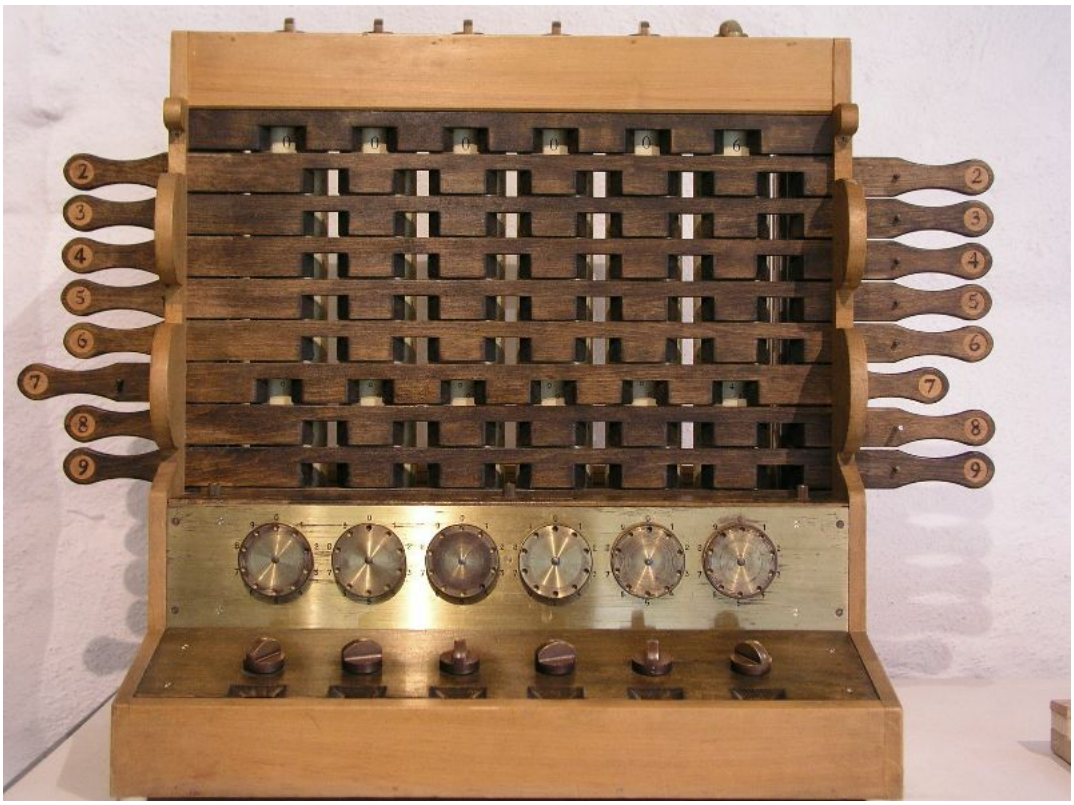
LISUM Fortbildung

Workshop
„Sprachen und Automaten”

aktualisierte Fassung : Dezember 2007



Rechenmaschine
von W. Schickard (1592 - 1635)

Die Broschüre wurde bei einer Fortbildung des LISUMs am 19. September 2006 als Kursmaterial eingesetzt. Ein Dank gebührt den Schülern meiner Leistungskurse, die viele Anregungen und Ergänzungen beigetragen haben. Ebenso danke ich den Schülern des Leistungskurses Informatik an der Walther Rathenau-Oberschule und Herrn Witten, die mich auf vorhandene Fehler und Ungenauigkeiten in der ersten Auflage hingewiesen haben.

Walter Gussmann (wagu1@web.de)
Paul-Natorp-Oberschule

Inhaltsverzeichnis

1 Endliche Automaten

Unser Alltag ist bestimmt durch zahlreiche „Maschinen": Auto, Handy, Fahrstuhl, Parkuhr, ... Jede dieser Maschine befindet sich zu einer gewissen Zeit in einem definierten Zustand. Auf Ereignisse reagieren diese Maschinen je nach Zustand: Ein parkendes Auto reagiert auf die Betätigung des Gaspedals überhaupt nicht, während dasselbe Auto während der Fahrt beschleunigt wird.

Eine Beschreibung der Maschinen hängt deshalb vom jeweiligen Zustand ab, in dem sich diese befindet. *Alan Turing* (1912-1954) entwickelte für den Computer eine allgemeine Maschine („*Turing-Maschine*"), mit der zahlreiche Probleme gelöst werden können. Maschinenmodelle nennt man in der Informatik auch Automaten.

Beispiel: Parkscheinautomat

Auf einem Parkplatz kostet das Parken 1,50 Euro. Einen Parkscheinautomat akzeptiert 50 Cent, 1 Euro und 2 Euro-Münzen. Nach Einwurf der korrekten Geldsumme liefert er das Ticket und ggf. das Restgeld. Er besitzt keine Abbruchtaste.

1.1 Definition endlicher Automaten

Dieser Automat besitzt vier Zustände: $z0$ beschreibt den Ausgangszustand, $z1,\ z2,\ z3$ den Zustand nach Einwurf von $50\ Cent$, $1\ Euro$ und $2\ Euro$. Er kann formal durch folgende Eigenschaften beschrieben werden.:

endliche Eingabemenge	E	$= \{50, 100, 200\}$ (in Cent)
endliche Ausgabemenge	A	$= \{+50, -50, +100, -100, +150, 0\}$
endliche Zustandmenge	Z	$= \{z0, z1, z2, z3\}$
Anfangszustand	$z0$	
endlich viele Endzustände	Z_E	$= \{z3\}$
eine Übergangsfunktion	u :	$E \times Z \rightarrow Z$
eine Ausgabefunktion	a :	$E \times Z \rightarrow A$

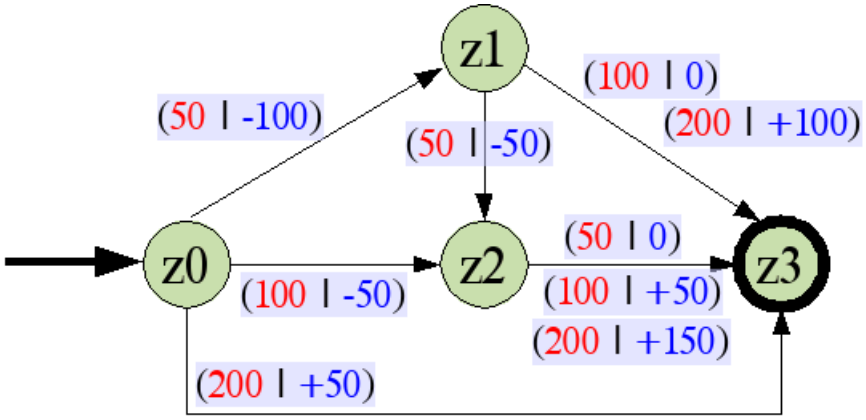
Ein endlicher Automat wird duch das 7-Tupel $(E, A, Z, z_0, Z_E, u, a)$ *beschrieben.*

Die beiden Funktionen können entweder durch eine Wertetabelle oder Zustandsdiagramme beschrieben werden.

Wertetabelle:

akt. Zustand	Eingabe	Folgezustand	Ausgabe
$z0$	$+50$	$z1$	-100
$z0$	$+100$	$z2$	-50
$z0$	$+200$	$z3$	$+50$ (Ticket)
$z1$	$+50$	$z2$	-50
$z1$	$+100$	$z3$	0 (Ticket)
$z1$	$+200$	$z3$	$+100$ (Ticket)
$z2$	$+50$	$z3$	0 (Ticket)
$z2$	$+100$	$z3$	$+50$ (Ticket)
$z2$	$+200$	$z3$	$+150$ (Ticket)

Zustandsgraph:



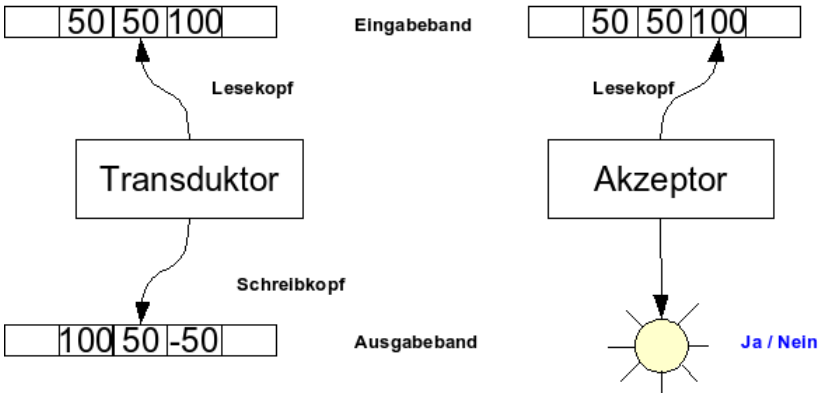
Der Startzustand wird durch einen Pfeil markiert, der Endzustand ist dick oder doppelt umkreist. Die Übergänge werden durch beschriftete Pfeile markiert. Der erste Wert entspricht der Eingabe, der zweite gibt den Ausgabebetrag an. Im Endzustand $z3$ wird zusätzlich das Ticket ausgegeben.

1.2 Transduktoren und Akzeptoren

Transduktor Automaten, die wie der Parkautomat für jeden Übergang eine Ausgabe produzieren, heißen **Transduktoren**.

Akzeptor Es gibt auch Automaten, die keine Ausgabefunktion besitzen und im Endzustand nur einen Wahrheitswert liefern; man spricht dann von erkennenden Automaten oder **Akzeptoren**.

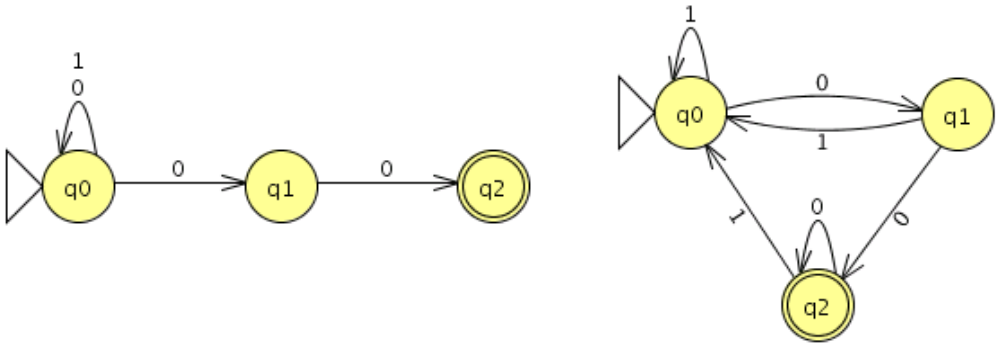
Banddarstellung:



1.3 Deterministische und nichtdeterministische Automaten

Deterministischer endlicher Automat (DEA) Zu jedem Zustand gibt es genau eine Nachfolgezustand (nichts bleibt dem Zufall überlassen)

Nichtdeterministischer endlicher Automat (NEA) Es kann Zustände geben, für die mehrere Nachfolgezustände existieren.



