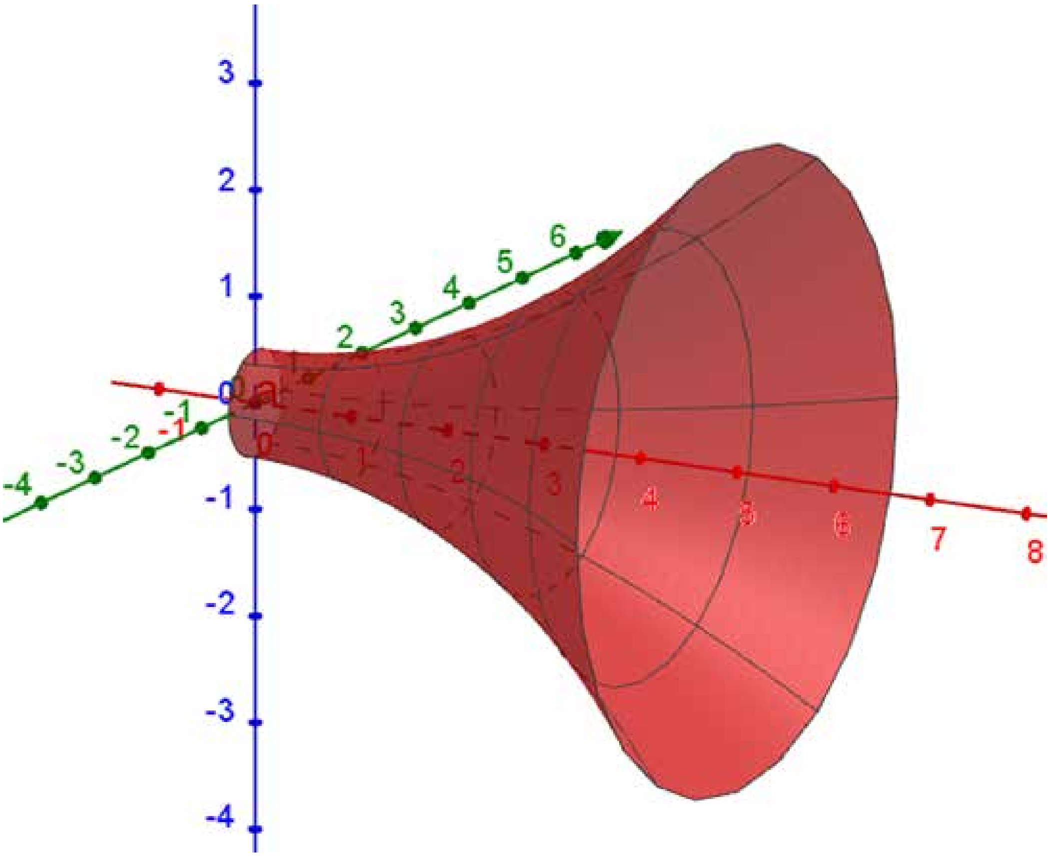
Senatsverwaltung
für Bildung, Jugend
und Familie

be Berlin



Geogebra – die dynamische Mathematiksoftware

Anregungen für das Arbeiten im Unterricht der Sek II

Impressum

Herausgeber
Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Familie
Bernhard-Weiß-Straße 6
10178 Berlin

Verantwortlich
Regina Ultze

Autor
Dr. Ulrich Döring

Redaktion
Ralf Punkenburg

Druck
Druckerei Bonifatius GmbH

Alle Abbildungen, soweit nicht anders angegeben, wurden vom Autor angefertigt.

1. Auflage 2018

Inhalt

Vorwort

Liebe Kolleginnen und Kollegen,

die vorliegende Handreichung soll Ihnen Anregungen zum Einsatz der dynamischen Mathematiksoftware „Geogebra“ in der Sekundarstufe II vermitteln. Ich hoffe, dass ich Ihnen damit eine kleine Hilfestellung gebe, wie man den Mathematikunterricht anschaulicher, vielfältiger, interessanter und vielleicht auch etwas zeitgemäßer gestalten kann.

Alle Geogebraarbeitsblätter, die in dieser Handreichung abgebildet sind, können vom Bildungsserver heruntergeladen werden, um sie entweder im Original zu verwenden oder nach eigenen Vorstellungen zu modifizieren.

An mehreren Stellen in der Handreichung wird die Verwendung des in „Geogebra“ implementierten Computeralgebrasystems (CAS) erläutert. Ich hoffe, damit einen Anstoß zu geben, dass sich mehr Kolleginnen und Kollegen dem Übergang zu einem vollständig CAS-gestützten Unterricht und einem CAS-Abitur zuwenden.

Ich danke der GeoGebra GmbH, dass sowohl die Verwendung von Geogebraabbildungen in der Handreichung als auch das Hochladen von Geogebraarbeitsblättern in digitaler Form ohne das Anfallen von Lizenzgebühren genehmigt wurde. Ebenso bedanke ich mich beim Cornelsen-Verlag, der die kostenfreie Nutzung einiger Aufgabenstellungen aus den Mathematik-Oberstufenbänden gestattet hat.

Berlin, August 2018 Dr. Ulrich Döring

I. Einführung

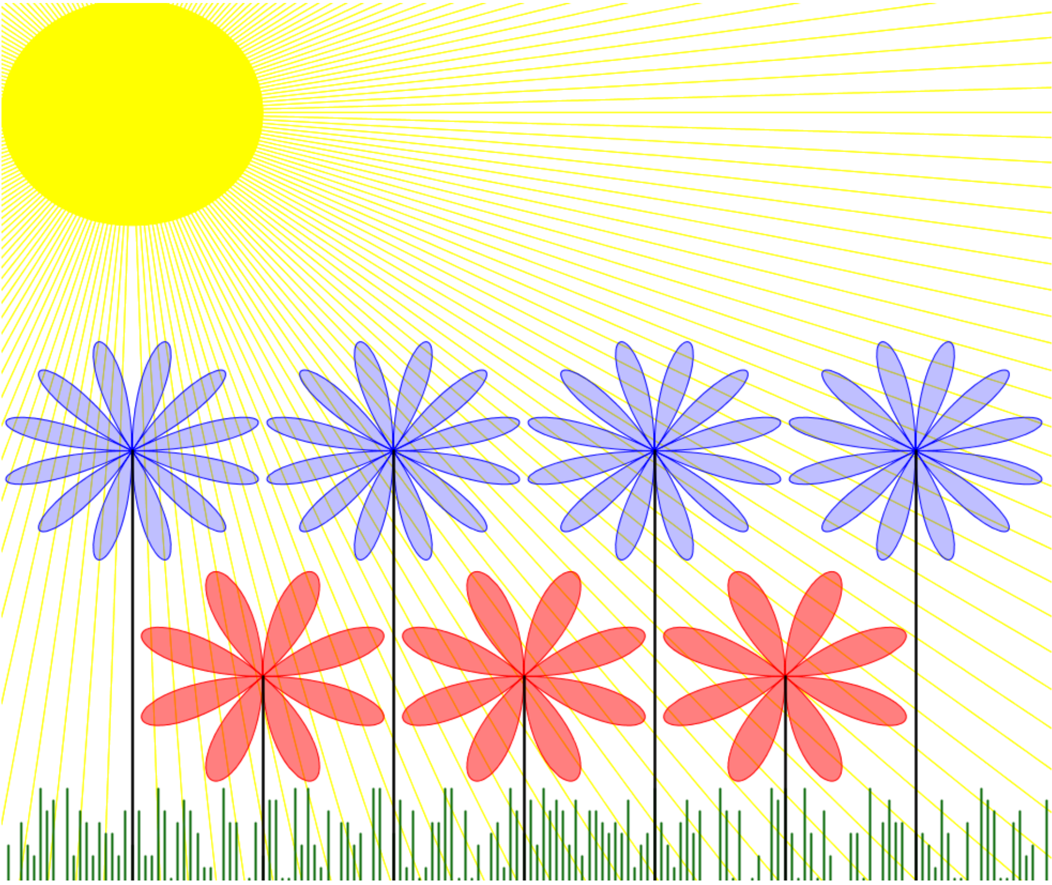
Medienkompetenz und Digitalisierung – diese beiden Stichworte bestimmen momentan die Diskussion in der Didaktik und in der Öffentlichkeit. Das Fach Mathematik ist prädestiniert dafür, dass man diese beiden Aspekte in verantwortungsvoller und kreativer Weise aufgreift und inhaltlich umsetzt. Es gibt seit vielen Jahren mehrere leistungsstarke Computeralgebrasysteme (CAS) auf dem Markt, die für den Schulunterricht geeignet sind. Mit dem dynamischen Geometrie- und Computeralgebrasystem **„Geogebra**“ steht ein **für Schüler und Lehrer kostenloses Programm** zur Verfügung, das weltweit verbreitet und vernetzt ist. Die Besonderheit dieses Programms besteht darin, dass die Befehle in die jeweilige Landessprache übersetzt worden sind. Es existieren bislang über 60 sprachspezifische Versionen. Ein herausstechendes Qualitätsmerkmal von Geogebra ist die 3 D-Applikation, die Anwendungen ermöglicht, die mit anderen kommerziellen Programmen nicht möglich sind.

