

5.1 Prüfungsarbeit eBBR/MSA

- Bearbeitungszeit: 135 Minuten
- Aufgaben mit insgesamt 60 Punkten, für die erweiterte Berufsbildungsreife entsprechen 40 Punkte 100 % der Gesamtleistung, Aufgaben zu anspruchsvolleren Themen sind mit einem Stern (*) gekennzeichnet.

Die Aufgaben der eBBR/MSA-Prüfungsarbeit können sich auf alle Themen des Rahmenlehrplans bis einschließlich der Niveaustufe G beziehen, mit Ausnahme von:

- Funktionen des Typs $y = a\sin(x)$ im Abschnitt Zuordnungen und Funktionen,
- Nutzung des Kosinussatzes.

5.2 Vergleichende Arbeiten

- Bearbeitungszeit: 90 Minuten,
- Aufgaben mit insgesamt 51 Punkten, für den berufsorientierenden Abschluss entsprechen 34 Punkte 100 % der Gesamtleistung, Aufgaben zu anspruchsvolleren Themen sind mit einem Stern (*) gekennzeichnet.

Die Aufgaben der vergleichenden Arbeit können sich auf alle Themen des Rahmenlehrplans bis einschließlich der Niveaustufe F beziehen, mit Ausnahme von:

- Merkmale linearer Funktionen (Steigung, y-Achsenabschnitt),
- lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen,
- Dreieckskonstruktionen, Pyramide, Kegel, Kugel,
- höhere Potenzen (als dritte),
- Modalwert, Median.

Aufgabenstellungen mit linearen funktionalen Zusammenhängen können jedoch in Sachzusammenhängen vorkommen, wobei auch graphische Darstellungen anzufertigen oder zu interpretieren sind und lineare Gleichungen aufzustellen und zu lösen sein können.

5.3 Hilfsmittel

Als Hilfsmittel zugelassen sind bei den zentralen Arbeiten in der Sekundarstufe I:

- das bekannte Formelblatt (ohne jede Zusätze oder Veränderungen),
- ein übliches Geodreieck und
- ein wissenschaftlicher Standard-Taschenrechner (nicht grafikfähig, nicht programmierbar, nicht symbolisch rechnend).

Als Hilfsmittel nicht zugelassen sind Schablonen für die Normalparabel (auch wenn diese im Unterricht benutzt worden sind) und Formelsammlungen.

In jedem Prüfungsraum müssen für die Schülerinnen und Schülern einige Wörterbücher der deutschen Sprache zur Verfügung stehen. Ein Zirkel ist für die Bearbeitung von Aufgaben nicht erforderlich.

6 Weiterentwicklung der Bildungsstandards für Mathematik (für die Grundschule und die Sekundarstufe I) – Überarbeitung des Rahmenlehrplans

Bereits im Fachbrief Nr. 25 wurde dargelegt, dass die Bildungsstandards für den Primarbereich, den ersten Schulabschluss (ESA) und den Mittleren Schulabschluss (MSA) für die Fächer Deutsch und Mathematik überarbeitet wurden und das Kompetenzmodell um die prozessbezogene Kompetenz „Mit Medien mathematisch arbeiten“ ergänzt wurde.

Auf der Grundlage dieser weiterentwickelten Bildungsstandards wurden nun in den vergangenen Monaten Ergänzungen oder Änderungen des Rahmenlehrplans 1 – 10 Berlin Brandenburg entwickelt. Dies betrifft folgende Aspekte:

1. Die Formulierungen der inhaltsbezogenen und prozessbezogenen Kompetenzen wurden durch die Formulierungen in den Bildungsstandards ersetzt.
2. In einigen Fällen wurden einzelne Themen einer anderen Niveaustufe zugeordnet.
3. Themen und Inhalte wurden an einzelnen Stellen um Hinweise auf die Verwendung oder den Einsatz von Medien ergänzt.
4. Im Themenbereich „Daten und Zufall“ wurden auf der Niveaustufe F Histogramme ergänzt und auf der Niveaustufe G Vierfeldertafeln und bedingte Wahrscheinlichkeiten.

Der überarbeitete Rahmenlehrplan wird gegenwärtig redaktionell fertiggestellt. Eine Entwurfsfassung, in der die Veränderungen kenntlich gemacht werden, wird voraussichtlich noch im August 2023 auf dem Bildungsserver Berlin-Brandenburg veröffentlicht, zusammen mit einer Reihe von begleitenden Dokumenten zur Implementierung der Bildungsstandards. Für Berlin erfolgt die Unterrichtswirksamkeit gestaffelt, im Schuljahr 2024/2025 zunächst für die Klassenstufen 1 bis 3 sowie 7 und 8. Weitere Informationen erhalten alle Schulen mit der Veröffentlichung der überarbeiteten Version.

Lehrkräfte aus verschiedenen Bundesländern haben unter Federführung des IQB in Zusammenarbeit mit Fachdidaktikern Lernaufgaben zur Illustration der Bildungsstandards entwickelt, die im Unterricht genutzt werden können. Diese Aufgaben können im Unterricht eingesetzt werden und stehen bereits zum Download auf der Webseite des IQB bereit. [10]

[10] https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/WeiterentwicklungBiSta/Lernaufgaben/MatheSekI/

7 Lernausgangslage 7 (LAL 7) im Schuljahr 2023/2024[11]

Ab dem Schuljahr 2023/2024 steht nun wie angekündigt auch die LAL 7 Mathematik in digitaler Form zur Verfügung (digiLAL). In Papierform wird ab diesem Schuljahr keine LAL 7 für Mathematik bereitgestellt.