Beide Automaten akzeptieren ein binäres Wort, das mit der Ziffernfolge ”00” endet. Jeder nichtdeterministische Automat kann in einen deterministischen überführt werden.

1.4 Programmierung endlicher Automaten

Eine zustandsorientierte Programmierung endlicher Automaten beruht im Wesentlichen auf der Implementierung der Übergangs- und Ausgangsfunktion. Im einfachsten Fall ist es eine Folge geschachtelter Abfragen, die den aktuellen Zustand sowie einen Eingabewert auswerten.

```
if (zustand==0)
{ switch (eingabe)
  {
   case 50:  ausgabe="-100";
             zustand=1;
             break;
   case 100: ausgabe="-50";
```

```
                zustand=2;
                break;
     case 200:  ausgabe="+500";
                zustand=3;
                break;
     default:   ausgabe="falsche Münze";
    }
  } ...
```

In funktionalen Sprachen kann die Übergangsfunktion übersichtlich durch „*pattern matching*" dargestellt werden.

```
type Eingabe = Int
data Zustand = Z0 | Z1 | Z2 | Z3
u :: Zustand -> Eingabe -> Zustand
u Z0  50 = Z1
u Z0 100 = Z2
u Z0 200 = Z3
...
```

1.5 Werkzeuge für den Unterricht

Üblicherweise werden Automaten mit Hilfe spezieller Programme programmiert. In dieser Broschüre wird durchgehend das Programm **JFLAP** benutzt, das neben endlichen Automaten auch die Implementierung von Sprachen und Turingmaschinen ermöglicht. Das Programm kann unter `http://www.jflap.org` heruntergeladen werden. Da es sich um eine Java-Applikation handelt, ist sie auf vielen Betriebssystemen lauffähig.

Speziell für den Grundkurs bietet sich als Alternative das Kara-Modell an, das an der ETH-Zürich für den Ausbildungsbereich entwickelt wurde. Hier kann ein Marienkäfer mit Hilfe einer zustandsorientierten Modellierung durch eine Landschaft gesteuert werden. Als Ergänzung gibt es eine Turing-Version von Kara. Die Programme stehen für unterschiedliche Java-Versionen zum Download bereit. (URL: `www.swisseduc.ch/informatik/karatojava`)

Aus gleicher Quelle gibt es ein weiteres Javaprogramm – **exorciser**. Dieses Programms enthält eine Reihe von eingebauten Aufgabenstellungen mit abrufbaren Lösungen. Es eignet sich deshalb vor allem zur Vorbereitung.

Im Internet sind zahlreiche weitere Programme zu finden, mit denen sich zumindest endliche Automaten modellieren lassen. In der Regel bieten diese Programme aber nicht die Vielfalt und Zuverlässigkeit wie die oben beschriebenen.

1.6 Übungsaufgaben

Übung 1 Von beliebigen binären Wörtern soll ein Automat erkennen, ob es sich um ein Wort mit gerader Parität (Anzahl der Einsen ist geradzahlig) handelt.

Beschreiben Sie formal den Akzeptor, skizzieren Sie den entsprechenden Zustandsgraphen und implementieren Sie diesen Automaten.

```
0101101101    --> True
011001        --> False
```

Übung 2 Gesucht ist ein Akzeptor, der überprüft, ob eine Zahl durch 5 oder 2 teilbar ist.

Übung 3 Ein Automat zur Mustererkennung soll überprüfen, ob ein Wort die Zeichenkette ”GAT” oder ”ATA” enthält. Als Eingabemenge kommen die Symbole `A C G T` in Frage.

Weitere Aufgaben

Aufgabe 1 Ein elektronisches Zahlenschloss besitzt die Kombination ”4711”. Gesucht ist ein Automat, der bei Eingabe dieser Kombination das Schloss öffnet, bei jeder anderen Eingabe einen Fehlercode ausgibt. Als Antwort auf eine Eingabe wird ein Sternchen ausgegeben. Eine Fehlermeldung darf erst nach Eingabe von vier Ziffern erfolgen.

Aufgabe 2 Ein Kaffee-Getränkeautomat bietet Kaffee für 1 Euro an. Der Automat akzeptiert 50 Cent- und 1 Euro-Stücke. Er besitzt außerdem zwei Tasten: Eine Taste (K) dient dazu, den Kaffee auszugeben. Mit der Taste (A) wird der Vorgang abgebrochen. In diesem Fall erhält der Kunde sein Geld zurück.

Beschreiben Sie diesen Getränkeautomaten mit den Begriffen eines endlichen Automaten und zeichnen Sie das Zustandsdiagramm.

Aufgabe 3 Mails enthalten oft „*smileys*” in Textform.

```
:-)    ☺
:-(    ☹
```

Gesucht ist ein Automat, der einen Text wiedergibt und dabei die Smileys in Textform durch die grafischen Symbole ersetzt. Es genügt, wenn die beiden angegebenen Smileys berücksichtigt werden und für ein beliebiges Zeichen ’x’ verwendet wird.

Beispiel:

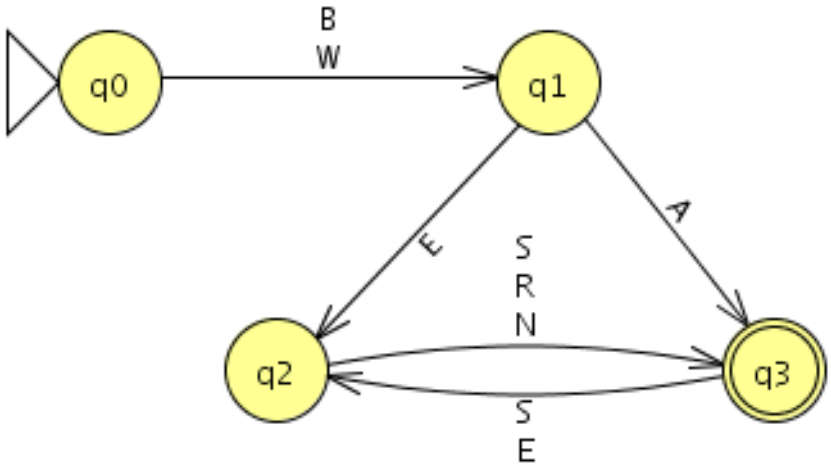
```
Text:     xxx:-):-xx:-(
Ausgabe:  xxx☺:-xx☹
```

Aufgabe 4 Gesucht ist ein Akzeptor, der eine Vorzeichenbehaftete, gerade Ganzzahl erkennt.

```
-123456    --> richtig
0123       --> falsch
+123.4     --> falsch
```

Aufgabe 5 Beispiel für einen nichtdeterministischen Automaten (NEA). Gesucht ist der Zustandsgraph eines endlichen Automaten, der genau dann True liefert, wenn die Eingabe mit '1' beginnt und mit der Ziffernfolge '100' endet. Konstruieren Sie auch den zugehörigen deterministischen Automaten (DEA).

Aufgabe 6 Beschreiben Sie den Automaten, der zu diesem Zustandsgraph passt und geben Sie einige gültige Worte an.



Aufgabe 7 Geben Sie einen Akzeptor an, der überprüft, ob eine Eingabe eine gültige reelle Zahl darstellt. Dabei wird folgendes Format akzeptiert (die in Klammern gesetzte Werte müssen nicht vorhanden sein):

```
[vz] zahl ["." zahl ["E" [vz] zahl]]
vz    : + oder -
zahl  : eine oder mehrere Ziffern 0..9
```

2 Sprachen

Jede Sprache besteht aus Wörtern, die nach gewissen Regeln zu einem Satz zusammengesetzt werden. Dabei besteht jedes Wort aus einem Zeichenvorrat der Sprache (Alphabet). Im allgemeinen Sprachgebrauch kommt man mit diesen Begriffen gut zurecht.

In der theoretischen Informatik versucht man, den Sprachbegriff durch Abstraktion zu verallgemeiner. Auch hier besteht eine Sprache aus bestimmten erlaubten Symbolen, die *Terminalsymbole* genannt werden. Alle Terminalsymbole bilden das Alphabet der Sprache.

Ein *Wort* einer Sprache stellt eine beliebige Kombinationen von Terminalsymbolen dar. In diesem Sinne stellt auch ein vollständiger Satz ein Wort dar. Nicht alle Worte ergeben dabei einen Sinn. Mit Hilfe von Regeln werden nur bestimmte Wörter als gültig eingestuft. Diese Regeln bilden die *Grammatik* einer Sprache.

Beispiel: Die himmlische Sprache „Frohlocke”

Als der Münchener Alois Huber in den Himmel kam überreicht ihm Petrus ein Harfe und wies ihn in die himmlische Sprache ***Frohlocke*** *ein.*

Einige Wörter dieser Sprache sind

```
halleluja
halleleluja
hahahalleluuuja
```

Formal wird diese Sprache durch ein 4-er Tupel (T,N,S,E) und die Produktionsregeln beschrieben:

```
Terminalsymbole          T = { "h", "a", "l", "e", "u", "j" }
Nichtterminale Symbole   N = { HA, LE, LU, JA, FROHLOCKE }
Startsymbol              S = Frohlocke
Produktionsregeln:
                 FROHLOCKE = HA {HA} "l" LE {LE} LU JA
                 HA        = "h" "a"
                 LE        = "l" "e"
                 LU        = "l" "u" {"u"}
                 JA        = "j" "a"
```

Die Produktionsregeln basieren häufig auf Abkürzungen (nichtterminale Symbole) für bestimmte Eigenschaften. Diese sind zwar nicht zwingend nötig, machen aber die Regeln besser lesbar.