Der Einsatz von Geogebra im Mathematikunterricht kann auf unterschiedlichen Niveaustufen erfolgen: 1. Zur Visualisierung, Animation und Simulation. Dadurch werden alternative und einprägsame „Eingangskanäle“ bei der Vermittlung ermöglicht. Durch beliebig häufige Wiederholungen (z. B. beim Erzeugen von Zufallszahlen) in Bruchteilen von Sekunden eröffnen sich Zugänge, die händisch nicht mehr praktikabel sind. 2. Das CAS von Geogebra kann zur Überprüfung händisch erstellter Rechenergebnisse dienen; ebenso die vielfachen Messmöglichkeiten in der 2 D- und 3 D-Graphik (Winkel, Längen, Flächen, Steigungen, etc.). 3. Geogebra kann für einen vollständig CAS-gestützten Unterricht verwendet werden. Insbesondere seit Einführung des verbindlichen OHiMi-Teils im Abitur fällt auch das letzte Argument weg, das gegen ein „CAS-Abitur“ spricht. Natürlich muss auch ein „CAS-Schüler“ alle Problemstellungen „per Hand“ bearbeiten können, die von einem „Nicht-CAS-Schüler“ verlangt werden. Die für die Einübung in die Bedienung des CAS notwendige Zeit gewinnt man dadurch, dass unsinnige zig-fache Wiederholungen vermieden werden. Z. B. löst ein „Nicht-CAS-Schüler“ im 3. Semester ca. 100 LGS. Es dürfte einsichtig sein, dass es für das mathematische Verständnis ausreichend ist, wenn man es bei ca. 10 händischen Lösungen belässt.

Die vorliegende Handreichung soll exemplarisch - anhand einiger Schlüsselstellen des Mathematikunterrichts der Sek II - Anstöße geben, wie man Geogebra gewinnbringend einsetzen kann. Dabei werden insbesondere solche Beispiele vorgestellt, die den Einsatz zur Visualisierung und Animation zeigen. Damit sollen diejenigen Kolleginnen und Kollegen angesprochen werden, die sich zunächst den Sprung in einen vollständig CAS-gestützten Unterricht nicht zutrauen. Zusätzlich werden auch einige CAS-spezifische Anwendungen vorgestellt. Die im Folgenden beschriebenen Geogebraarbeitsblätter stehen allen Kolleginnen und Kollegen auf dem Bildungsserver zum Downloaden zur Verfügung. In dieser Handreichung wird zu den Arbeitsblättern jeweils ein kurzer didaktischer Kommentar angemerkt. Eine detaillierte Beschreibung zur Erstellung der Arbeitsblätter, wie sie bei der Durchführung zahlreicher Geogebraworkshops bei Lehrerfortbildungen eingesetzt und erprobt wurde, ist als Download verfügbar, um den Umfang der Handreichung im Rahmen zu halten. Um eine Einschätzung für diese Detailbeschreibungen zu vermitteln, ist für jeden der 3 Themenbereiche (Analysis, Analytische Geometrie, Stochastik) exemplarisch eine Detailbeschreibung in dieser Handreichung angefügt. Für jedes der 3 Stoffgebiete werden außerdem jeweils am Ende des Kapitels Beispiele für den Geogebraeinsatz gegeben, die über den RLP hinausgehen.

Geogebra bietet momentan 2 Varianten an: Die neueste Version Geogebra 6 Classic und Geogebra 5 Classic. Die neuere Version hat den Vorteil, dass die Eingabe von Formeln über einen einfachen Editor möglich ist, der bei der älteren Version Geogebra 5 noch nicht verfügbar ist. D. h. bei Geogebra 6 können z. B. Wurzelterme mit dem Wurzelzeichen ($\sqrt{\ldots}$) und nicht wie bei Geogebra 5 als sqrt(...) eingegeben werden. Allerdings ist die Version Geogebra 5 beim Bearbeiten vor allen Dingen von komplexeren Aufgaben momentan (Stand Frühjahr 2018) noch stabiler. Daher wird die Erstellung der Arbeitsblätter mit Geogebra 5 beschrieben, zumal die sonstigen Unterschiede trotz etwas geänderter Menueführung eher marginal sind.

Zur Einstimmung zeigt die folgende Abbildung einen „Sommergarten", der mit Geogebra erzeugt wurde.



Dieses naive Bild kann mit 8 Geogebrabefehlen erzeugt werden. Benötigt werden allerdings einige Formeln aus dem Gebiet der parametrischen Kurven. Man beachte auch Feinheiten, wie das unregelmäßig wachsende Gras.

1. Sonne: Kurve[cos(t) - 3, sin(t) + 7, t, 0, 6.28319]
2. Sonnenstrahl: nor(x,t):=sin(t)/cos(t)*(x-cos(t)+3)+sin(t)+7
3. Sonnenstrahlen: Folge[nor(x, t), t, -3.14159, π, 0.03142]
4. Rote Blumen: Folge[Kurve[sin(4t) cos(t) + n, sin(4t) sin(t) + 2, t, 0, 6.28319], n, -2, 2, 2]
5. Blaue Blumen: Folge[Kurve[sin(6t) cos(t) + n, sin(6t) sin(t) + 4, t, 0, 6.28319], n, -3, 3, 2]
6. Gras: Folge[Strecke[(-4 + n, 0), (-4 + n, 1 / 10 Zufallszahl[1, 10])], n, 0, 8, 0.05]
7. Blumenstiele unten: Folge[Strecke[(-2 + n, 0), (-2 + n, 2)], n, 0, 4, 2]
8. Blumenstiele oben: Folge[Strecke[(-3 + n, 0), (-3 + n, 4)], n, 0, 6, 2]

II. Analysis

1. Die h-Methode (graphisch und rechnerisch)

Das folgende Geogebraarbeitsblatt zeigt dynamisch am Beispiel der Funktion f mit

$f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2$, wie sich die Tangentensteigung als Grenzwert von Sekantensteigungen ergibt. Dazu verkleinert man mithilfe des Schiebereglers die Koordinatendifferenz h und lässt den Punkt Q(1+h/f(1+h)) zum Punkt P(1/f(1)) „hinwandern". Auf dem Arbeitsblatt wird sowohl die Steigung der Tangente m_T als auch die Steigung der jeweiligen Sekante m_S angezeigt. Wenn man im CAS-Fenster den Ausdruck für die Sekantensteigung definiert [ms(x,h):=(f(x+h)-f(x))/h] lassen sich mithilfe des Folgebefehls [Folge((h,ms(1,h)),h,1,0.1,-0.1] Zahlenpaare für die Koordinatendifferenz h und die dazugehörige Sekantensteigung für kleiner werdendes h rechnerisch ermitteln. Die Werte können als Pulldown-Menue eingeblendet werden. Man sieht, dass die Werte der Sekantensteigungen gegen den Wert der Tangentensteigung konvergieren.