Die digiLAL-Mathematik besteht aus fünf Modulen, die die inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzbereiche (Leitideen) abdecken. Sie sollen jeweils vor dem Beginn der jeweiligen Reihe eingesetzt werden, weil sie erheben, ob die Kenntnisse und Fertigkeiten vorhanden sind, die nötig sind, um in der folgenden Unterrichtsreihe erfolgreich zu lernen. Beispielsweise sollte „Fit für Zuordnungen und Prozentrechnung?“ durchgeführt werden, bevor die Reihe zu Zuordnungen beginnt. Die fünf Module sind:

- Fit für Zuordnungen und Prozentrechnung? *(Leitidee Zahlen und Operationen)*
- Fit für Rationale Zahlen? *(Leitidee Zahlen und Operationen)*
- Fit für Terme, Gleichungen und Funktionen? *(Leitidee Gleichungen und Funktionen sowie Leitidee Zahlen und Operationen)*
- Fit für Geometrie? *(Leitidee Raum und Form sowie Leitidee Größen und Messen)*
- Fit für Daten und Stochastik? *(Leitidee Daten und Zufall)*

Für jedes Modul ist eine Bearbeitungszeit ca. 40 Minuten vorgesehen, so dass die Durchführung sicher in einer Unterrichtsstunde erfolgen kann. Alle Module werden vollständig digital angeboten und auch weitgehend automatisiert ausgewertet. Zum Teil werden Hilfsmittel (z. B. ein Geodreieck) digital interaktiv umgesetzt. Dazu gibt es kurze Einweisungen für die Schülerinnen und Schüler. Bei einigen offenen Aufgabestellungen ist eine nachträgliche Beurteilung durch die Lehrkraft erforderlich.

Es wird empfohlen, die Module „Fit für Zuordnungen und Prozentrechnung?“ sowie „Fit für rationale Zahlen?“ möglichst zeitnah zu Beginn des 7. Schuljahres durchzuführen. Die übrigen Module können dann je nach schulinternem Curriculum zu verschiedenen Zeiten genutzt werden. Eine Selbsteinschätzung der Schülerinnen und Schüler wird in der digiLAL-Mathematik nicht mehr abgefragt.

Die Rückmeldungen für die Lehrkräfte sowie für Schülerinnen, Schüler und Eltern erfolgen automatisiert. Die ausführlichen Rückmeldungen für Lehrkräfte enthalten konkrete Hinweise zur Aufarbeitung der diagnostizierten Schwächen mit didaktischen Kommentaren und Verlinkungen zu direkt einsetzbarem Material.

Die Bereitstellung der digiLAL-Mathematik erfolgt wie bei den anderen Fächern für alle Schulen über das ISQ-Portal (https://portal.isq-bb.de/). Hinweise zur Bereitstellung und Nutzung sowie zu Informationsveranstaltungen werden unter https://isq-bb.de/lal7 gegeben.

---

[11] Die Informationen zur Lernausgangslage 7 wurden bereits am 07.06.2023 in einem Schreiben an alle Schulen übermittelt.

8 Weitere Informationen

8.1 Fortbildungsinitiative QuaMath

Bereits im letzten Fachbrief wurde angekündigt, dass sich Berlin an der Fortbildungsinitiative „QuaMath“ (Unterrichts- und Fortbildungs-Qualität in Mathematik entwickeln) beteiligt. Im zweiten Halbjahr des Schuljahres 2023/2024 werden sich Teams aus Schulen für diese Initiative bewerben können. Informationen dazu werden folgen.

8.2 Nutzung von bettermarks

Im Schuljahr 2023/2024 kann bettermarks weiterhin von den öffentlichen Berliner Schulen genutzt werden, ohne dass dafür den Schulen Kosten entstehen. Ab diesem Schuljahr muss jedoch der Zugang über das Berliner Schulportal erfolgen, so dass kein gesonderter Account für bettermarks benötigt wird. Dadurch sind dann auch die Klassen bzw. Kurse für die jeweiligen Nutzer bereits vorbereitet.
Voraussetzung für die Nutzung von bettermarks über das Berliner Schulportal ist, dass die Lehrkraft für diesen Dienst in der Berliner Lehrkräfte-Unterrichts-Schul-Datenbank (LUSD) freigeschaltet ist. Diese Freischaltung darf nur für Lehrkräfte vorgenommen werden, die bettermarks auch tatsächlich einsetzen, da die Abrechnung der Kosten mit dem Anbieter auf der Grundlage der vorgenommenen Freischaltungen erfolgt.

Beispielaufgaben

1. Beispielaufgaben zur Bestimmung von Extrempunkten

Es hängt von der Formulierung der Aufgabenstellung ab, ob zusätzlich zu der Untersuchung der Nullstellen der 1. Ableitung auch die Existenz bzw. die Art des Extrempunktes bestimmt werden muss: In der Beispielaufgabe 1.1 wird die Untersuchung der Art des Extrempunktes verlangt, in der Beispielaufgabe 1.2 kann bei der Bearbeitung der Aufgabe sowohl auf die Untersuchung der Existenz des Hochpunkts als auch auf die Untersuchung der Art verzichtet werden, da die Aufgabenstellung auf die Grafik Bezug nimmt, die zweifelsfrei zeigt, dass ein Hochpunkt existiert.

Beispielaufgabe 1.1

1 a Zeigen Sie rechnerisch, dass der Punkt $(12\,|\,2160)$ ein Hochpunkt des Graphen von f ist und dass die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(0\,|\,0)$ parallel zur x-Achse verläuft. | 5

Quelle: https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2021/mathematik/grundlegend/
(Prüfungsteil B, Analysis, Aufgabe 2)

Beispielaufgabe 1.2

Die Abbildung 1 zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{10}x\cdot(3-x)\cdot e^{x}$ und $x\in\mathbb{R}$.