2.1 Definition „formale Sprache”

Mit dieser Definition wird lediglich die Sprachsyntax festgelegt, die Bedeutung (Semantik) der Worte spielt hierbei keine Rolle. Die formale Sprache L besitzt eine Grammatik G mit folgenden Eigenschaften:

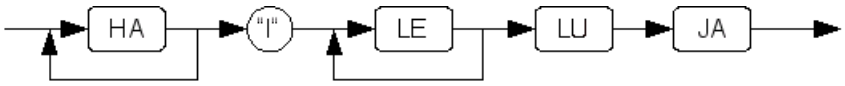
- Es gibt endlich viele Symbole, aus denen sich die Worte zusammensetzen.
  Terminalsymbole T
- Es gibt endlich viele Hilfssymbole, die die Struktur der Sprache beschreiben.
  Nichtterminalsymbole N
- Mit Hilfe von Regeln wird festgelegt, welche Worte erlaubt sind.
  Produktionen
- Jedes Wort beginnt und endet mit einem Element aus N oder T.
  Start-/Endsymbol der Sprache S,E

Kurz: **L(G) = (T,N,S,E,P)**

Die Sprachen werden entsprechend ihrer Produktionsregeln klassifiziert (Chomsky-Hierarchie). Einfache Sprachen können durch einen äquivalenten endlichen Automaten realisiert werden. Diese Sprachen heißen *regulär*.

2.2 Syntaxdiagramme

Die Regeln können anschaulich in Form von Syntaxdiagrammen angegeben werden. Dabei werden terminale Symbole in einem Kreis ausgegeben, nichtterminale Symbole in einem Rechteck. Jedes nichtterminale Symbol wird durch ein Sytaxdiagramm beschrieben.



Syntaxdiagramm für das Symbol "FROHLOCKE":

2.3 EBNF-Notation

Häufig werden die Produktionsregeln in der **Erweiterten Backhaus-Naur-Form (EBNF)** beschrieben. Das nichtterminale Symbol, das definiert wird, befindet sich auf der linken Seite. Auf der rechten Seite stehen terminale und nichtterminale Symbole mit folgender Bedeutung:

```
{ A }   Das Symbol A wird 0 bis n-mal wiederholt
[ A ]     Das Symbol A ist optional
A | B     Alternative: A oder B
(A B)     Gruppierung: A und B
Eine Regel wird durch einen Punkt beendet.
```

Beispiel:

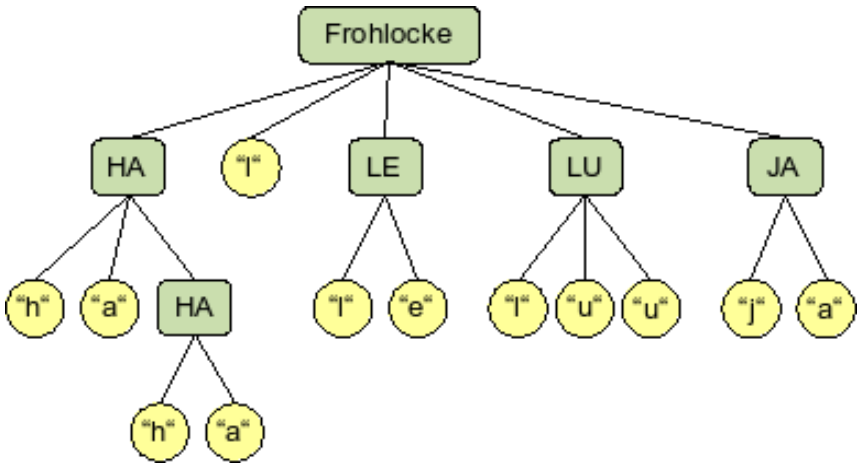
```
Preis = Betrag ['.' ('-'|Ziffer Ziffer)] ('€'|'$') .
```

2.4 Syntaxbäume

Will man überprüfen, ob eine Zeichenfolge ein gültiges Wort der Sprache „Frolocke" darstellt, so kann diese Überprüfung mit einem endlichen Automaten geschehen. Dieser Vorgang heißt „parsen" (engl.: to parse, analysieren).

Anwendung: Entsprechend prüft der Compiler einer Programmiersprache, ob ein eingegebenes Programm alle Regeln der Sprache einhält. Das ganze Programm wird darauf überprüft, ob es ein gültiges Wort der Sprache darstellt. Ein fehlerhaftes Wort führt zu einem Syntaxfehler. Nebenbei baut der Parser auch den zugehörenden Syntaxbaum auf.

Ein Syntaxbaum stellt eine baumförmige Ableitung eines Wortes der Sprache dar. Das Startsymbol bildet die Wurzel des Baumes. Die inneren Knoten entsprechen den nichtterminalen Symbolen, die Blätter stellen die terminalen Symbole dar. Das Wort „hahalleluuja" gehört zur Sprache *Frohlocke*, da es mit folgendem Syntaxbaum aus den Regeln ableitbar ist.



2.5 Beispiele

Emailadresse

*Gesucht ist eine Sprache, die alle Email-Adressen mit dem vereinfachten Format **xxx@yyy.zz** beschreibt. Jeder Name **xxx** besteht aus mindestens 2 Buchstaben, jeder Providername ist mindestens drei Buchstaben lang. Als Domäne kommt **de** oder **com** in Frage.*

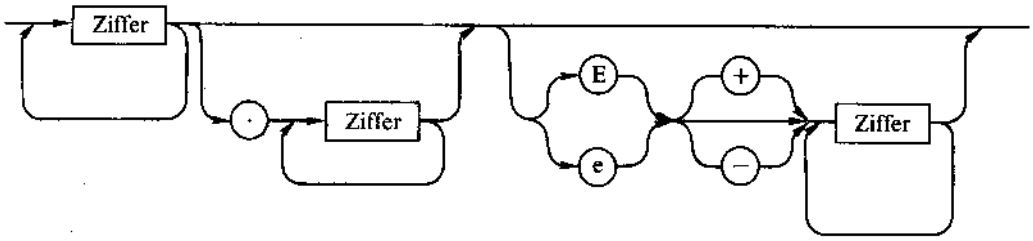
Eine formale Beschreibung der „E-Mail-Sprache" hat folgende Form:

```
T = {"a",..,"z","A",..,"Z","@","."}
N = {Email, Name, Provider, Zeichen}
S = Email

Produktionsregeln (EBNF):

  Email    = Name "@" Provider .
  Name     = Zeichen Zeichen {Zeichen} .
  Provider = Zeichen Name "." Land .
  Land     = "d" "e" | "c" "o" "m" .
  Zeichen  = "a"|"b"|..|"z"|"A"|..|"Z" .
```

Mit den Produktionsregeln können nun die Worte der Sprache auf ihre Gültigkeit überprüft werden. `hans@info.com` ist eine gültige Adresse. Dagegen ist die Adresse `emma.klug@ibm.de` fehlerhaft, da ein Name nach der 2. Regel nur aus Zeichen (d. h. Buchstaben) bestehen darf.

Darstellung von Dezimalzahlen

Gegeben ist das Syntaxdiagramm einer „Sprache” (mit der gewöhnlichen Bedeutung von Ziffer).



Die Regeln lassen sich mit EBNF sehr übersichtlich formulieren:

```
Dezimalzahl = Zahl [ "." Zahl ] [ Exponent] .
Zahl        = Ziffer { Ziffer } .
Exponent    = ("E"|"e") ["+"|"-"] Zahl .
Ziffer      = "0" | "1" | .. | "9" .
```

Diese Sprache erkennt positive Dezimalzahlen mit eventuellem Exponenten in der IEEE-Darstellung. Soll eine als String vorliegende Zahl auf ihre Gültigkeit hin überprüft werden, so kann auch hier der äquivalente endliche Automat zur Erkennung benutzt werden.

Das MU-Rätsel

D. Hofstadter beschreibt in seinem Werk „Gödel Escher Bach” eine formale Sprache, die nur drei Buchstaben kennt: **M**, **I** und **U**. Die Wörter, die die Sprache bilden, werden durch vier Regeln beschrieben. Als Startsymbol wird die Zeichenfolge „**MI**” vorgegeben. Eine Umkehrung der Regeln ist nicht erlaubt.

1. Hat ein Wort als letzten Buchstaben ein „I”, dann darf ein „U” angehängt werden.
2. Ein Wort der Form „Mx” führt auf ein neues Wort „Mxx”.
3. Enthält ein Wort „III”, dann können diese Buchstaben auch durch ein „U” ersetzt werden.
4. Zwei aufeinanderfolgende „UU” dürfen auch gestrichen werden.

Beispiele:

```
Wenn "MUI" ein Wort der Sprache ist, dann auch "MUIU"     (Regel 1)
Mit "MUM" ist auch "MUMUM" ein gültiges Wort              (Regel 2)
Aus "MUIIIU" kann das Wort "MUU" abgeleitet werden        (Regel 3)
Das Wort "MUUUI" erlaubt auch das Wort "MUI"              (Regel 4)
```

Hofstadter fragt den Leser, ob das Wort „**MU**” in seiner Sprache vorkommen kann.

Dieses Beispiel erlaubt eine mehr formale Betrachtung von Sprachen. Das Startsymbol kann als Axiom und die vier Regeln können als Gesetzmäßigkeiten aufgefasst werden. Damit kann man ähnlich einer mathematischen Beweisführung ausgehend von Axiomen und bereits bewiesenen Tatsachen neue Schlussfolgerungen ziehen.

Wenn etwa geprüft werden soll, ob das Wort „MUI” erlaubt ist, dann muss dieses aus den bisher bekannten Worten und Regeln ableitbar sein.

```
MI ---> MII ---> MIIII ---> MUI
    R2       R2         R3
```

Aus diesem nun bekannten Wort kann das Wort „MUIIU" hergeleitet werden:

```
MUI ---> MUIU ---> MUIUUIU ---> MUIIU
    R1        R2           R4
```

Hofstadter liefert einen allgemeinen Beweis, dass das Wort „MU" nicht zur Sprache gehört. Dabei verwendet er hauptsächlich den „I"-Gehalt (Anzahl der „I" in einem Wort). Das Urwort hat einen I-Gehalt von 1. Die Regeln 1 und 4 ändern den I-Gehalt nicht. Regel 3 vermindert den I-Gehalt um 3, Regel 2 verdoppelt den I-Gehalt eines Wortes. Diese beiden Regeln erzeugen niemals ein Vielfaches von 3, es sei denn, dass ein solches von Anfang an gegeben war. Das ist aber nicht der Fall (siehe [HOF] S. 280ff).

Hierzu gibt es auch einen interessanten Aufsatz bei `http://www.educ.ethz.ch/` unter „lehrpersonen/mathematik/unterrichtsmaterialien_mat/anwendungenmathematik/spiel".

Besondere Sprachen

Sprachen, die von Kellerautomaten erkannt werden

Die in der Mathematik erlaubten Terme können ebenfalls als „Term-Sprache" aufgefasst werden. Bei der Überprüfung des Terms

```
2+3*(4-(3+1))
```

auf seine Gültigkeit erkennt man aber, dass z.B. die Anzahl der öffnenden Klammern mitgezählt werden muss. Dies geht mit gewöhnlichen endlichen Automaten nicht mehr. Es handelt sich also hierbei um keine reguläre Sprache. Zu ihrer Realisierung (und Implementierung) benötigt man z.B. einen Zähler bzw. Stack. Die entsprechenden Automaten heißen Kellerautomaten.