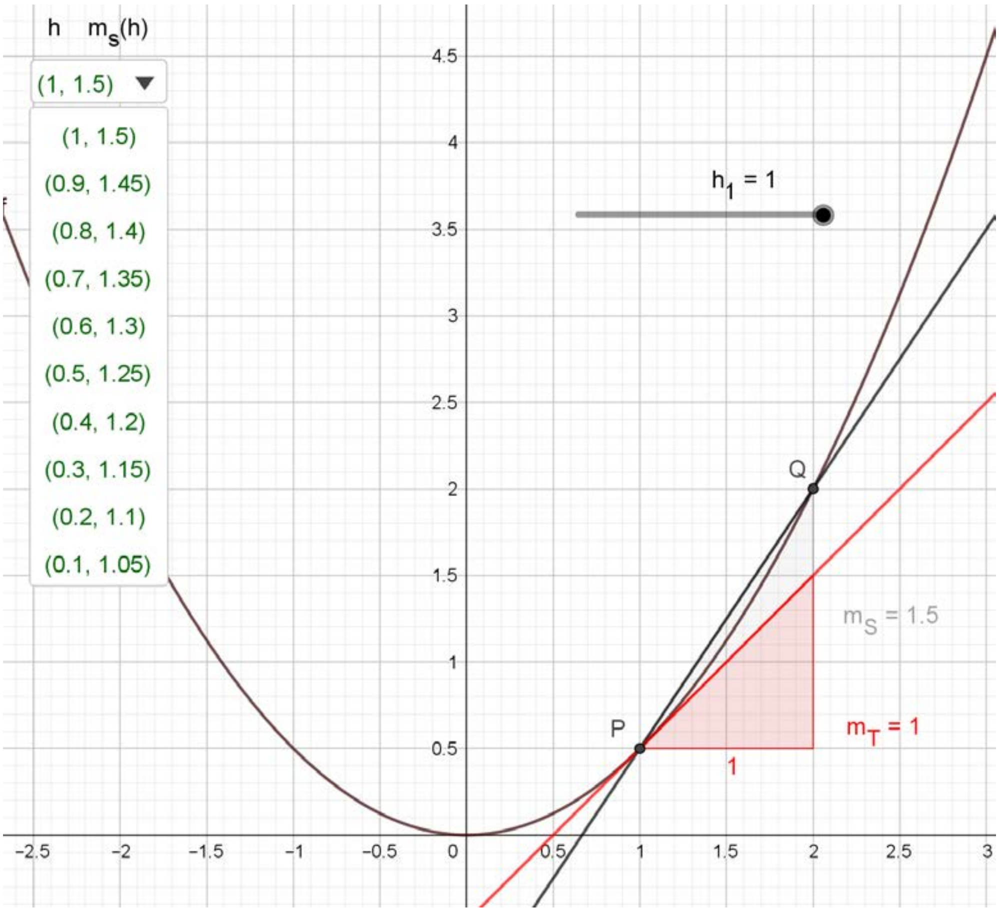


Abb. 1: Die h-Methode

1.1. Anleitung zur Erstellung der Graphik zur h-Methode

Vorbemerkung: Die folgende Beschreibung kann keinen Workshop ersetzen, bei dem man den Vorteil hat, dass das Erstellen eines Geogebraarbeitsblattes vorgemacht wird und dass in den Selbstarbeitsphasen Rückfragen möglich sind.

Geben Sie in die Eingabezeile den Funktionsterm $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ ein. Zeichnen Sie den Punkt P(1/f(1)). Dazu schreibt man in die Eingabezeile: P=(1,f(1)). Fügen Sie einen Schieberegler für h_1 (Geogebraeingabe h_1) ein (Intervall: Min: 0.05; Max: 1; Schrittweite: 0.05). Zeichnen Sie einen zweiten Punkt Q($1+h_1$/f($1+h_1$)). Die Bezeichnung h_1 wird gewählt, damit später im CAS-Fenster die Variablenbezeichnung h verwendet werden kann. Sonst würde der Zahlenwert aus dem Graphikfenster übernommen werden. Zeichnen Sie die Tangente im Punkt P (rot, dicker Strich) und messen Sie die Steigung der Tangente. Zeichnen Sie eine Sekante durch die Punkte P und Q und messen Sie die Steigung der Sekante. Lassen Sie mithilfe des Schiebereglers den Punkt Q auf den Punkt P „zuwandern“.

Öffnen Sie jetzt das CAS-Fenster (über „Ansicht „→“CAS“). Definieren Sie einen CAS-Baustein ms(x,h): $ms(x,\mathrm{h}):=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (bei der Eingabe auf richtige Klammersetzung achten!) . Testen Sie die Funktionsweise durch Eingabe von ms(1,1): Ergebnis: 1.5. Erzeugen Sie nun eine Liste von Zahlenpaaren für die Koordinatendifferenzen und die dazugehörigen Sekantensteigungen für immer kleiner werdende Koordinatendifferenz: Folge((h,ms(1,h)),h,1,0.1,-0.1): Ergebnis: L_1 = {(1, 1.5), (0.9, 1.45), (0.8, 1.4), (0.7, 1.35), (0.6, 1.3), (0.5, 1.25), (0.4, 1.2), (0.3, 1.15), (0.2, 1.1), (0.1, 1.05)} .

Sie können die Liste als Drop-Down-Menue im Graphikfenster anzeigen lassen, indem Sie bei Liste L_1 (Rechtsklick) auf „Eigenschaften“ → „Grundeinstellungen“ gehen und einen Haken beim Menuepunkt: Als Drop-Down-Liste anzeigen setzen.

2. Tangenten

Nach Einführung der Formel für die Tangente lassen sich mit wenigen Befehlen ästhetisch ansprechende Graphiken erstellen. Die folgenden Abbildungen 2 – 5 zeigen Normalparabel, Wurzelfunktion (f(x) = $2\sqrt{x}$), Kreis und Ellipse als Hüllkurven ihrer Tangenten. Die Beispiele sind nach zunehmendem Schwierigkeitsgrad ausgewählt. Die ersten beiden Beispiele sollten die Schüler relativ problemlos bewerkstelligen können. Bei der Darstellung des Einheitskreises als Hüllkurve seiner Tangenten sind unterschiedliche Vorgehensweisen denkbar. 1. Man leitet elementargeometrisch die Tangentengleichung

$t(x)=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\left(x-\cos(\alpha)\right)+\sin(\alpha)$ her und zeichnet dann die Tangentenschar mithilfe des Folgebefehls. 2. Man beschreibt den oberen und unteren Halbkreis als Funktion und leitet die Tangentengleichung $t(x)=\pm\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\left(x-u\right)\pm\sqrt{1-u^2}$ an der Berührstelle u her. 3. Man verwendet die Parameterdarstellung des Einheitskreises und verwendet folgende Darstellung für die Tangentengleichung: $t(x)=-\frac{\cos(t)}{\sin(t)}\cdot\left(x-\cos(t)\right)+\sin(t)$. Bei der analogen Aufgabe für die Ellipse empfiehlt sich die zuletzt skizzierte Vorgehensweise. Die Parameterdarstellung von Kurven ist prädestiniert für das Arbeiten mit einem CAS. Auch wenn deren Behandlung im RLP nicht verlangt wird, sollte man zumindestens exemplarisch die parametrische Beschreibung von Kreis und Ellipse unterrichten. Das Thema „parametrische Kurven“ ist übrigens auch vorzüglich als Aufgabenstellung für schriftliche Hausarbeiten als BLL geeignet, insbesondere mit dem Bezugsfach Physik.

2.1. Parabel als Hüllkurve

2.2. Wurzelfunktion als Hüllkurve

Aufgabenstellung zu 2.1.: Zeichnen Sie 60 Tangenten an die Normalparabel im Intervall [-3; 3]! Aufgabenstellung zu 2.2.: Zeichnen Sie vom Punkt P(0/a) Tangenten an den Graphen der Funktion f mit $f(x)=2\cdot\sqrt{x}$ für die Parameterwerte $a=0{,}1,\ 0{,}2,\ ...,\ 4{,}0$!

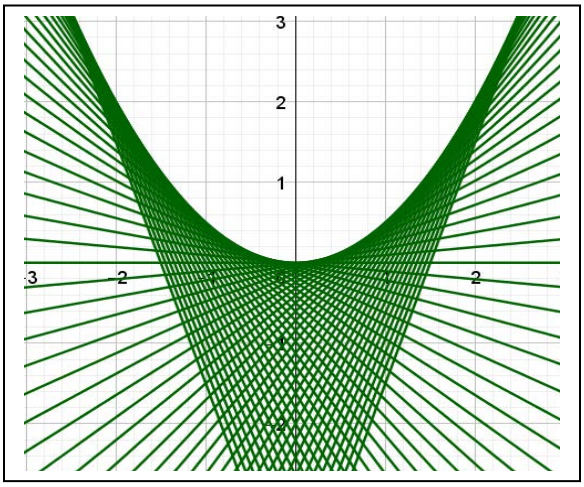


Abb. 2: Parabel als Hüllkurve

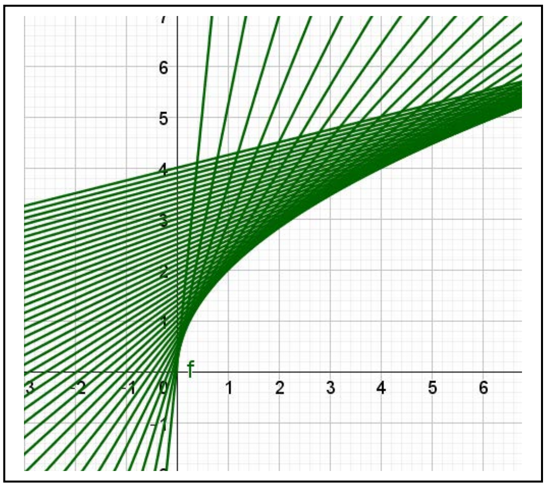


Abb. 3: Wurzelfunktion als Hüllkurve

2.3. Kreis als Hüllkurve

2.4. Ellipse als Hüllkurve

Aufgabenstellungen zu 2.3. und 2.4.: Zeichnen Sie 98 Tangenten an den Kreis (an die Ellipse). Zu 2.3. Finden Sie unterschiedliche Lösungsmöglichkeiten?