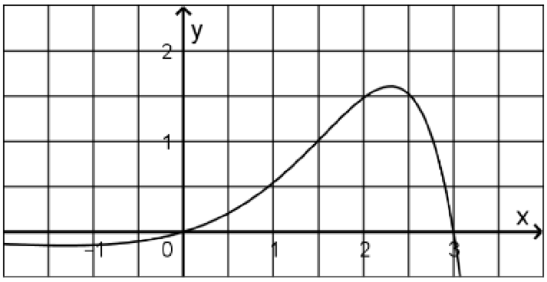


Abb. 1

1 Für die erste Ableitungsfunktion f' von f gilt $f'(x)=-\frac{1}{10}\cdot\left(x^2-x-3\right)\cdot e^{x}$.

a Geben Sie die Nullstellen von f an und berechnen Sie die Koordinaten des Hochpunkts des Graphen von f. | 4

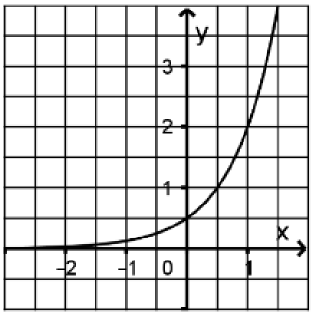
Quelle: https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2020/mathematik/grundlegend/
(Prüfungsteil B, Analysis, Aufgabe 4)

2. Beispielaufgaben zu Parametern in Funktionen

Sowohl in Leistungskursaufgaben als auch in Grundkursaufgaben können Parameter in Funktionstermen vorkommen. In Grundkursaufgaben werden diese Parameter im Unterschied zum Leistungskursaufgaben als ein „fester unbekannter Wert" aufgefasst, sodass der Aspekt der Funktionenschar bei Grundkursaufgaben nicht von Relevanz ist. Transformationen von Funktionen können ebenfalls Bestandteil von Leistungskurs- und Grundkursaufgaben sein.

Beispielaufgabe 2.1

	BE
a Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion $f: x \mapsto a \cdot b^x$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$. Bestimmen Sie die passenden Werte von a und b.	3
b Der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $g: x \mapsto 3^x$ wird um 2 in negative x-Richtung verschoben. Zeigen Sie, dass der dadurch entstehende Graph auch durch eine Streckung des Graphen von g in y-Richtung erzeugt werden kann.	2
	5



Quelle: https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2022/mathematik/grundlegend/
(Prüfungsteil A, Analysis, Aufgabe 2)

Beispielaufgabe 2.2

1 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = (x+2) \cdot e^{-x}$. Für die erste Ableitungsfunktion von f gilt $f'(x) = -(x+1) \cdot e^{-x}$.

Der Graph einer Funktion g kann aus dem Graphen von f schrittweise erzeugt werden durch:

- Spiegelung an der x-Achse
- Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{e}$ in y-Richtung
- Verschiebung um 1 in positive x-Richtung

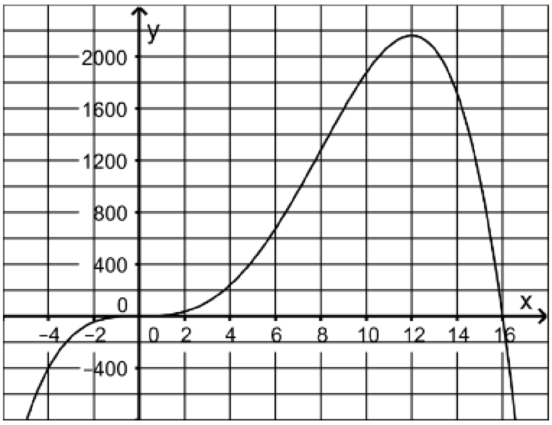
e Zeigen Sie, dass $g(x) = f'(x)$ gilt. 4

f Bestimmen Sie unter Verwendung der genannten Schritte, mit denen der Graph von g aus dem Graphen von f erzeugt werden kann, reelle Zahlen a, b und k, für die $\int_0^2 f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b g(x)\,dx$ gilt. 4

Quelle: https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2022/mathematik/grundlegend/
(Prüfungsteil B, Analysis, Aufgabe 4)

Beispielaufgabe 2.3

Die Abbildung zeigt den Graphen der in IR definierten Funktion f mit $f(x) = -\frac{5}{16}x^4 + 5x^3$.



Für jede reelle Zahl a ist eine in IR definierte Funktion h_a mit $h_a(x) = 5ax^2$ gegeben.

c Beschreiben Sie, wie der Graph von h_4 aus dem Graphen von h_3 erzeugt werden kann. 2

d Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den der Punkt $(4 \mid f(4))$ auf dem Graphen von h_a liegt. 2

e Es gibt genau einen positiven Wert von a, für den die Graphen von f und h_a genau zwei gemeinsame Punkte haben. Ermitteln Sie diesen Wert von a. 5

f Die Gleichung $f(x) = h_{3,75}(x)$ hat genau die drei Lösungen $x_1 = 0$, $x_2 = 6$ und $x_3 = 10$ und es gilt $\int_0^{10} \left(f(x) - h_{3,75}(x)\right)dx = 0$. Deuten Sie dies mit Bezug auf die Graphen von f und $h_{3,75}$. 3

Quelle: https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2021/mathematik/grundlegend/
(Prüfungsteil B, Analysis, Aufgabe 2)

Beispielaufgabe 2.4

BE

Der Graph der in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ definierten Funktion $g: x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2} - 5$ geht aus dem Graphen der in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierten Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{x^2}$ durch eine Verschiebung in x-Richtung und eine Verschiebung in y-Richtung hervor. Geben Sie die beiden Verschiebungen an. Geben Sie einen Term der ersten Ableitungsfunktion von f an und berechnen Sie unter Verwendung dieses Terms den Wert der ersten Ableitungsfunktion von g an der Stelle 2. 5