Kontextsensitive Sprachen

In der fraktalen Geometrie werden häufig Lindenmayer-Systeme verwendet. Dabei wird das Wachstum durch fortgesetzte Ersetzung einzelner Symbole durch andere simuliert. Einfache Systeme stellen reguläre Sprachen dar. Die Regel R1 beschreibt den Aufbau der Kochschen Kurve, wenn F für das Zeichen einer Linie, '+' für eine $60°$- Drehung und '-' für eine Drehung um $-60°$ steht.

```
(R1)   F ->  F + F - - F + F
```

Komplexere Regeln erhält man, wenn die Ersetzung vom Umfeld abhängt (kontextsensitive Sprachen). Bei der Regel R2 hängt die Ersetzung von 'F' durch das linke Zeichen ab:

```
(R2)  XF ->  +YF-XF-YF+
      YF ->  -XF+YF+XF-
```

2.6 Sprachhierarchie

Mit Hilfe endlicher Automaten können bereits alle regulären Sprachen realisiert werden. Ergänzt man das Konzept um einen Kellerstapel, so sind fast alle gängigen Computersysteme (Programmiersprachen) modellierbar.

Alan Turing beschäftigte sich bei der Entwickelte seiner Turingmaschine mit der Berechenbarkeit von Funktionen. *Alonso Church* fasste das Ergebnis seiner Arbeiten in folgender These zusammen:

> *Die Menge der Turing-berechenbaren Funktionen ist genau die Menge der im intuitiven Sinne berechenbaren Funktionen.*

Alle gängigen Programmiersprachen sind in diesem Sinne vollständig. Diese Aussage gilt streng genommen allerdings nur, wenn unbegrenzt Speicher zur Verfügung steht (entsprechend dem unendlich langen Turingband).

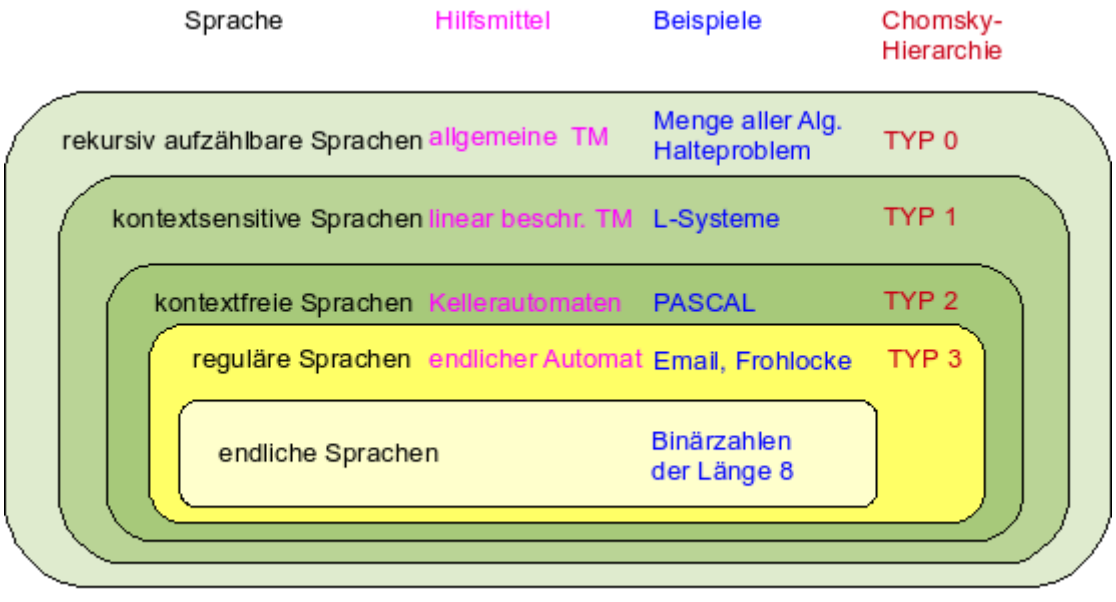
R. Baumann präzisierte den Begriff des Algorithmus mit Hilfe einer Turingmaschine[1]:

> *Ein Algorithmus ist ein Verfahren, das von einer Turingmaschine durchgeführt werden kann.*

Turingmaschinen wurden tatsächlich nie gebaut; sie stellen ein rein theoretisches Rechnermodell dar, mit dem theoretische Betrachtungen wie die Berechenbarkeit von Funktionen einfacher untersucht werden können.

Registermaschinen stellen ein Bindeglied zwischen Turingmaschinen und realem Rechner dar. Diese erlauben eine deutlich komfortablere Programmierung, da sie direkten Zugriff auf alle Register haben. Ihre Handhabung ist aber noch wesentlich mühseliger als die realer Rechner.

Der Informatiker Noam Chomsky hat formale Sprachen gemäß ihrer Komplexität klassifiziert. Bis auf Sprachen vom Typ 0 ist für alle Sprachen eindeutig entscheidbar, ob ein Wort w zu einer Sprache L gehört.



nach: L. Engelmann (Hrsg.): Informatik bis zum Abitur, Paetec-Verlag, Berlin 2002

[1] Rüdiger Baumann: Informatik mit Pascal, Klett-Verlag, Stuttgart 1981

2.7 Roboter Rob - ein Unterrichtsprojekt für den LK

Idee: Abituraufgaben für den Leistungskurs (Hessen)

Der Roboter "Rob" wird in einer Fabrik zur Bestückung von Platinen eingesetzt. Er kann von einer Home-Position $(0, 0)$ aus horizontal eine Position (x_1, y_1) anfahren, ein Bauteil aufnehmen $(Take)$ und an einer anderen Position (x_2, y_2) einsetzen (Put).

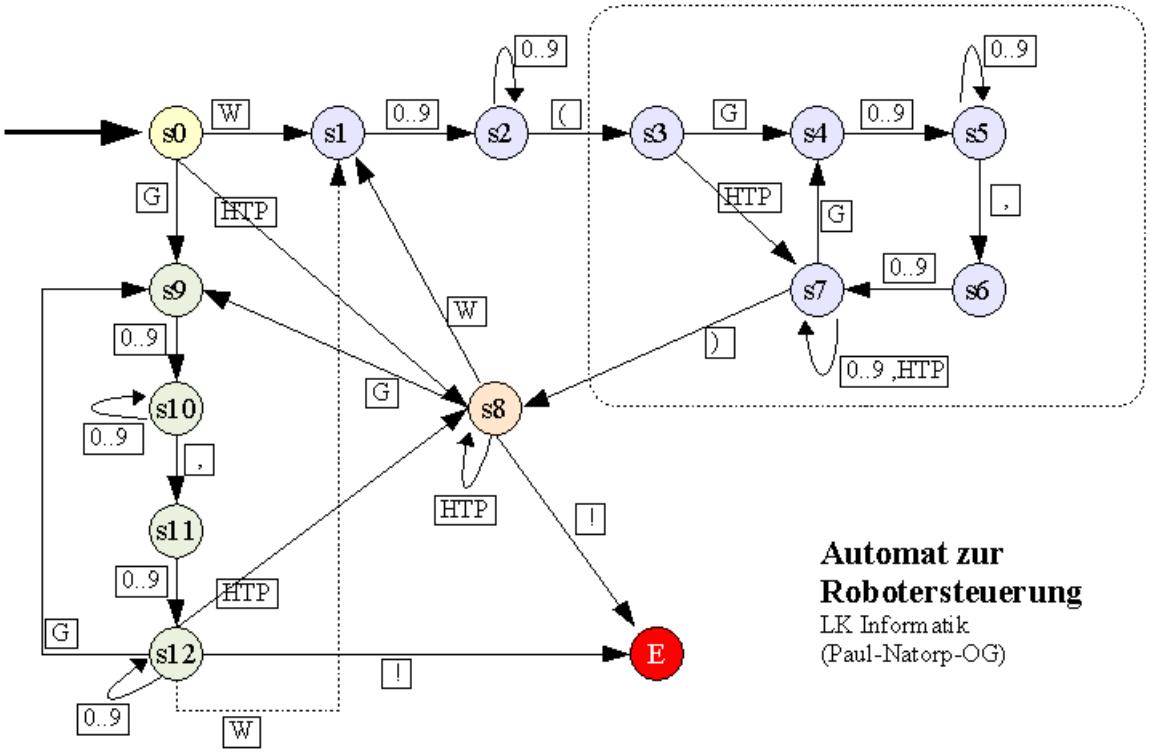
Zusätzlich kann er wiederkehrende Aufgaben durch eine Wiederholungsanweisung n-fach ausgeführen. Geschachtelte Wiederholungen sind nicht erlaubt.

Der Roboter „4you" kennt folgende Befehle:

`Code`	Befehl	Bedeutung
`H`	Home	Bringt den Roboter in die Nullstellung
`Gx,y`	Go (x,y)	Bewegt den Roboter an die Stelle (x,y)
`T`	Take	Nimmt an der aktuellen Stelle auf
`P`	Put	Legt an der aktuellen Stelle ab
`Wn(..)`	Wiederhole n mal	Wiederholt eine Anweisungsfolge n mal
`!`	Ende	Ende einer Steuersequenz

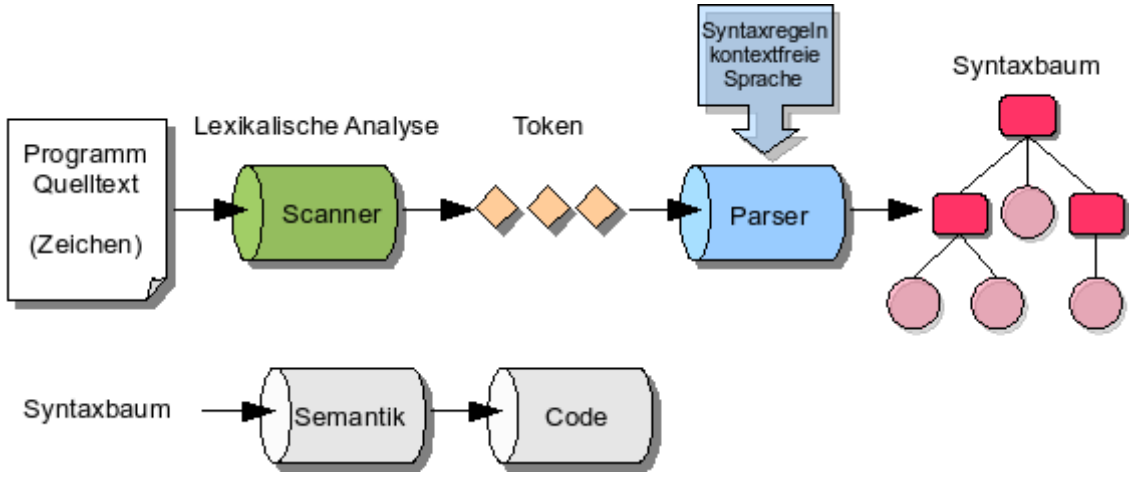
Ein mögliches „Programm" (Wort) der Robotersprache ist zum Beispiel "`HG100,50TG200,75P!`".