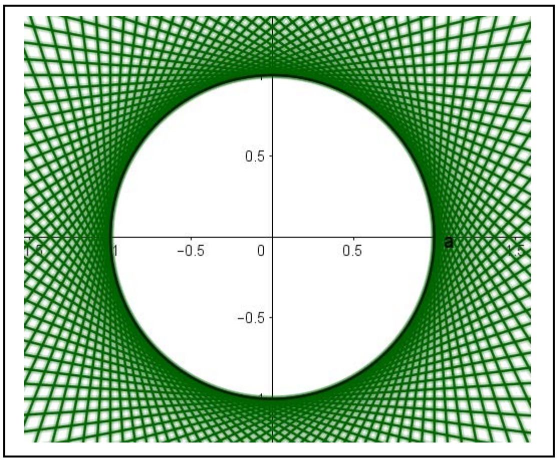


Abb. 4: Kreis als Hüllkurve

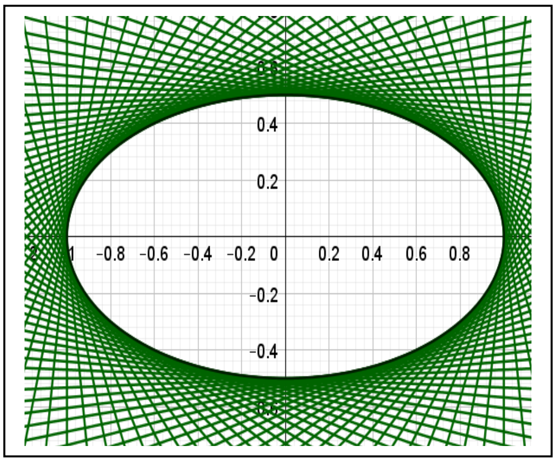


Abb. 5: Ellipse als Hüllkurve

2.5. CAS-Aufgabe: Tangente an 2 Graphen

Die im Folgenden beschriebene Aufgabe ist eine reine CAS-Aufgabe, d. h. sie wäre händisch nicht so einfach zu bewältigen. Sie hat sich nach den Erfahrungen des Verfassers im Unterricht als sehr trennscharf erwiesen (übrigens auch bei Lehrerfortbildungsveranstaltungen!), wird aber von guten Schülern durchaus gelöst.

Gegeben sind die Graphen der Funktionen $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ und h(x) = sin(x). Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente, die beide Graphen berührt! Anmerkung: Die Aufgabe hat natürlich unendlich viele Lösungen. Geogebra liefert aber die nebenstehend abgebildete Lösung, wenn Sie ein geeignetes GS **numerisch** lösen. Man kann zeigen, dass das Problem auf die Lösung der Gleichung $\cos^2 v + 2v \cdot \cos v - 2\sin v + 4 = 0$ führt, wobei v die Berührstelle am Graphen der Sinusfunktion ist. Löst man diese Gleichung numerisch, zeigt Geogebra 19 Lösungen an.

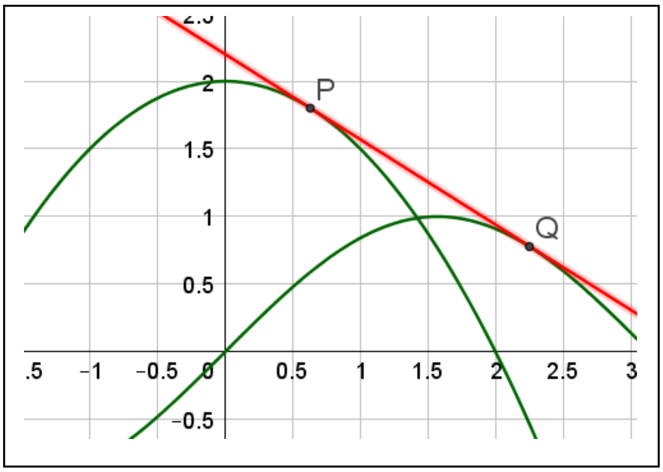


Abb. 6: Tangente an 2 Graphen

3. Ableitung, Monotonie- und Krümmungskriterium

Anhand des folgenden Arbeitsblattes können am Beispiel der Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x$ wesentliche Elemente einer Kurvendiskussion abschnittsweise visualisiert werden. Unter Verwendung von Kontrollkästchen können die Graphen der 1. und 2. Ableitung eingeblendet werden. Das Monotoniekriterum wird veranschaulicht (z. B. $f'(x)<0$ für alle $x\in I \Rightarrow$ f ist auf I streng monoton fallend), indem die entsprechenden Graphenabschnitte von f und f ‘ dick gestrichelt hervorgehoben werden. In analoger Weise kann auch das Krümmungskriterium verdeutlicht werden (z. B. $f''(x)<0$ für alle $x\in I \Rightarrow$ f ist auf I rechtsgekrümmt). Wichtig ist, dass mithilfe der Kontrollkästchen bestimmte Teildarstellungen wieder „herausgenommen“ werden können, weil sonst die graphische Darstellung zu überladen wird.

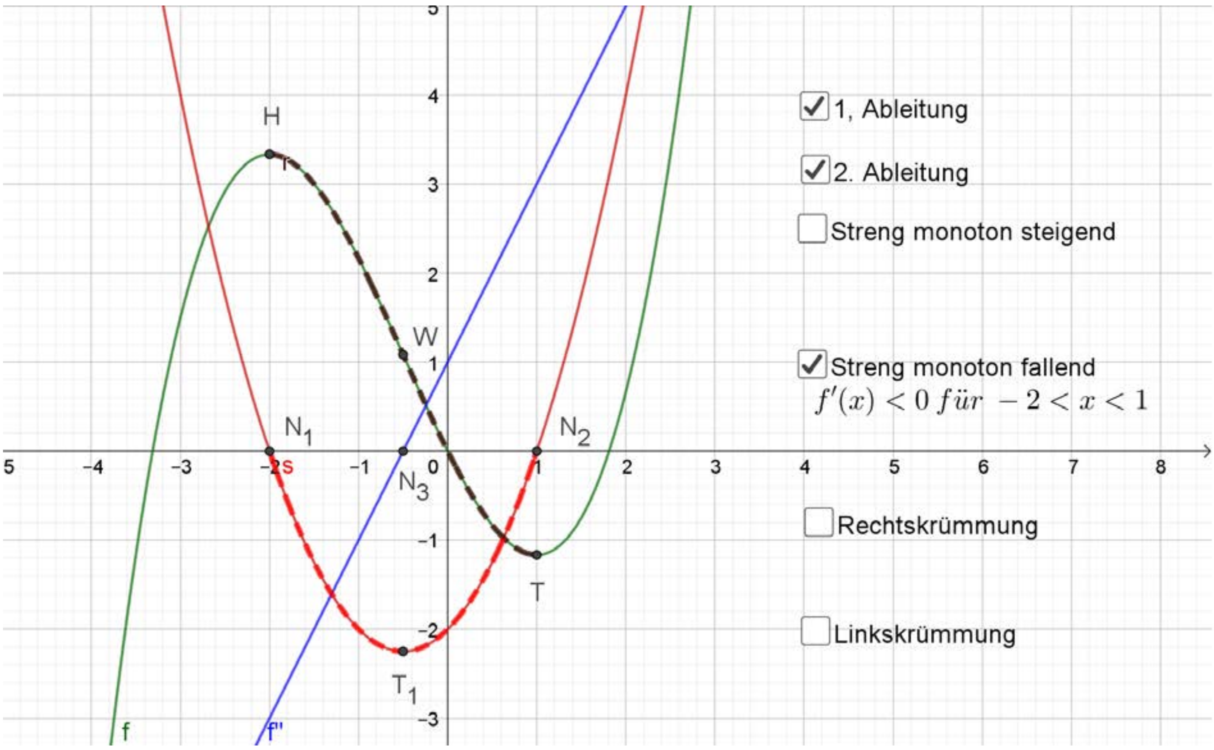


Abb. 7: Ableitung, Monotonie- und Krümmungskriterium

4. Verschiedene Extremwertaufgaben (Animationen)

Fast alle Extremwertaufgaben können mithilfe der Geogebra 2 D- bzw. 3 D-Graphik animiert werden. Im Folgenden werden zunächst 2 sehr einfache Beispiele gezeigt (Fläche unter der Parabel, Abstand Punkt/Graph). Anschließend wird die berühmte „Schachtelaufgabe" sowohl als 2 D- als auch als 3 D-Animation dargestellt. Abschließend erfolgt eine Aufgabe (Zylinder maximalen Inhalts, der einem Kegel einbeschrieben wird), bei deren Darstellung ein Zusammenwirken von 2 D- und 3 D-Graphik erfolgt.