Quelle: https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2022/mathematik/grundlegend/
(Prüfungsteil A, Analysis, Aufgabe 3)

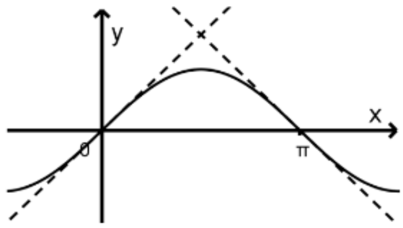
3. Beispielaufgaben zu Trigonometrische Funktionen

Im Grundkurs können die Aspekte von trigonometrischen Funktionen im Abitur thematisiert werden, die bereits in der Sekundarstufe I behandelt. Im Leistungskurs werden zusätzlich grundlegende Kenntnisse zu der Differential- und Integralrechnung von Sinusfunktionen und Kosinusfunktionen verlangt.

Beispielaufgabe 3.1 (Leistungskurs)

BE

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto \sin x$. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f von f sowie die Tangenten an G_f in den dargestellten Schnittpunkten mit der x-Achse.



a Zeigen Sie, dass diejenige der beiden Tangenten, die durch den Koordinatenursprung verläuft, die Steigung 1 hat. 1

b Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das von G_f und den beiden Tangenten eingeschlossen wird. 4

5

Quelle: https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2021/mathematik/erhoeht/
(Prüfungsteil A, Analysis, Aufgabe 1)

Beispielaufgabe 3.2 (Leistungskurs)

2 Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion s mit $s(x) = a \cdot \sin(b \cdot x) + 1$. Die Punkte $E_1(-2\,|\,-1)$ und $E_2(2\,|\,3)$ sind direkt aufeinanderfolgende Extrempunkte des Graphen von s.

a Bestimmen Sie die Werte von a und b. 3

(zur Kontrolle: $a = 2$, $b = \frac{\pi}{4}$)

b Es gilt $\int_{-2}^{2} s(x)\,dx = 4$. Beschreiben Sie mithilfe der Abbildung 3, wie man zu diesem Wert mit geometrischen Überlegungen gelangen kann. 5

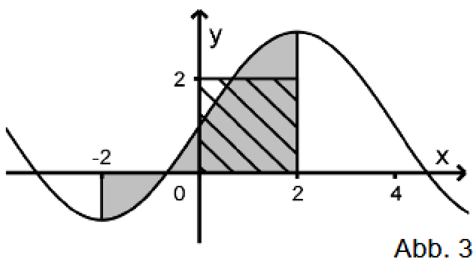


Abb. 3

Die Punkte des Graphen von s mit der y-Koordinate 1 sind die Wendepunkte des Graphen.

c Zeigen Sie, dass jeder Wendepunkt des Graphen von s eine ganzzahlige x-Koordinate hat und dass der Graph von s in jedem seiner Wendepunkte entweder die Steigung $-\frac{\pi}{2}$ oder die Steigung $+\frac{\pi}{2}$ hat. 4

d Für jeden Wendepunkt des Graphen von s wird die Gerade betrachtet, die durch diesen Wendepunkt und den Punkt $P(2022\,|\,2022)$ verläuft. Untersuchen Sie, ob eine dieser Geraden im jeweiligen Wendepunkt Tangente an den Graphen von s ist. 3

Quelle: https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2022/mathematik/erhoeht/
(Prüfungsteil B, Analysis, Aufgabe 3)

Beispielaufgabe 3.3 (Leistungskurs)

3 Während des Produktionsprozesses wird dem Behälter kontinuierlich Flüssigkeit zugeführt und wieder entnommen. Die zeitliche Entwicklung des Füllvolumens der Flüssigkeit im Behälter lässt sich mithilfe des Terms $V(t) = 150 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 300$ beschreiben. Dabei ist t die seit Beginn des Produktionsprozesses vergangene Zeit in Minuten und $V(t)$ das Füllvolumen in Litern.

a Begründen Sie, dass das minimale Füllvolumen während des Produktionsprozesses 150 Liter beträgt. 2

b Berechnen Sie diejenigen Zeitpunkte in der ersten halben Stunde nach Beginn des Produktionsprozesses, zu denen das Füllvolumen jeweils genau 375 Liter beträgt. 6

Quelle: https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2022/mathematik/erhoeht/
(Prüfungsteil B, Analysis, Aufgabe 5)

Beispielaufgabe 3.4 (Leistungskurs)

3 Für jeden Wert $c \in \mathbb{R}^+$ ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h_c : x \mapsto c \cdot \sin(cx)$ gegeben. Abbildung 2 zeigt den Graphen von h_1.

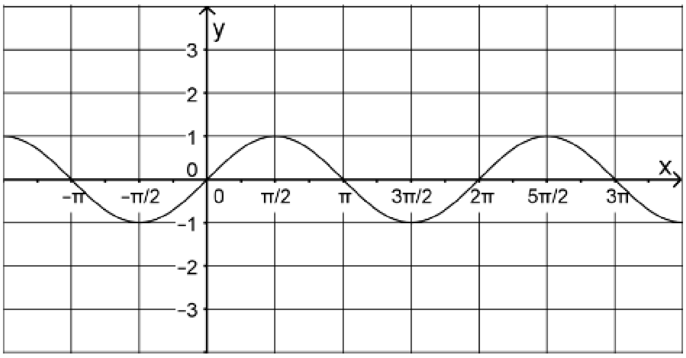


Abb. 2

a Skizzieren Sie für $c = \frac{1}{2}$ und $c = 2$ jeweils den Graphen von h_c in Abbildung 2. 4

b Eine Nullstelle von h_c ist 0, die benachbarte positive Nullstelle wird mit u bezeichnet. Geben Sie den Wert von u in Abhängigkeit von c an. Berechnen Sie damit den Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von h_c für $0 \le x \le u$ mit der x-Achse einschließt. 5

c Beschreiben Sie, wie man ohne Verwendung einer Ableitungsfunktion die Koordinaten eines Tiefpunkts des Graphen von h_c in Abhängigkeit von c ermitteln kann. Geben Sie die Koordinaten eines Tiefpunkts an. 3

d Geben Sie einen Term der 103. Ableitung von h_c an. 3

Quelle: https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2017/mathematik/erhoeht/
(Prüfungsteil b, Analysis, Aufgabe 3)