Da keine geschachtelten Wiederholungen erlaubt sind, handelt es sich um eine reguläre Sprache, die durch einen endlichen Automaten implementiert werden kann.



Dieses Projekt kann auch mit Java implementiert werden. Dabei können die unterscheidlichen Stufen eines Compilers / Interpreters schön veranschaulicht werden.

- Ein Compiler führt zunächst eine **lexikalische Analyse** durch. Dabei wird das Quellprogramm in eine Folge von Terminalsymbolen (Token) zerlegt. Für die Befehle entfällt dieser Schritt, da diese aus jeweils einem Zeichen bestehen. Auftretende Zahlen könnten aber als ein Token betrachtet werden.
- Dann wird in einer **syntaktischen Analyse** getestet,ob das Quellprogramm den Syntaxregeln der Sprache genügt. Dies kann mit Hilfe des endlichen Automaten als Akzeptor geschehen. Compiler bauen allerdings bei der Syntaxanalyse einen Syntaxbaum auf, der die weitere Bearbeitung (etwa Interpretation oder Auswertung) erheblich vereinfacht.
- Anschließend erfolgt eine **semantische Überprüfung** (etwa ob alle Namen definiert wurden). Auch dieser Schritt wird bei diesem Projekt nicht benötigt.
- Zum Schluss wird der **Code** generiert.



Anstelle der Codeerzeugung kann hier auch nach der Syntaxanalyse der Quellcode interpretiert werden. Wenn der Parser einen Syntaxbaum erzeugt, dann besteht die Interpretation in einem modifizierten Durchlaufen des Baumes in Inorder-Reihenfolge.

Ein Interpreter kann auch direkt auf den Syntaxregeln aufbauen und nach dem Prinzip der **absteigenden Rekursion** die Eingabe verarbeiten. Diese Methode soll hier kurz vorgestellt werden. Dabei wird folgende Grammatik in EBNF zugrunde gelegt:

```
Roboter      = Befehl { Befehl } '!' .
Befehl       = Befehl1 | Wiederholung .
Befehl1      = 'H' | 'T' | 'P' | Position .
Wiederholung = 'W' Zahl '(' Befehl1 { Befehl1 } ')' .
Position     = 'G' Zahl ',' Zahl .
Zahl         = Ziffer { Ziffer } .
Ziffer       = '0' | '1' | .. | '9' .
```

Die nichtterminalen Symbole sind

```
Roboter, Befehl, Befehl1, Wiederholung, Position, Zahl, Ziffer
```

Terminale Symbole sind

```
'!', 'H', 'T', 'P', 'W', 'G', '0', '1', .., '9'
```

Das Prinzip der absteigenden Rekursion beruht im Wesentlichen darauf, dass die einzelnen Regeln rekursiv implementiert werden und sich entsprechend der Syntaxregeln gegenseitig aufrufen. Dies führt in etwa zu folgender Hierarchie:

```
start
 |___ roboter
      |______ befehl
               |____ wiederholung (W) ---> befehl1
               |____ befehl1
                      |____ position (G)
                      |____ home (H)
                      |____ take (T)
                      |____ put (P)
```

Die aktuelle Leseposition sowie das nächste zu verarbeitende Zeichen (Token) im Eingabestring (Programm) werden häufig als globale Variablen gespeichert. Sinnvoll ist dazu eine Lesemethode, die zugleich überprüft, ob die Zeichen zu den erlaubten terminalen Symbolen gehören. Beim Lesen eines ungültigen Zeichens kann die Syntaxanalyse mit einer Fehlermeldung beendet werden.

Günstigerweise liefern alle Methoden einen Wahrheitswert zurück. Damit lassen sich die einzelnen Regeln sehr übersichtlich implementieren.

```
// Befehl ::= 'H' | 'T' | 'P' | Wiederholung | Position
private boolean befehl()   {
     switch (c)       {
          case 'T' : nextChar(); return true;
          case 'P' : nextChar(); return true;
          case 'H' : nextChar(); return true;
          case 'W' : nextChar(); return wiederholung();
          case 'G' : nextChar(); return position();
          default  : return false;
     }
 }
```

Mögliche Fragestellungen

1. Gesucht ist eine Grammatik für die Robotersprache L. Diese soll in der EBNF-Notation sowie als Syntaxdiagramm angegeben werden.
2. Was bewirkt die folgende Befehlsfolge? $G30,10W2(TG60,20PG50,80)H$!
3. Mit welchen Steuerbefehlen kann der Roboter einen Gegenstand von einem Band (Position (20,40)) aufnehmen, an einem Arbeitsplatz (Position (200,60)) ablegen und wieder die Home-Position einnehmen?
4. Der Roboter soll 10 mal ein Quadrat der Seitenlänge 50 entlangfahren und in jedem Eckpunkt etwas ablegen. Die linke, obere Ecke des Quadrats hat die Koordinaten (30,70). Am Ende soll der Roboter in die Home-Position gefahren werden.
5. Die Sprache L, die der Roboter akzeptiert, kann durch einen endlichen Automaten simuliert werden. Entwerfe den Zustandsgraphen des Automaten.
6. Die Sprache „Rob" soll durch relative Bewegungen erweitert werden. Gib eine mögliche Syntaxerweiterung an. Dabei müssen auch negative Zahlenangaben berücksichtigt werden.

2.8 Übungsaufgaben

Übung 1 Eine Sprache enthält folgende Regeln:

```
Definition = Var ':' '=' Ausdruck .
Ausdruck   = Var | Var '+' Ausdruck .
Var        = 'a' | 'b' | 'c' .
```

- Konstruieren Sie ein Wort, das mindestens 6 Zeichen lang ist.
- Zeichnen Sie den zugehörigen Syntaxbaum.
- Entwerfen Sie mit JFLAP einen passenden Akzeptor.

Übung 2 Für die Sprache der römischen Ziffern soll ein Akzeptor entwickelt werden, der Zahlen zwischen 1 und 28 erkennt. Beschreiben Sie die Regeln für diese Zahlen in der BNF-Notation.

Weitere Aufgaben

Aufgabe 1 Gesucht sind alle erlaubten Wörter (Sätze) zu folgender Syntaxregeln (Startsymbol ist „*Teddybär*"):

```
Teddybär     = "Fell" Körperteile [Kleidung] .
Körperteile  = Kopf "Rumpf" Gliedmaße .
Kopf         = "Augen" ["Nase" ["Barthaare"]] "Ohren" .
Gliedmaße    = "Arme" "Beine" .
Kleidung     = "Hut" | "Hose" | "Jacke" .
```

Aufgabe 2 Einfache deutsche Sätze können mit der folgenden Grammatik erzeugt werden:

```
Satz          = Nominalgruppe Verbalgruppe .
Nominalgruppe = Artikel Substantiv .
Verbalgruppe  = Verb | Verb Nominalgruppe .
Verb          = "jagt" | "beißt" | "sieht" .
Substantiv    = "Hund" | "Katze" | "Frau" .
Artikel       = "der" | "die" | "das" .
```

- Bilden Sie zwei mögliche Sätze.
- Leiten Sie den folgenden Satz nach den Regeln ab und skizzieren Sie den Syntaxbaum: `Der Hund jagt die Katze.`
- Erweitern Sie die Grammatik so, dass Substantive mit einem (optionalen) Attribut versehen werden können. (Attribute: `schwarze, junge, gefährliche`)
- Beschreiben Sie formal die Sprache.

Aufgabe 3 Gesucht ist eine formale Sprache mit Grammatik zur Erzeugung von Zahlen, die durch 5 oder 2 teilbar sind. Geben Sie auch das zugehörige Syntaxdiagramm sowie einen äquivalenten Automaten an.

Aufgabe 4 Die folgende EBNF erlaubt die (freie) Zusammenstellung der kommenden Informatiklausur. Stellen Sie sich drei Aufgaben zusammen. (STRING ist vordefiniert)

```
Klausur  = Aufgabe [Aufgabe] .
Aufgabe  = Nummer Punkte Thema Inhalt .
Thema    = "Formale Sprachen" | "Automaten" | "Grammatiken".
Inhalt   = STRING .
Nummer   = Ziffer .
Punkte   = Zahl .
Zahl     = Ziffer {Ziffer} .
Ziffer   = "0" | "1" | .. | "9" .
```

Aufgabe 5 Gesucht ist die EBNF-Syntaxdefinition für

1. für eine ungerade ganze Zahl.
2. für einen Währungsbetrag im Format `*.xx Euro`.
3. für eine Zeitausgabe im Format `std:min:sek` ohne führende Nullen (”12:8:9”).

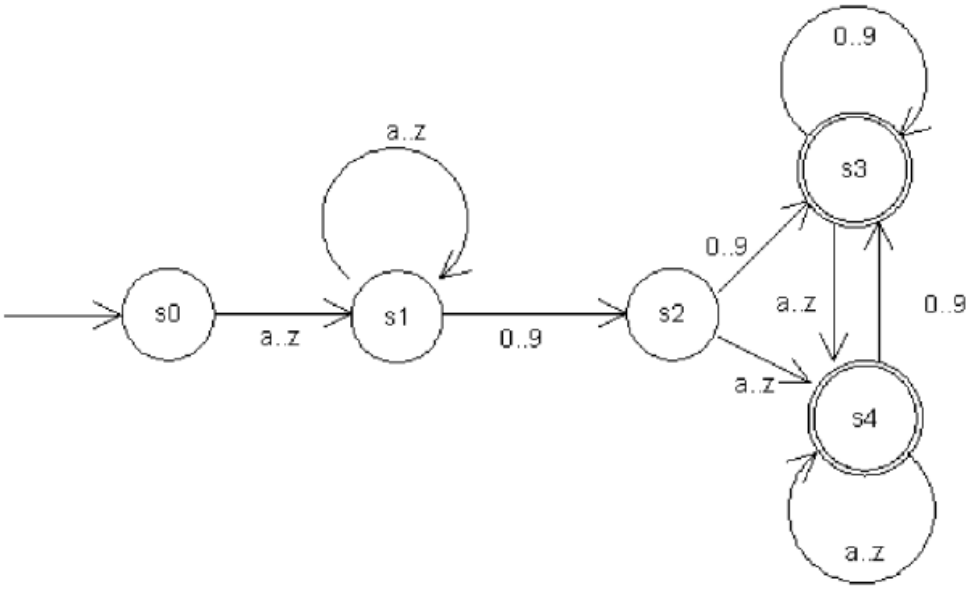
3 Abituraufgaben

3.1 Zentralabitur NRW 2007

Quelle: Zentralkabitur NRW 2007 (Leistungskurs)

Ein Internet-Anbieter arbeitet mit persönlichen Passwörtern für seine Benutzer. Damit die Passwörter einem minimalen Sicherheitsstandard entsprechen, sollen sie folgenden Bedingungen entsprechen:

Version 1: Die Bedingungen für das Passwort sind durch folgenden Zustandsgraphen angegeben.