4.1. Rechtecksfläche unter Graphen

Der Eckpunkt P(x,y) des abgebildeten achsenparallelen Rechtecks liegt auf der Parabel

$f(x) = 3 - x^2$ *(vgl. Abb. 8). Wie muss x gewählt werden, damit die Rechtecksfläche maximal wird?*

Quelle: Bigalke/Köhler: Mathematik, Berlin, Grundkurs ma-1, S. 125, Cornelsen-Verlag, Berlin 2010

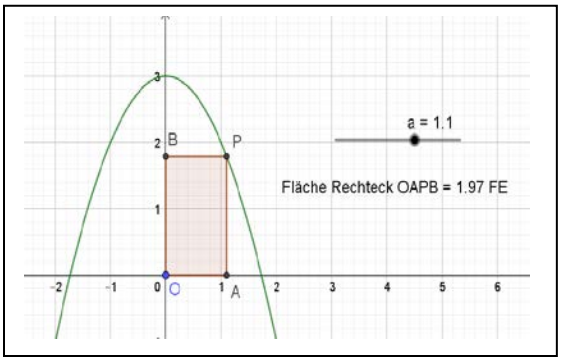


Abb. 8: Rechtecksfläche unter Parabel

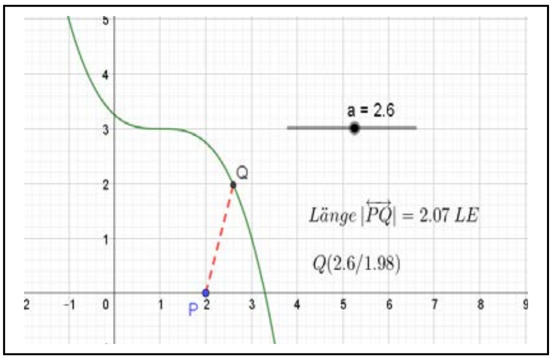


Abb. 9: Abstand Punkt/Graph

4.2. Abstand Punkt/Graph

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{4}(x-1)^3 + 3$ und der Punkt P(2/0). Ermitteln Sie den kleinsten Abstand des Punktes P zum Graphen der Funktion f! Welche Koordinaten hat der zugehörige Punkt Q auf dem Graphen von f (vgl. Abb. 9)?

4.3. Schachtel (2 D- und 3 D-Animation)

Aus einem rechteckigen Stück Pappe von 42 cm Länge und 30 cm Breite soll eine oben offene Schachtel hergestellt werden. Dazu wird an jeder Ecke ein Quadrat abgeschnitten. Anschließend werden die überstehenden Streifen hochgeklappt. Wie groß müssen die Quadrate sein, damit das Volumen der Schachtel maximal wird?

Quelle: Bigalke/Köhler: Mathematik, Berlin, Leistungskurs MA-1, S. 165, Cornelsen-Verlag, Berlin 2010

Diese Standardaufgabe kann man sowohl mit der 2 D- (Abb. 10) als auch mit 3 D- Applikation (Abb. 11) animieren.

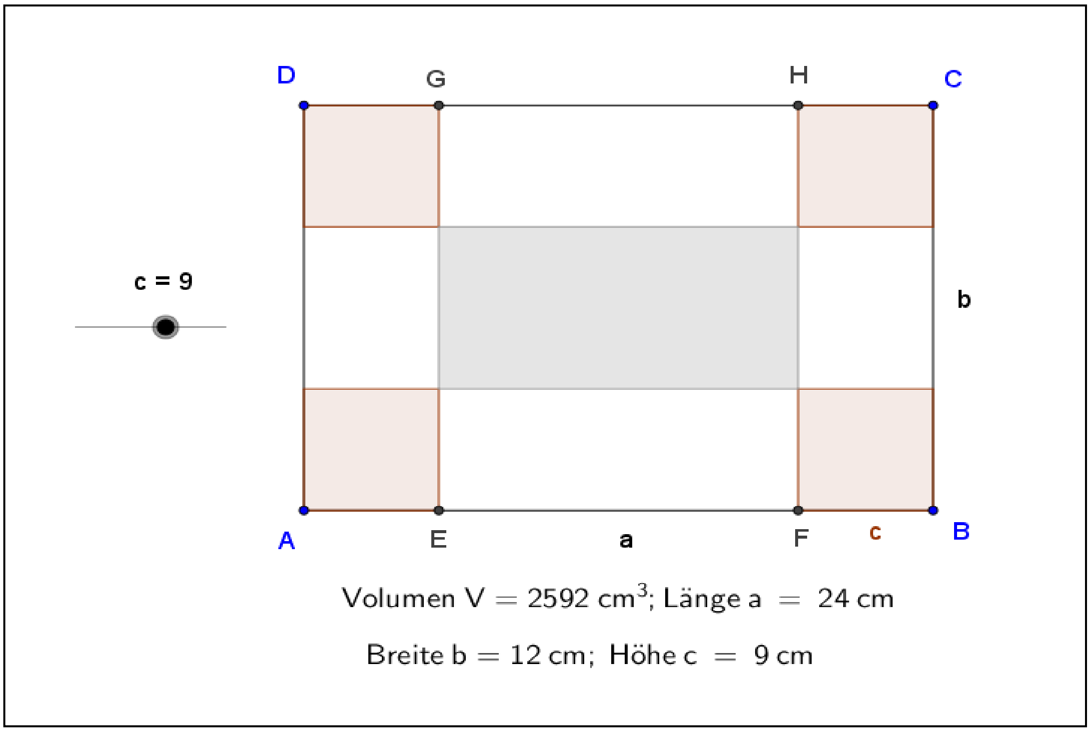


Abb.: 10: Extremwertaufgabe Schachtel (2 D-Animation)

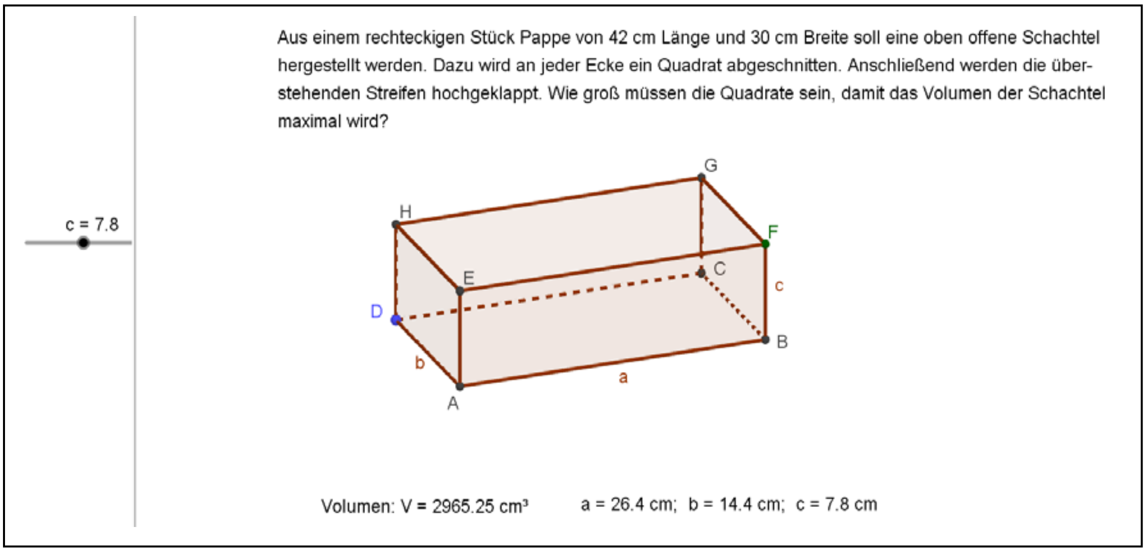


Abb.: 11: Extremwertaufgabe Schachtel (3 D-Animation)

4.4. In Kegel einbeschriebener Zylinder (3 D- und 2 D-Kombi)

Welche Maße muss ein einem Kegel einbeschriebener Zylinder haben, damit sein Volumen maximal wird?