Beispielaufgabe 3.5 (Grundkurs und Leistungskurs)

Über den Graphen einer trigonometrischen Funktion der Form
$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$ ist bekannt:

- $W(0|2)$ ist ein Wendepunkt,
- $H(\pi|5)$ ist ein Hochpunkt.

Ermitteln Sie eine mögliche Funktionsgleichung von f. Geben Sie die Länge einer Periode der Funktion an, die Sie für f gewählt haben.

4. Beispielaufgaben zu Grundvorstellungen zur Integralrechnung und zur Differentialrechnung

Im Abitur sind bereits mehrmals Aufgaben vorgekommen, in denen Grundvorstellungen zur Integralrechnung und zur Differenzialrechnung beim Bearbeiten verwendet werden mussten. Dazu gehört, die Bestimmung von Flächeninhalten durch Zählen von Kästchen, die Ermittlung eines Graphen der Ableitungsfunktion durch Bestimmung der Steigung an ausgewählten Tangenten, und allgemein die Zusammenhänge zwischen Funktionsgraphen der Funktion, dem Funktionsgraphen der 1. Ableitungsfunktion und dem Funktionsgraphen der Stammfunktion.

Beispielaufgabe 4.1

BE

Die Abbildung 1 zeigt den Graphen einer in IR definierten Funktion f, die Abbildung 2 den Graphen einer Stammfunktion F von f.

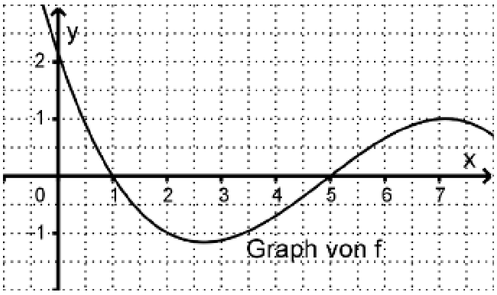


Abb. 1

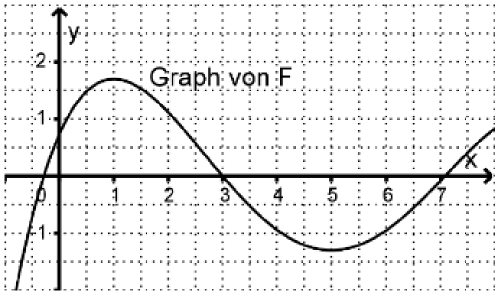


Abb. 2

a Bestimmen Sie ausschließlich mithilfe der Abbildung 2 den Wert des Terms $\int_1^5 f(x)\,dx$. — 2

b Beschreiben Sie, wie man den Wert des Terms $\int_1^5 f(x)\,dx$ ausschließlich mithilfe der Abbildung 1 bestimmen könnte. — 3

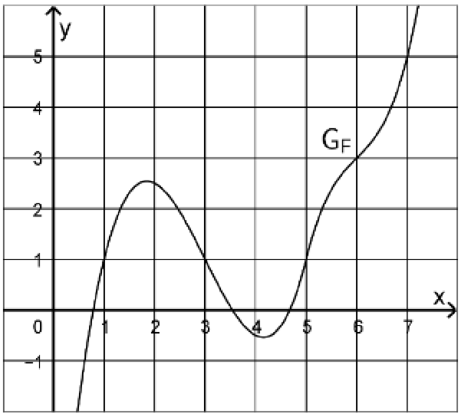
5

Quelle: https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2021/mathematik/grundlegend/
(Prüfungsteil A, Analysis, Aufgabe 1

Beispielaufgabe 4.2

BE

Betrachtet werden die in IR definierten Funktionen f und F, wobei F eine Stammfunktion von f ist. Die Abbildung zeigt den Graphen G_F von F.



a Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\int_1^7 f(x)\,dx$. — 2

b Bestimmen Sie den Funktionswert von f an der Stelle 1. Veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen in der Abbildung. — 3

5

Quelle: https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2022/mathematik/erhoeht/
(Prüfungsteil A, Analysis, Aufgabe 1)

Beispielaufgabe 4.3

BE

Abbildung 1 stellt für einen Wassertank die Zufluss- bzw. Abflussrate (in $\frac{m^3}{h}$) von Wasser für einen Beobachtungszeitraum von sechs Stunden dar. Zu Beginn der Beobachtung enthält der Tank $2m^3$ Wasser.