Version 2: Die Bedingungen für das Passwort sind durch folgende Regeln verbal beschrieben.

1. Das Passwort soll aus mindestens 4 Zeichen bestehen.
2. Das Passwort soll mit mindestens einem Buchstaben beginnen und mit mindestens einem Buchstaben enden.
3. Das Passwort soll mindestens ein Sonderzeichen und eine Ziffer enthalten.
4. Die Anzahl der Sonderzeichen und Ziffern muss gleich groß sein.
5. Sonderzeichen und Ziffern sollen paarweise auftreten, gegebenenfalls mit dazwischenliegenden Buchstaben. Beginnt ein solches Paar mit einem Sonderzeichen, so folgt eine Ziffer, beginnt ein Paar jedoch mit einer Ziffer, so folgt ein Sonderzeichen.

```
gültige Passwörter                ungültige Passwörter

co#pu1ern3t#werk   te1e#on          #log1n     p#sc#l
  |__|    |_|         |_|
  paarweises
  Auftreten
```

Ein endlicher Automat soll für die schnelle Erkennung der gültigen Passwörter auf der Internetseite sorgen.

Arbeitsaufträge:

a) Geben Sie für den Zustandsgraphen (Version 1) jeweils zwei Beispiele für Passwörter an, die akzeptiert bzw. nicht akzeptiert werden.

   Analysieren Sie den Zustandsgraphen und erläutern Sie, wie ein gültiges Passwort aufgebaut sein muss. (10 Punkte)

b) Zur Version 2 gelten die folgenden Abkürzungen. Das Eingabealphabet ist in drei Teile zerlegt (Buchstaben, Sonderzeichen, Ziffern). Benutzen Sie als Abkürzung B für die Buchstaben, S für die Sonderzeichen und Z für die Ziffern.

   Entwerfen Sie einen deterministischen endlichen Automaten, der eine gültige Passworteingabe für die Version 2 überprüft, indem Sie den Zustandsübergangsgraphen entwickeln.

   Erläutern Sie die Funktionsweise des Automaten, indem Sie die Bedeutung der einzelnen Zustände und Zustandsübergänge darstellen. (14 Punkte)

c) Geben Sie für die Abarbeitung der folgenden Eingaben die zugehörige Zustandsfolge an und geben Sie begründet an, ob der Automat akzeptiert oder nicht.

   `Lg#i5ch` `u#L2g1sch` `r6d#m` (6 Punkte)

d) Entwickeln Sie eine Grammatik, die genau die gültigen Passwörter produziert, welche in Version 2 beschrieben werden.

   Zur Vereinfachung der Grammatik verwenden Sie bitte nur folgende Zeichen: Buchstaben `a`, `b` und `c`, Ziffern `1`, `2` und `3` sowie Sonderzeichen `#`, `$` und `&`. (12 Punkte)

e) Erläutern Sie, welche Auswirkungen es bei der Passwortregel (Version 2) hat, wenn die Regel 5 entfällt. Begründen Sie, warum es keinen deterministischen endlichen Automaten geben kann, der nur den Regeln 1 bis 4 genügt. (8 Punkte)

Quelle: Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes NRW, IF LK HT 07.

Beschriftungen der Bilder und die Feingliederungspunkte sind ergänzt worden, um bei der Lösungsdiskussion eindeutige Bezugspunkte zu ermöglichen.

Die inhaltlichen Schwerpunkte im Zentralabitur zum Thema „Endliche Automaten und formale Sprachen-ßind:

- Darstellung von deterministischen endlichen Automaten als Graph und als Tabelle
- Akzeptor als spezielle Form des endlichen Automaten
- Formale Sprachen - Reguläre Sprachen
- Entwicklung eines Parsers für eine einfache formale Sprache (nur Leistungskurs)

3.2 Zentralabitur Mecklenburg-Vorpommern 2007

Quelle: Zentralabitur Mecklenburg-Vorpommern 2007 (Leistungskurs – Wahlgebiet (ca. 75 min Arbeitszeit – 25%)

1. Formale Sprachen und Grammatiken

   Gegeben ist die Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ mit $V = A, B, C, D, S, = a, b$ und

```
R = { S  aA | bB | a | b,
      A  aC | bB | a | b,
      B  bD | aA | a | b,
      C  bB | b,
      D  aA | a  }
```

   a) Geben Sie für G den höchsten Typ in der Chomsky-Hierarchie an. Begründen Sie. (1)

   b) Entscheiden und begründen Sie, ob folgende Worte zu L(G) gehören. (2)
   `abbabab` `abaaaab`

   c) Zu G kann ein Akzeptor angegeben werden, der genau die Worte aus L(G) annimmt, alle anderen aber nicht.
   Erläutern Sie anhand einer Skizze Aufbau und Funktionsweise eines Akzeptors. (3)
   Geben Sie die Überführungsfunktion eines Automaten an, der L(G) akzeptiert. (2)

   d) Geben Sie die von G erzeugte Sprache L(G) an. Begründen Sie. (2)

2. Rangierproblem

   Ein Zug aus n unterscheidbaren Wagen $w1, ..., wn$ befindet sich wie in Abb. 1 dargestellt auf Gleis $G1$ einer Rangieranlage. $G2$ und $G3$ seien leer.

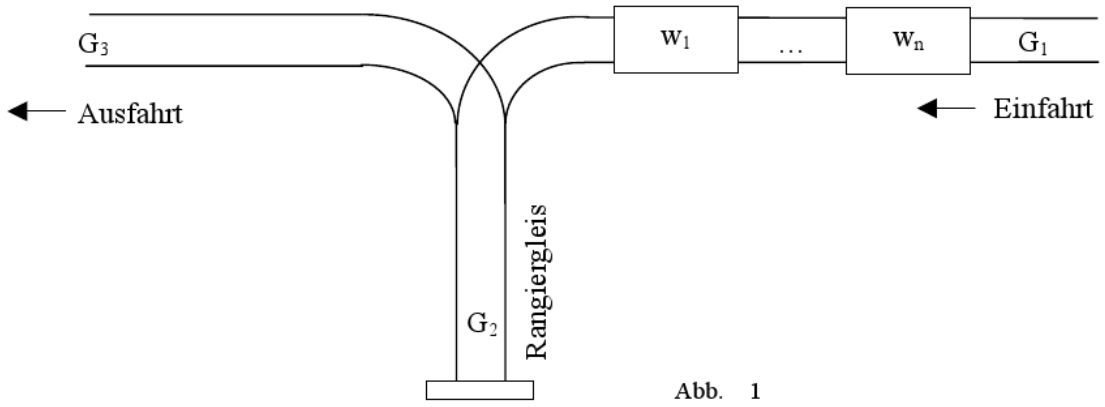


Abb. 1

   Die Gleisanlage ist mit einem Automaten verbunden, der für die in der Tabelle angegebenen Eingaben die zugeordneten Aktionen realisiert.

Eingabe Tastendruck	Aktion
1	Falls G1 nicht leer: rangiere den ersten Wagen von G1 nach G2; sonst: Fehler;
2	Falls G2 nicht leer: rangiere den ersten Wagen von G2 nach G3; sonst: Fehler;

a) Interpretieren Sie die Eingabefolge 112122 für einen Zug mit mindestens drei Wagen und geben Sie die Reihenfolge der Wagen (von links nach rechts) auf G3 an. (2)

b) Geben Sie die Eingabefolge an, die bei einem Zug mit 4 Wagen die beiden mittleren Wagen tauscht. (1)

c) Geben Sie eine mindestens dreielementige Eingabefolge an, die in einen Fehlerzustand führt und begründen Sie Ihre Wahl. (2)

d) Die Sprache L sei die Menge aller Eingabefolgen, die zu keinem Fehlerzustand führen und einen Zug beliebiger Länge vollständig von G1 nach G3 rangieren. Beschreiben Sie L und definieren Sie einen geeigneten Automaten, der L akzeptiert. (5)

4 Literatur und Links

Literatur

[MOD] Modrow, E.: Theoretische Informatik mit Delphi. emu-online Scheden 2005.(www.emu-online.de)

Ein neues Schulbuch mit einer vollständigen Darstellung schulrelevanter Themen (Automaten, Turingmaschinen, Sprachen). Als Programmiersprache wird Delphi verwendet.

[ENG] Engelmann, L.: Informatik bis zum Abitur. Paetec, Berlin, 2002 (ISBN 3-89818-600-8)

Das Unterrichtsbuch enthält eine ausführliche Darstellung der theoretischen Informatik mit einigen Beispielaufgaben. Neben formalen Sprachen und Automaten werden die Berechenbarkeitstheorie behandelt und effiziente Algorithmen mit Komplexitätsbetrachtungen vorgestellt.

[HOF] Douglas R. Hofstadter: Gödel, Escher, Bach ein endloses geflochtenes Band. Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1985 (ISBN 3423300175)

Ein absolutes Kultbuch, das in zentrale Aspekte der theoretischen Informatik einführt. Zu jedem Kapitel gibt es eine einführende Kurzgeschichte mit den Hauptfiguren Achilles und Theo Schildkröte.

Eine umfassendere Literaturliste finden Sie auf den Seiten des Berliner Bildungsservers.