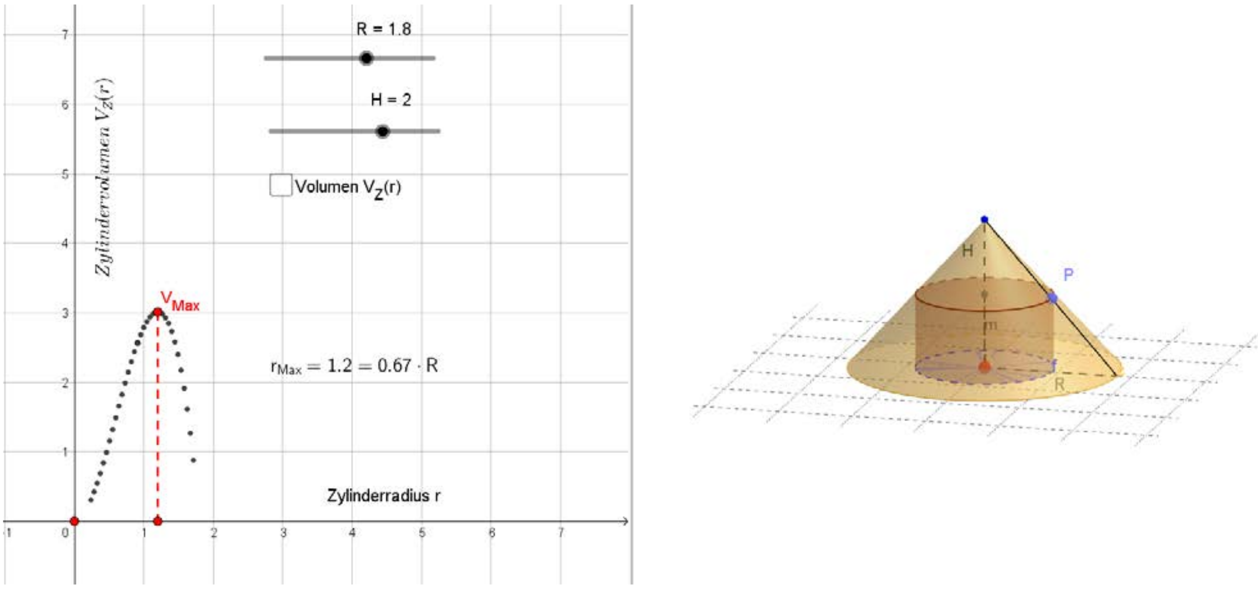


Abb. 12: Extremwertaufgabe: In Kegel einbeschriebener Zylinder

Mithilfe der Schieberegler lassen sich Radius R und Höhe H des Kegels im 3 D-Fenster verändern. Durch Ziehen des Punktes P kann man die Höhe des einbeschriebenen Zylinders variieren. Die zugehörigen Wertepaare (Zylinderradius; Zylindervolumen) werden in das Koordinatensystem als Punkte im Spurmodus in das 2 D-Fenster übertragen. Der Graph der zugehörigen Funktion für das Volumen des Zylinders kann über das Kontrollkästchen eingeblendet werden. Der Maximalwert V_{max} wird jeweils angezeigt, ebenso der dazugehörige maximale Zylinderradius r_{Max} in der Form $r_{Max} = c \cdot R$. Unabhängig vom gewähltem Kegelradius R und gewählter –höhe H resultiert immer $r_{Max} = 0{,}67R$. D. h. das Ergebnis ist unabhängig von den Kegelmaßen. Der Auftrag an die Schüler lautet nun, dies in allgemeiner Form zu zeigen.

5. Newton-Verfahren

Einem „CAS-Schüler“ (und eigentlich auch jedem „NichtCAS-Schüler“) muss klar sein, dass es Gleichungen gibt, die nur numerisch und nicht analytisch lösbar sind. Auch wenn der RLP die Behandlung des Newton-Verfahrens nicht mehr verbindlich vorschreibt, sollte einsichtig sein, dass ein „CAS-Schüler“ zumindestens ein Verfahren zur numerischen Lösung von Gleichungen kennen sollte. Wegen seiner Einfachheit und schnellen Konvergenz bietet sich das Newton-Verfahren hier an. Unter Verwendung des unten abgebildeten interaktiven Arbeitsblattes kann man leicht die Rekursionsformel $x_{N+1} = x_N - \frac{f(x_N)}{f'(x_N)}$ herleiten.

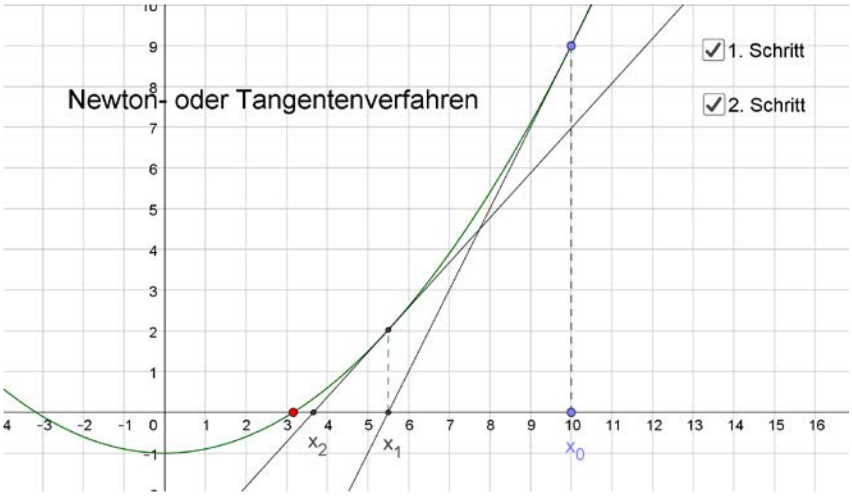


Abb. 13: Newton-Verfahren

Berechnungen mithilfe des Newton-Verfahrens sind ein Musterbeispiel für den sinnvollen Einsatz von CAS-Systemen. Wer jemals mit Schülern numerische Lösungen mithilfe einer Tabelle und Taschenrechner(speicher)einsatz ermittelt hat, weiß wie langwierig und fehleranfällig dies ist. Die Vorgehensweise mithilfe von Geogebra sei am Beispiel erläutert:

Beispiel: Gesucht ist die Nullstelle der Funktion f mit $f(x) = x^3 + 3x - 6$. Durch Testeinsetzungen ermittelt man, dass die gesuchte Nullstelle im Intervall [1; 2] liegt. Man definiert dann f(x) und die Ableitung f ‘(x) im CAS-Fenster von Geogebra. Dann öffnet man die Tabellenkalkulation und gibt bei A1 den Startwert 2 ein. Dann gibt man in die Zelle B1 ein: $= A1 - \frac{f(A1)}{f'(A1)}$.

Den errechneten Wert gibt man in die Zelle A2 ein: =B1. Dann zieht man die Zelle B1 am rechten Kästchen herunter. Jetzt kann man beide Zellen markieren, die „Strg“-Taste drücken und solange „herunterziehen“ bis der gesuchte Wert mit der gewünschten Genauigkeit konstant bleibt (s. Abb. rechts).

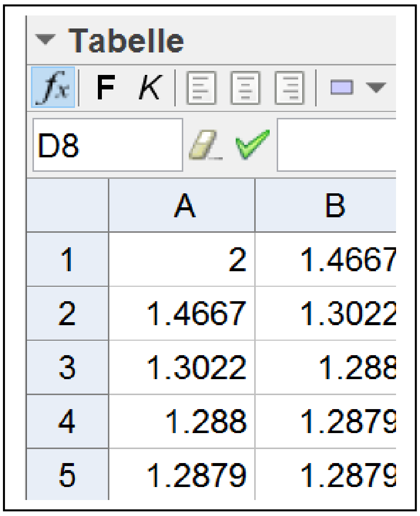


Tabelle
D8

	A	B
1	2	1.4667
2	1.4667	1.3022
3	1.3022	1.288
4	1.288	1.2879
5	1.2879	1.2879

Abb.14: Tabellenkalkulation beim Newton-Verfahren

Es gibt noch eine zweite bestechende Möglichkeit, das Newton-Verfahren mithilfe von Geogebra schrittweise zu visualisieren. Dabei werden in der Tabelle Berührpunkte und Tangenten ermittelt, die dann graphisch dargestellt werden. Durch „Herunterziehen“ lassen sich dann die einzelnen Näherungsschritte graphisch darstellen.