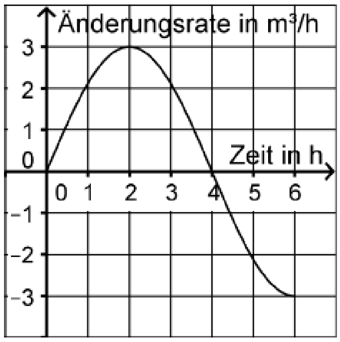


Abb. 1

a Bestimmen Sie das Volumen des Wassers, das sich zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn im Tank befindet. — 2

b Skizzieren Sie in Abbildung 2 den Graphen, der die Entwicklung des Volumens des Wassers im Tank in Abhängigkeit von der Zeit darstellt. — 3

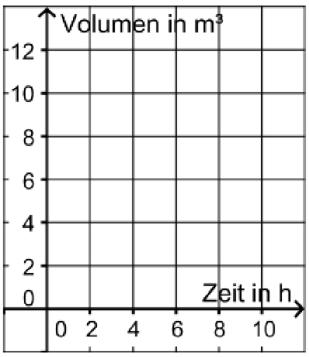


Abb. 2

Quelle: https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/sammlung/mathematik/erhoeht/
(Prüfungsteil A, Analysis, Aufgabe 3)

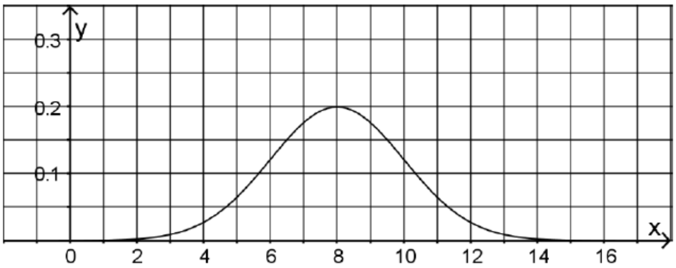
5. Beispielaufgaben zu Normalverteilten Zufallsgrößen

Normalverteilte Zufallsgrößen sind Bestandteil des Rahmenlehrplans für den Leistungskurs. In den letzten Jahren wurden Sie im Abitur nicht thematisiert. Der Unterricht zur Stochastik hat sich durch die Funktionalitäten des Taschenrechners geändert, sodass Aufgaben zur Normalverteilung in der Regel entweder verständnisorientiert sind (siehe Beispielaufgabe 5.1) oder sich direkt mit dem Taschenrechner berechnen lassen (siehe Beispielaufgabe 5.2 (Lösungsstrategie: systematisches Probieren).

Beispielaufgabe 5.1

BE

Die Abbildung zeigt den Graphen der Dichtefunktion der normalverteilten Zufallsgröße A.



a Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass A einen Wert aus dem Intervall $[6;10]$ annimmt, beträgt etwa 68 %. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass A einen Wert annimmt, der größer als 10 ist. 2

b Die Zufallsgröße B ist ebenfalls normalverteilt; der Erwartungswert von B ist ebenso groß wie der Erwartungswert von A, die Standardabweichung von B ist größer als die Standardabweichung von A. Skizzieren Sie in der Abbildung einen möglichen Graphen der Dichtefunktion von B. 3

5

Quelle: https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2022/mathematik/erhoeht/
(Prüfungsteil A, Stochastik, Aufgabe 3)

Beispielaufgabe 5.2

2 Zucker wird in unterschiedlich großen Packungen angeboten. Es soll davon ausgegangen werden, dass für jede Packungsgröße die tatsächliche Masse des Zuckers durch eine normalverteilte Zufallsgröße beschrieben werden kann.

a Für eine bestimmte Packungsgröße ist $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{200\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-500)^2}{200}}$ der Term der zugehörigen Dichtefunktion, wobei x die Masse des Zuckers in Gramm ist. Geben Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung für die Masse jeweils in Gramm an. 2

b Bei einer anderen Packungsgröße beträgt der Erwartungswert für die Masse des Zuckers 250 g, die Standardabweichung 5 g. Bestimmen Sie – auf 1 g genau – das kleinste Intervall, das mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 98 % die tatsächliche Masse des Zuckers enthält und symmetrisch bezüglich des Erwartungswerts ist. 3

25

Quelle: https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2020/mathematik/erhoeht/
(Prüfungsteil B, Stochastik, Aufgabe 4)

6. Beispielaufgaben zu Funktionstermen von grundlegenden Logarithmusfunktionen und grundlegenden gebrochen-rationalen Funktionen

In den Aufgaben des Aufgabenpools der Länder werden zu den Funktionsklassen Logarithmusfunktionen und gebrochen-rationale Funktionen nur Grundlagen erwartet.

Beispielaufgabe 6.1 (identisch mit Beispielaufgabe 2.4)

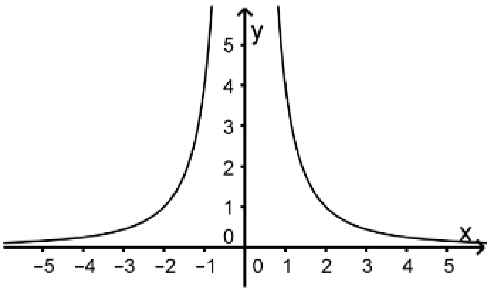
	BE
Der Graph der in $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ definierten Funktion $g: x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2} - 5$ geht aus dem Graphen der in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ definierten Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{x^2}$ durch eine Verschiebung in x-Richtung und eine Verschiebung in y-Richtung hervor. Geben Sie die beiden Verschiebungen an. Geben Sie einen Term der ersten Ableitungsfunktion von f an und berechnen Sie unter Verwendung dieses Terms den Wert der ersten Ableitungsfunktion von g an der Stelle 2.	5

Quelle: https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2022/mathematik/grundlegend/
(Prüfungsteil A, Analysis, Aufgabe 3)

Beispielaufgabe 6.2

BE

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f der in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ definierten Funktion $f: x \mapsto \frac{4}{x^2}$.
G_f ist symmetrisch bezüglich der y-Achse.