Internet

http://www.bebis.de/themen/faecher/informatik/vertiefungsgebiete

Startseite für die Vertiefungsgebiete im Grund- und Leistungskurs. Hier finden Sie kommentierte Literatur- und Linklisten.

http://www.jflap.org/

Homepage des vorgestellten Javaprogramms zur Modellierung endlicher Automaten. Mit diesem Programm können auch Kellerautomaten, Sprachen, Turing- und Registermaschinen veranschaulicht werden.

http://www.swisseduc.ch/informatik/exorciser

Dieses Javaprogramm beeinhaltet eine Aufgabensammlung zu den einzelnen Themen. Auf Wunsch werden auch die Lösungen angezeigt.

http://www.swisseduc.ch/informatik/karatojava/

Mit dem Kara-Modell können Automaten direkt simuliert werden. Auch Turingmaschinen können damit veranschaulicht werden. Zusätzlich enthalten diese Seiten viele Unterrichtsmaterialien zum Thema.

http://www.oberstufeninformatik.de/theorie

Startseite von H. Gierhardt zur theoretischen Informatik. Zahlreiche Verweise zu weiterführenden Seiten und Software.

`http://pns-berlin.de/lk/ti/index.html`

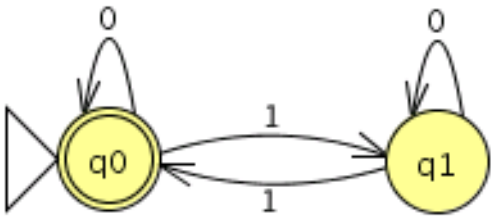
Erkennende Automaten und formale Sprachen werden hier unter dem Aspekt einer Implementierung in Haskell und/oder Java dargestellt. Die Informationen beruhen auf Unterrichtserfahrungen aus dem LK Informatik an der Paul-Natorp-Oberschule.

5 Lösungen zu den Aufgaben

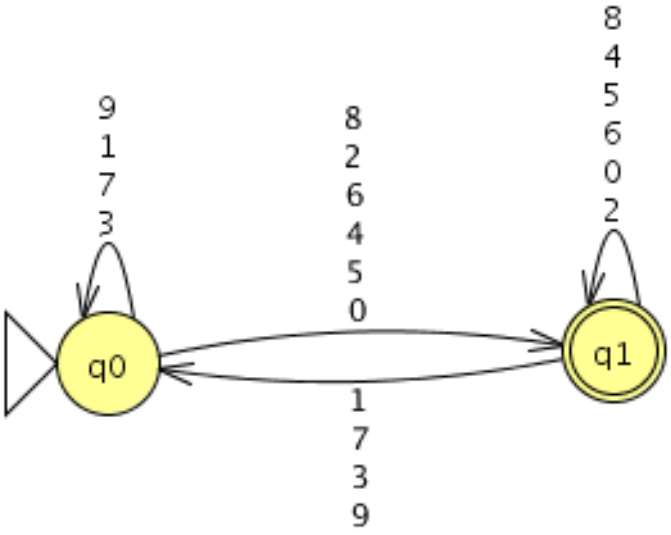
Automaten - Übungsaufgaben

Übung 1 Paritätsakzeptor

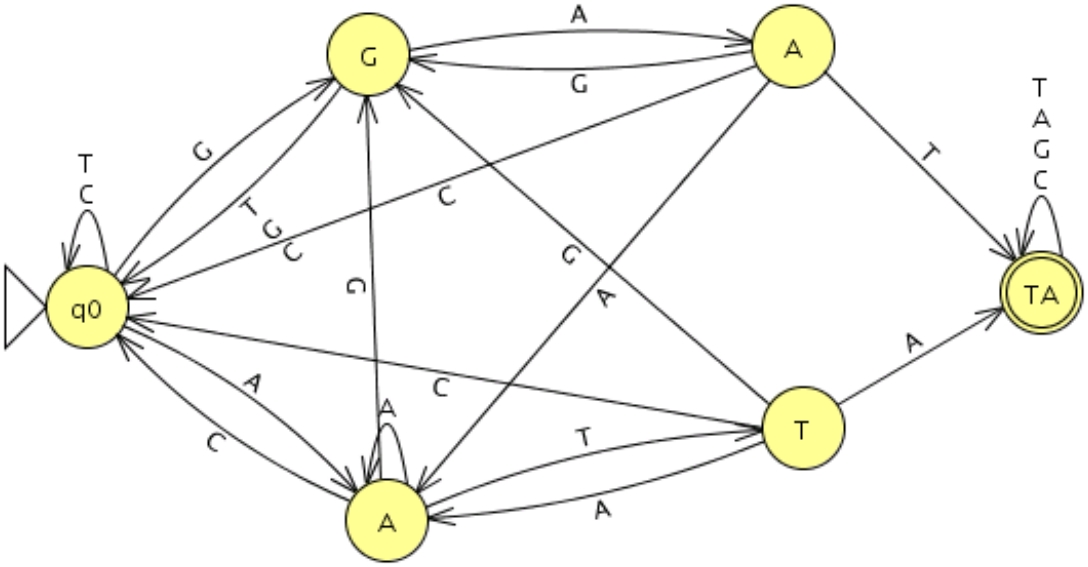
```
E  = { 0, 1 }
A    entfällt, da Akzeptor
Z  = { q0, q1 }
z0 = q0
ZE = q0
```



Ü2:

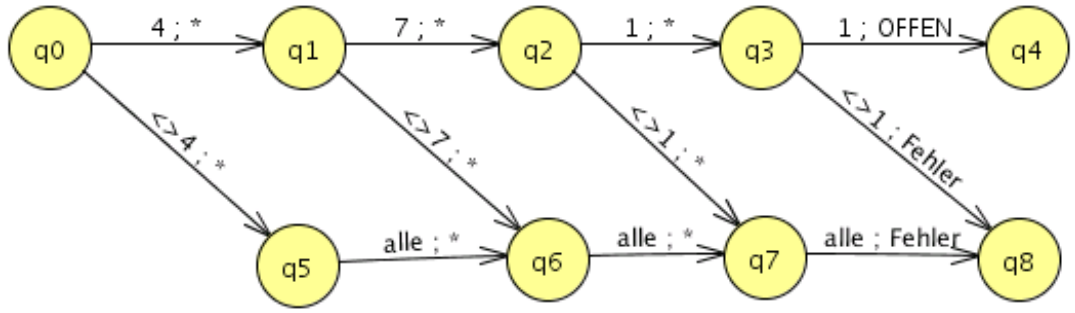


Ü3:

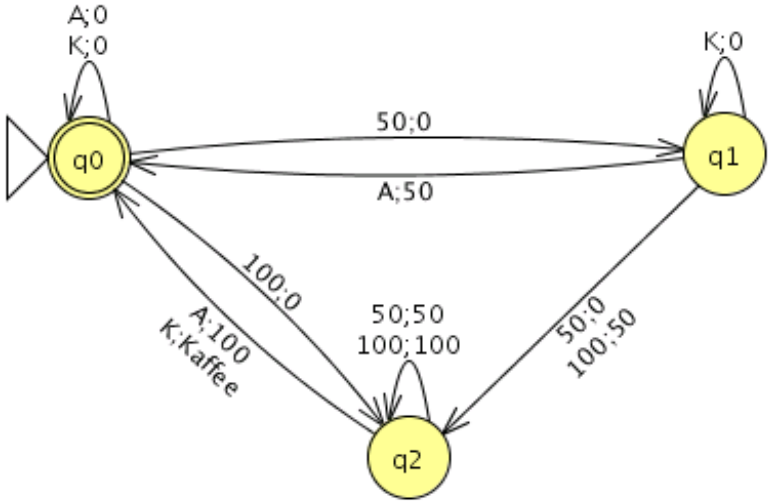


Aufgaben

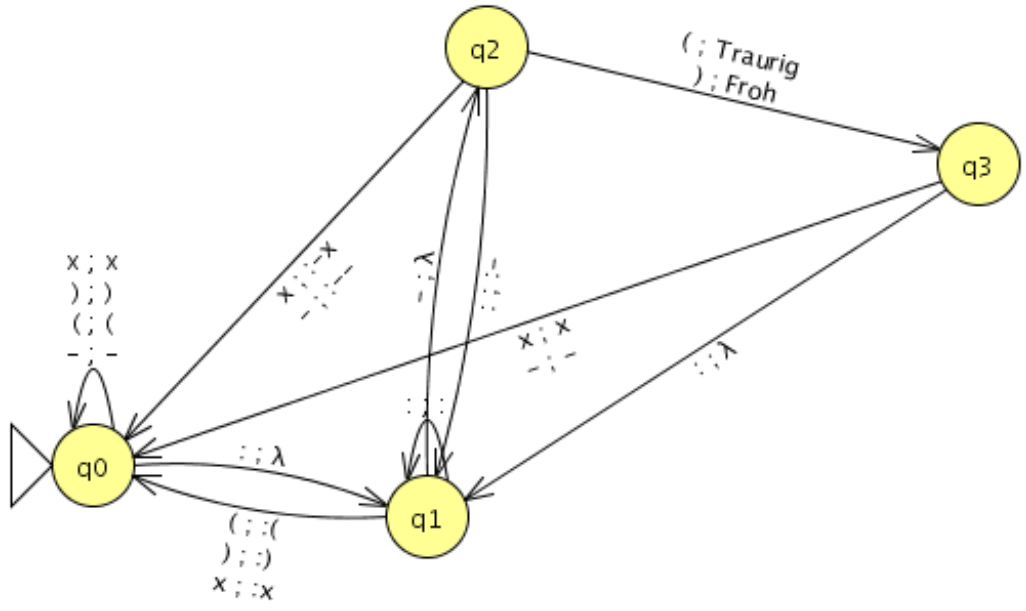
A1:



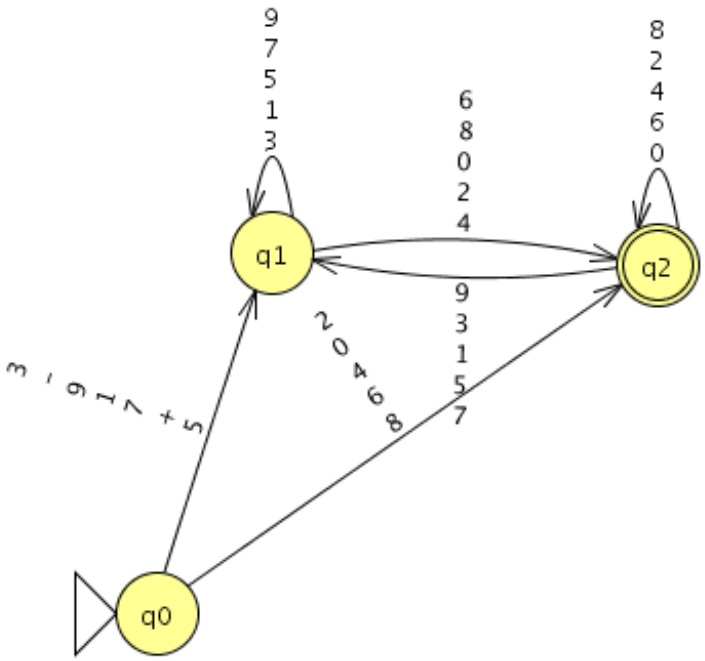
A2:



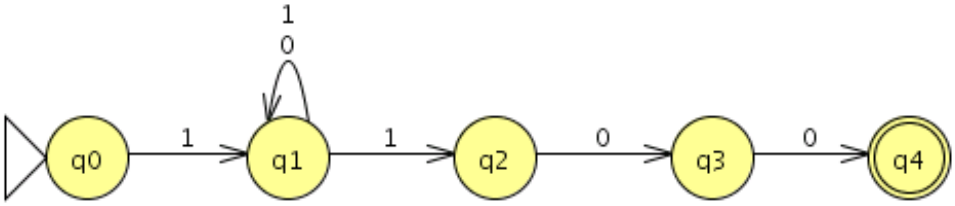
A3:



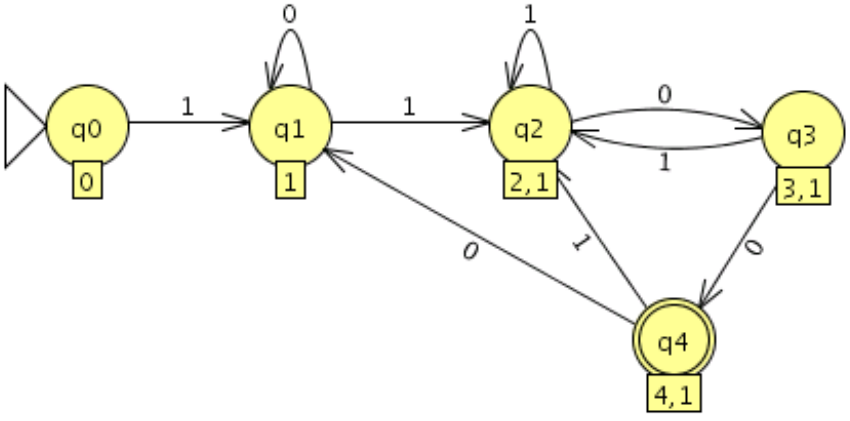
A4:



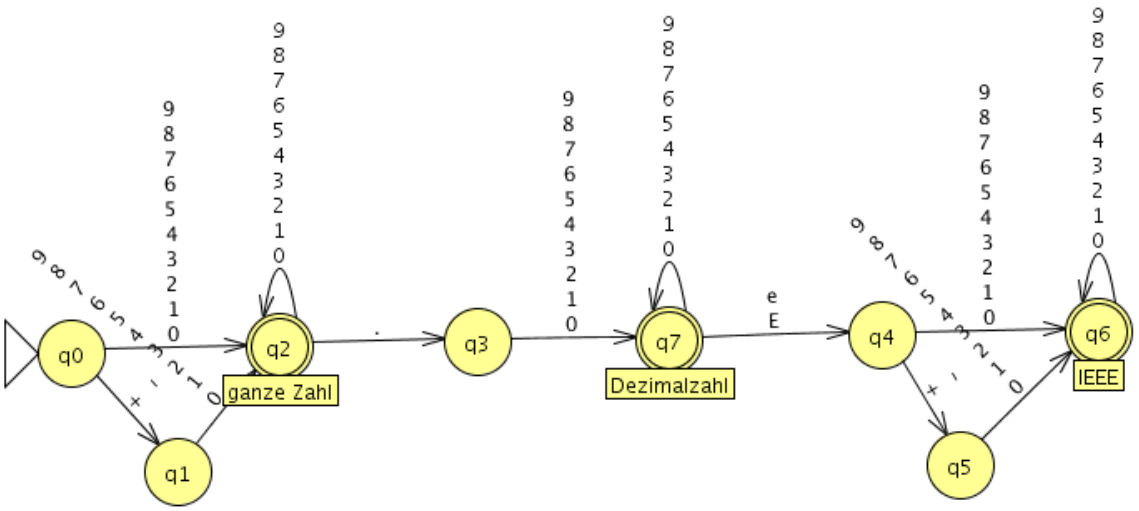
A5:NEA



A5:DEA



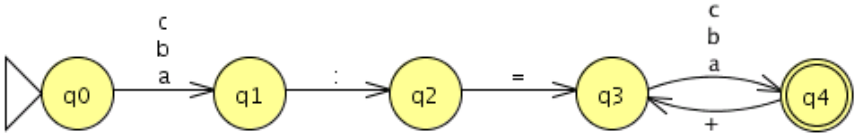
A7:



Sprachen – Übungsaufgaben

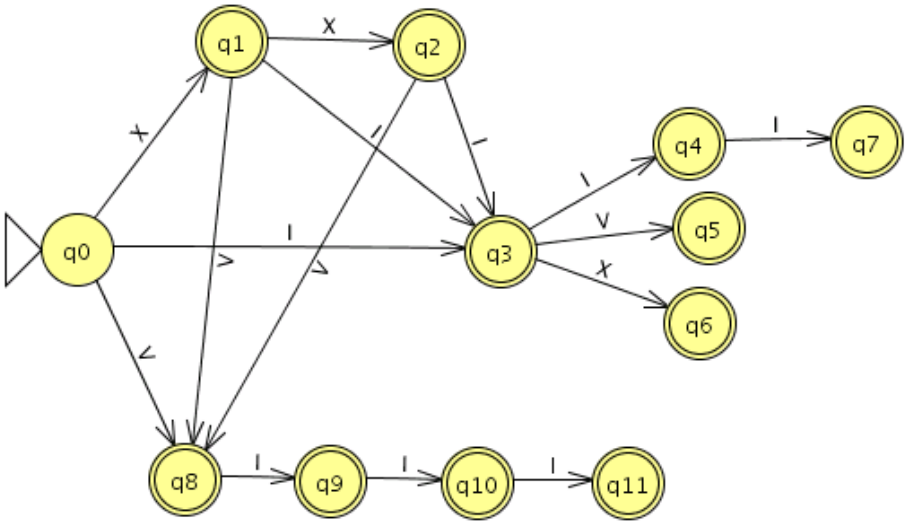
Ü1: Wort: ”a : = b + c”

```
        D e f
      / |   | \
   Var ':' '=' Ausdruck
    |             /  |  \
  'a'          'b' '+' 'c'
```



Ü2: BNF:

```
Zahl   = ['X' ['X']] Z1bis8 | ['I'] 'X' ['X'] .
Z1BIS8 = ['V'] 'I' ['I'['I']] | ['I'] 'V' .
```



Weitere Aufgaben:

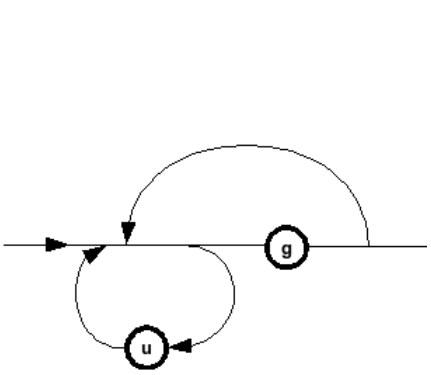
Aufgabe 1

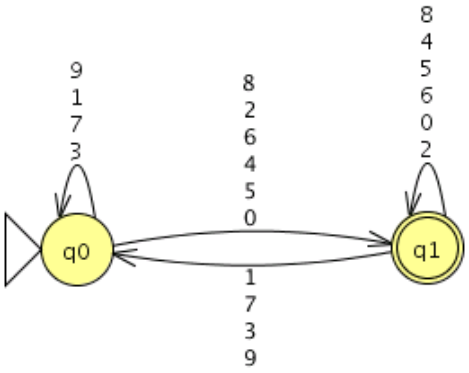
```
Fell Augen Ohren Rumpf Arme Beine Hut
Fell Augen Nase Ohren Rumpf Arme Beine Hut
Fell Augen Nase Barthaare Ohren Rumpf Arme Beine Hut

Fell Augen Ohren Rumpf Arme Beine Hose
Fell Augen Nase Ohren Rumpf Arme Beine Hose
Fell Augen Nase Barthaare Ohren Rumpf Arme Beine Hose

Fell Augen Ohren Rumpf Arme Beine Jacke
Fell Augen Nase Ohren Rumpf Arme Beine Jacke
Fell Augen Nase Barthaare Ohren Rumpf Arme Beine Jacke

Fell Augen Ohren Rumpf Arme Beine
Fell Augen Nase Ohren Rumpf Arme Beine
Fell Augen Nase Barthaare Ohren Rumpf Arme Beine
```

Aufgabe 2

```
Die Katze sieht die Katze
Die Frau beißt das Hund

Der Hund jagt die Katze:
              S a t z
            /         \
          NG           VG
        /    \        /   \
     Art     Sub    Verb   NG
      |       |      |    /   \
   "der"  "Hund" "jagt" Art  Sub
                         |    |
                       "die" "Katze"

Nominalgruppe = Artikel [Adjektiv] Substantiv .

T = { "jagt", "beißt", "sieht", "Hund", "Katze","Frau",
       "der", "die", "das" }
N = { Satz, Nominalgruppe, Verbalgruppe, Verb, Substantiv, Artikel }
Startsymbol = Satz
```

Aufgabe 3 Die Zahl wird Ziffernweise von links nach rechts gelesen.





Aufgabe 4

```
1 25 "Automaten" "Der Getränkeautomat ..."
2 50 "Grammatiken" "Die Sprache der Terme"
3 25 "Automaten" "Eine unglaubliche Robotersteuerung"
```

Aufgabe 5

```
(1) Z1       = [Zahl] Ungerade .
    Zahl     =  Ziffer {Ziffer} .
    Ungerade = '1' | '3' | '5' | '7' | '9' .
    Ziffer   = Ungerade | '0' | '2' | '4' | '6' | '8' .
(2) Geld     = Zahl '.' Cent "Euro" .
    Zahl     = Ziffer {Ziffer} .
    Cent     = Ziffer Ziffer .
(3) Zeit     = Std ':' Min ':' Sek .
    Std      = ('0'|'1') Ziffer | '2' ('0'|'1'|'2'|'3') .
    Min      = ('0'|'1'|'2'|'3'|'4'|'5') Ziffer .
    Sek      = Min .
    Ziffer   = '0'|'1'|'2'| .. | '9' .
```

Für Rückfragen, Anregungen und Kritik können Sie sich gerne an mich wenden. Die Materialien dieses Workshops finden Sie unter der angegebenen Internetadresse.

Walter Gussmann Paul-Natorp-Oberschule,
Internet: `http://www.pns-berlin.de`
Email: `wagu1@web.de`