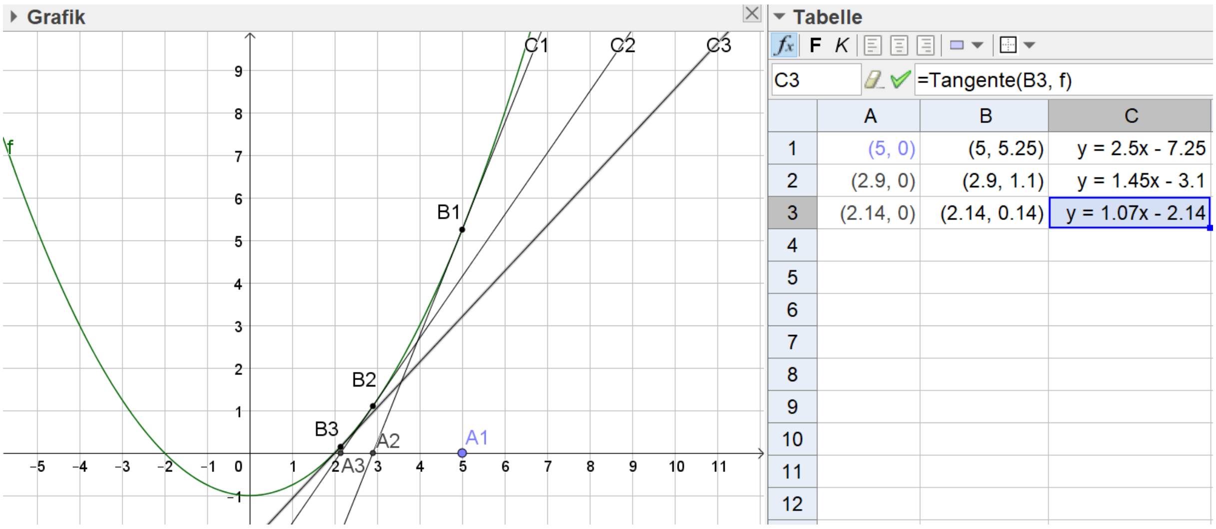


Abb. 15: Animation des Newtonverfahrens mithilfe der Tabelle

6. Einführung in die Integralrechnung (Streifenmethode)

Das folgende Geogebraarbeitsblatt veranschaulicht, wie man die Fläche unter der Normalparabel im Intervall [0, 1] durch eine innere und eine äußere Treppenfläche einschachteln kann. Durch Betätigen des Schiebereglers für die Streifenzahl n kann man zeigen, dass die Einschachtelung mit steigender Anzahl der Streifen immer genauer wird. Die einzelnen Flächen können durch Betätigen der entsprechenden Kontrollkästchen farbig hervorgehoben werden; ebenso die Differenz zwischen äußerer und innerer Treppenfläche. Zusätzlich werden die zugehörigen Flächeninhalte (Untersumme U_n, Obersumme O_n) sowie deren Differenz $O_n - U_n$ auf dem Arbeitsblatt angezeigt. Mit den Schülern kann man exemplarisch die Terme für O_4, U_4 und $O_4 - U_4$ aufstellen und deren Werte händisch berechnen. Durch Betätigen des Schiebereglers kann man die Streifenzahl bis n = 256 jeweils verdoppeln. Man kann dann anhand der Zahlen vermuten, dass gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} O_n = \frac{1}{3}$, $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \frac{1}{3}$, $\lim\limits_{n\to\infty} (O_n - U_n) = 0$. Damit wird die allgemeine Herleitung für die exakte Ermittlung des Flächeninhalts durch Grenzwertbildung in wesentlichen Aspekten vorbereitet.

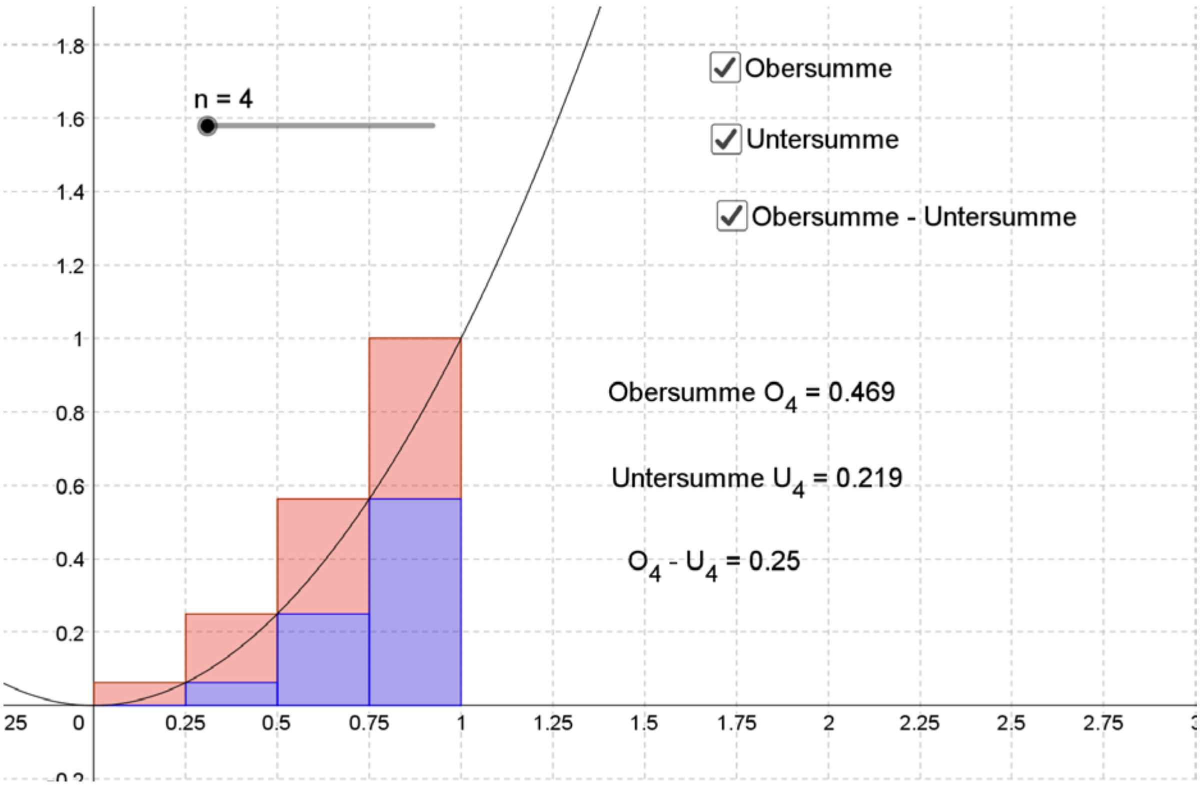


Abb. 16: Flächeninhalt unter der Normalparabel

7. Kegelvolumen durch Intervallschachtelung

Als weiteres Übungsbeispiel zur Intervallschachtelung bietet sich die Ermittlung des Kegelvolumens mithilfe eines inneren und eines äußeren Treppenkörpers aus Zylinderscheiben an. Auch dies kann mithilfe eines Geogebraarbeitsblattes sehr schön visualisiert werden und demonstriert eindrucksvoll die Qualität der 3 D-Applikation und das perfekte Zusammenspiel zwischen dem Algebra- und dem Zeichenfenster.