		BE
a	Die Gerade, die parallel zur x-Achse durch den Punkt $P(0\,|\,p)$ verläuft, schneidet G_f in zwei Punkten. Der Abstand dieser beiden Schnittpunkte ist 1. Berechnen Sie den Wert von p.	2
b	Die Koordinatenachsen schließen mit der Tangente an G_f in einem Punkt $Q(u\,|\,f(u))$ mit $u > 0$ ein gleichschenkliges Dreieck ein. Berechnen Sie die Koordinaten von Q.	3

Quelle: https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2018/mathematik/erhoeht/
(Prüfungsteil A, Analysis, Aufgabe 3)

Beispielaufgabe 6.3

	BE
Das Rechteck ABCD mit $A(1\|0)$, $B(4\|0)$, $C(4\|2)$ und $D(1\|2)$ wird durch den Graphen der in $\mathbb{R}^+$ definierten Funktion f mit $f(x)=2-\frac{8}{x^2}$ in zwei Teilflächen zerlegt. Ermitteln Sie das Verhältnis der Inhalte der beiden Teilflächen.	5

Quelle: https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/sammlung/mathematik/erhoeht/
(Prüfungsteil A, Analysis, Aufgabe 1)

Beispielaufgabe 6.4

	BE
Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \ln(e^2 - x)$ mit maximalem Definitionsbereich D.	
a Geben Sie D an.	1
b Bestimmen Sie die Nullstelle von f.	1
c Weisen Sie rechnerisch nach, dass $y=-\frac{1}{e^2}\cdot x+2$ eine Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(0\|f(0))$ ist.	3
	5

Quelle: https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/sammlung/mathematik/erhoeht/
(Prüfungsteil A, Analysis, Aufgabe 2)

Senatsverwaltung für Bildung,
Jugend und Familie

BERLIN

Dokument mit mathematischen Formeln

Hinweise

- Ab dem Schuljahr 2024/2025 ist in der Abiturprüfung im Fach Mathematik ausschließlich dieses Dokument mit mathematischen Formeln zugelassen.
- Dieses Dokument darf nicht verändert oder ergänzt werden.
- Ab dem Schuljahr 2024/2025 ist dieses Formeldokument in Klausuren der Kurshalbjahre Q3 und Q4 verbindlich, ausschließlich und unverändert zu verwenden.
- Dieses Formeldokument enthält Inhalte, die über die Themen des aktuellen Rahmenlehrplans für Berlin hinausgehen.
- Die Inhalte und die Gestaltung sind länderübergreifend vereinbart worden. Alle Länder werden ausschließlich dieses Formeldokument in der Abiturprüfung zulassen.
- Dieses Dokument stellt keine Formelsammlung im klassischen Sinn dar. Insbesondere werden im Allgemeinen Voraussetzungen für die Gültigkeit von Formeln nicht genannt und Bezeichnungen nicht erklärt.
- Dieses Dokument ist identisch mit dem Abschnitt 1 der mathematisch-naturwissenschaftlichen Formelsammlung, die für die Verwendung in der Abiturprüfung in den naturwissenschaftlichen Fächern vorgesehen ist.

Inhaltsverzeichnis

Stand: 09.08.2023

1 Grundlagen

Ähnlichkeit zweier Dreiecke

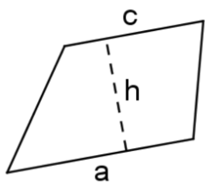
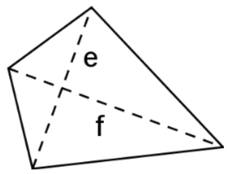
Die folgenden Aussagen zu zwei Dreiecken sind äquivalent:

- Die Dreiecke sind ähnlich.
- Die Größen der Winkel des einen Dreiecks stimmen mit den Größen der Winkel des anderen Dreiecks überein.
- Die Verhältnisse der Seitenlängen des einen Dreiecks stimmen mit den Verhältnissen der Seitenlängen des anderen Dreiecks überein.

Binomische Formeln

$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ $\qquad$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ $\qquad$ $a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$

Maße von Figuren

Dreieck	Parallelogramm[2]	Trapez	Drachenviereck	Kreis
$A = \frac{1}{2}\cdot g\cdot h$	$A = g\cdot h$	$A = \frac{1}{2}\cdot(a+c)\cdot h$	$A = \frac{1}{2}\cdot e\cdot f$	$A = \pi\cdot r^2$
				$U = 2\pi\cdot r$

Maße von Körpern

Prisma	Pyramide	Zylinder	Kegel	Kugel
$V = A_G\cdot h$	$V = \frac{1}{3}\cdot A_G\cdot h$	$V = A_G\cdot h$	$V = \frac{1}{3}\cdot A_G\cdot h$	$V = \frac{4}{3}\pi\cdot r^3$
		für gerade Zylinder: $A_O = 2\cdot A_G + 2\pi\cdot r\cdot h$	für gerade Kegel: $A_O = A_G + \pi\cdot r\cdot m$ (m: Abstand der Spitze vom Rand der Grundfläche)	$A_O = 4\pi\cdot r^2$

[2] Ein Parallelogramm mit vier gleich langen Seiten wird als Raute bezeichnet.

Potenzen und Logarithmen

$a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$ $\quad a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ $\quad \left(a^r\right)^s = a^{r \cdot s}$ $\quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

$\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$ $\quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ $\quad a^{-r} = \frac{1}{a^r}$

$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ $\quad \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ $\quad \log_a b^r = r \cdot \log_a b$

Quadratische Gleichung

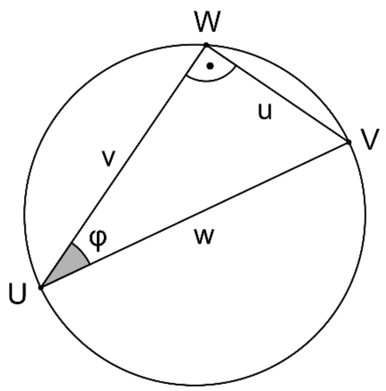
$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ und $x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ sind die Lösungen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$.

Rechtwinkliges Dreieck

- $\sin\varphi = \frac{u}{w}$

  $\cos\varphi = \frac{v}{w}$

  $\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{u}{v}$



- Satz des Pythagoras

  Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, dann gilt für die Längen u und v der beiden Katheten und die Länge w der Hypotenuse $u^2 + v^2 = w^2$.

  Wenn für die Längen u, v und w der Seiten eines Dreiecks $u^2 + v^2 = w^2$ gilt, dann hat dieses Dreieck einen rechten Winkel, der der Seite mit der Länge w gegenüber liegt.

- Satz des Thales

  Wenn ein Dreieck beim Eckpunkt W einen rechten Winkel hat, dann liegt W auf dem Kreis, der den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite als Mittelpunkt hat und durch die beiden anderen Eckpunkte verläuft.

  Wenn der Eckpunkt W eines Dreiecks auf dem Kreis liegt, der den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite als Mittelpunkt hat und durch die beiden anderen Eckpunkte verläuft, dann hat dieses Dreieck bei W einen rechten Winkel.

Symbole in Verbindung mit Mengen

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ $\quad \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ $\quad [a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ $\quad \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ $\quad]a;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ $\quad A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ $\quad A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

Trigonometrie

$\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ $\sin(\varphi - 90°) = -\cos\varphi$ $(\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2 = 1$

$\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ $\cos(\varphi - 90°) = \sin\varphi$

Winkelmaße

Beträgt die Größe eines Winkels im Gradmaß 360°, so beträgt sie im Bogenmaß 2π .

2 Analysis

Ableitung

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Ableitungen ausgewählter Funktionen

Term der Funktion	Term der Ableitungsfunktion
x^r	$r \cdot x^{r-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$-x + x \cdot \ln x$	$\ln x$

Ableitungsregeln

Term der Funktion	Term der Ableitungsfunktion
$k \cdot u(x)$	$k \cdot u'(x)$
$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$
$u(x) \cdot v(x)$	$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
$u(v(x))$	$u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Ableitung von Integralfunktionen

Für $I(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ gilt $I'(x)=f(x)$.

Bestimmtes Integral

Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt $\int_a^b f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$.

Grenzwerte

Ist $p(x)$ ein Polynom, so gilt $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{p(x)}{e^x}=0$.

Ist $p(x)$ ein nicht konstantes Polynom, so gilt $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{p(x)}=0$.

Ist $p(x)$ ein Polynom ohne konstanten Summanden, so gilt $\lim\limits_{x\to0}\left(p(x)\cdot\ln x\right)=0$.

Rotationskörper

$$V=\pi\cdot\int_a^b\left(f(x)\right)^2dx$$

Schneiden und Berühren zweier Funktionsgraphen

Die Graphen zweier Funktionen f und g schneiden sich in einem Punkt genau dann, wenn sie diesen Punkt gemeinsam haben.

Die Graphen zweier Funktionen f und g berühren sich in einem Punkt genau dann, wenn sie diesen Punkt gemeinsam und dort die gleiche Steigung haben.

Zueinander senkrechte Geraden

Zwei Geraden mit den Steigungen m_1 und m_2 sind genau dann senkrecht zueinander, wenn $m_1\cdot m_2=-1$ gilt.

3 Analytische Geometrie/Lineare Algebra

Skalarprodukt

$\vec{a}\circ\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ $\quad$ $\vec{a}\circ\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi$ $\quad$ $\vec{a}\circ\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2$

Ebenen

- Parameterform: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$
- Koordinatenform: $n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + k = 0$
- Normalenform: $\vec{n} \circ \left(\vec{x} - \vec{a}\right) = 0$

4 Stochastik

Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Die folgenden Aussagen zu Ereignissen A und B sind äquivalent:

- A und B sind stochastisch unabhängig.
- $P_B(A) = P(A)$
- $P_A(B) = P(B)$

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Zufallsgrößen

- Für eine Zufallsgröße X mit den Werten x_1, x_2, …, x_n gilt:
  - Erwartungswert: $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$
  - Varianz: $Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 \cdot P(X = x_i)$
  - Standardabweichung: $\sqrt{Var(X)}$
- Für eine binomialverteilte Zufallsgröße X gilt:
  - $P_p^n(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$
  - Erwartungswert: $\mu = n \cdot p$
  - Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$
- Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsgröße: $\varphi(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

Sigma-Regeln

Ist X eine normalverteilte Zufallsgröße, so gilt:

- $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 68{,}3\,\%$
- $P(\mu - 1{,}64\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}64\sigma) \approx 90{,}0\,\%$
- $P(\mu - 1{,}96\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}96\sigma) \approx 95{,}0\,\%$
- $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95{,}4\,\%$
- $P(\mu - 2{,}58\sigma \leq X \leq \mu + 2{,}58\sigma) \approx 99{,}0\,\%$
- $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 99{,}7\,\%$

Prognoseintervall und Konfidenzintervall

Für eine binomialverteilte Zufallsgröße gilt näherungsweise:

- Prognoseintervall: $\left[p - c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}; p + c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}\right]$
- Die Gleichung $|h - p| = c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$ liefert die beiden Grenzen eines Konfidenzintervalls für den Wert von p.

Signifikanztest

Wird die Nullhypothese irrtümlich abgelehnt, so bezeichnet man dies als Fehler erster Art. Das Signifikanzniveau ist der Wert, den die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art nicht überschreiten soll.

Wird die Nullhypothese irrtümlich nicht abgelehnt, so bezeichnet man dies als Fehler zweiter Art.