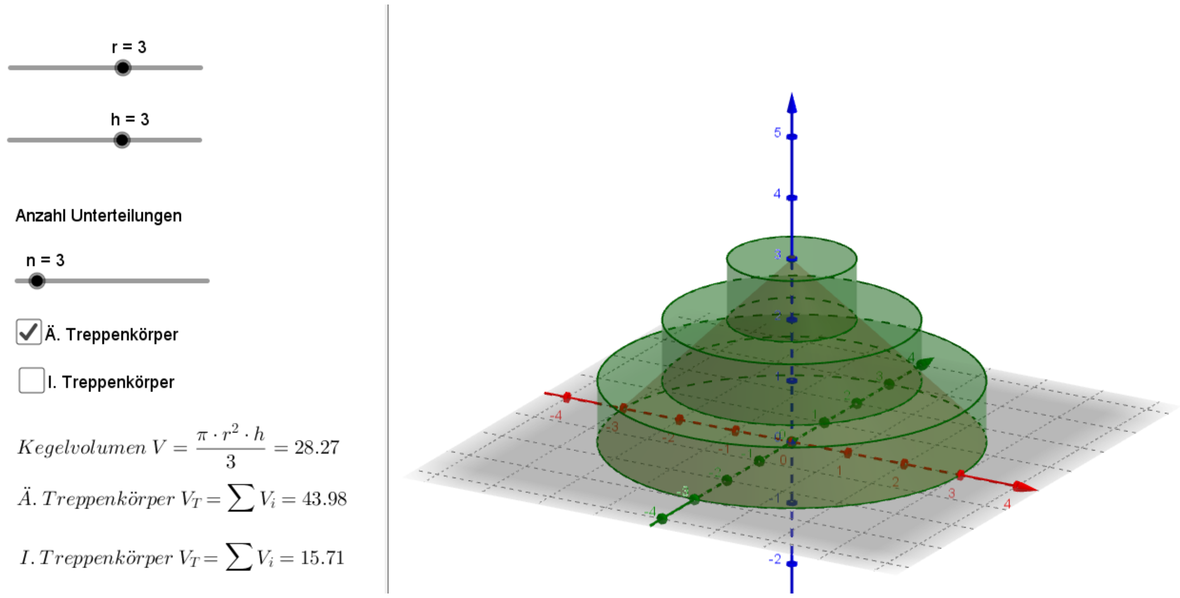


Abb. 17: Ermittlung des Kegelvolumens durch Intervallschachtelung

In analoger Weise lässt sich auch die Approximation des Volumens einer quadratischen Pyramide durch einen äußeren und einen inneren Treppenkörper aus quadratischen Prismen veranschaulichen. Das entsprechende Geogebraarbeitsblatt ist incl. Beschreibung zu seiner Erstellung auf dem Bildungsserver zugänglich.

8. Rotationskörper

Zur Visualisierung von Rotationskörpern um die x-Achse werden 2 verschiedene Darstellungen am Beispiel der Funktion $f(x) = \frac{1}{10} \cdot x^2 + \frac{1}{2}$ vorgestellt. Die in Abb. 18 gezeigte Graphik dient nur zur Veranschaulichung und wird mit dem Befehl Oberfläche(f,360) erzeugt, nachdem man die Funktion f mit dem Befehl Funktion($\frac{1}{10} \cdot x^2 + \frac{1}{2}$,0,5) im Intervall [0; 5] definiert hat. Die Abbildung 19 zeigt denselben Rotationskörper, indem man durch dreidimensional-parametrisches Zeichnen Kreise in kleinem Abstand zueinander mit dem jeweiligen Funktionswert als Radius parallel zur y,z-Ebene erzeugt.

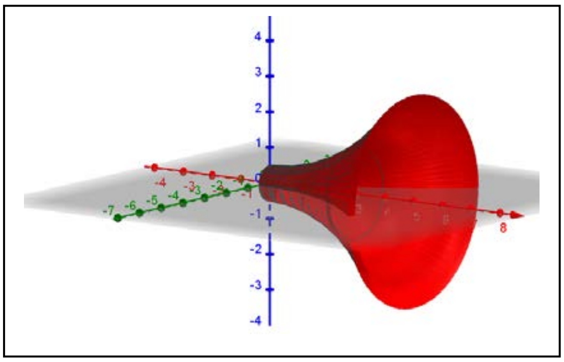


Abb. 18: Rotationskörper (Oberfläche)

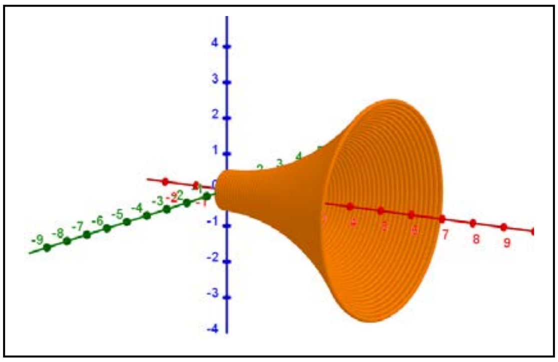


Abb. 19: Rotationskörper parametrisch

8.1. Birnenvolumen

Bei der folgenden Aufgabe soll eine Birne modellhaft als Rotationskörper dargestellt werden: *Gegeben sei die Funktion f mit* $f(x) = 4 \cdot \sqrt{x} \cdot e^{-0,5 \cdot x}$.

In der Abb. rechts wird der oberhalb der x-Achse liegende Teil eines Birnenprofils durch die Graphen der Funktionen f und g beschrieben, die im Punkt P(4/f(4)) glatt ineinander übergehen. Die Funktion g ist von der Bauart $g(x) = \sqrt{a \cdot x + b}$ *. Bestimmen Sie a und b und stellen Sie die Birne als Rotationskörper modellhaft dar!*

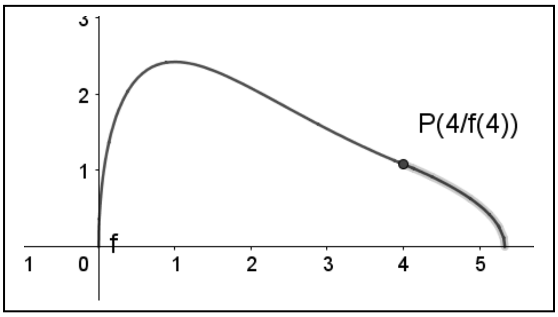


Abb. 20: Birnenprofil

Quelle: Bigalke/Köhler: Mathematik, Berlin, Leistungskurs MA-2, S. 182, Cornelsen-Verlag, Berlin 2011 Die Aufgabe wurde modifiziert.

Die folgende Graphik zeigt die Darstellung des Rotationskörpers im 3 D-Fenster. Die Bearbeitung der Aufgabe mithilfe des Geogebra-CAS wird anschließend angegeben.

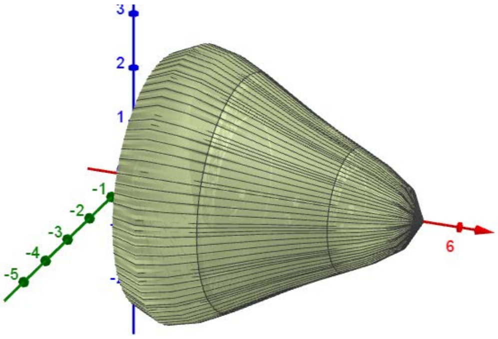


Abb. 21: Birne als Rotationskörper

Zeile	Eingabe in das Geogebra-CAS-Fenster	Rückmeldung
1	f(x):=4*sqrt(x)*e^(-1/2x)	➔ $f(x) := 4\sqrt{x}e^{-\frac{1}{2}x}$
2	g(x):=sqrt(a*x+b)	➔ $g(x) := \sqrt{ax+b}$
3	Ableitung(f(x))	➔ $-2\sqrt{x}e^{-\frac{1}{2}x} + 2\frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{\sqrt{x}}$
4	$f'(x) := -2\sqrt{x}e^{-\frac{1}{2}x} + 2\frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{\sqrt{x}}$	➔ $f'(x) := \sqrt{x}(-2x+2)\frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{x}$
5	Ableitung(g(x),x)	➔ $\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{ax+b}}$
6	$g'(x) := \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{ax+b}}$	➔ $g'(x) := \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{ax+b}}$
7	Löse({f(4)=g(4),f‘(4)=g‘(4),{a,b})	➔ $\left\{\left\{a = -\frac{48}{\left(e^2\right)^2}, b = \frac{256}{\left(e^2\right)^2}\right\}\right\}$
8	Vereinfache($\left\{\left\{a = -\frac{48}{\left(e^2\right)^2}, b = \frac{256}{\left(e^2\right)^2}\right\}\right\}$)	➔ $\left\{\left\{a = -\frac{48}{e^4}, b = \frac{256}{e^4}\right\}\right\}$
9	w(x):=sqrt(-48/e^4*x+256/e^4)	➔ $w(x) := 4\sqrt{-3\frac{x}{e^4} + \frac{16}{e^4}}$
10	Löse(w(x)=0,x)	➔ $\left\{x = \frac{16}{3}\right\}$
11	h(x):=Wenn(0<=x<=4,f(x),Wenn(4< x<=16/3,w(x))	$h(x) := \text{Wenn}\left(0 \le x \le 4, 4\sqrt{x}e^{-\frac{1}{2}x}, \text{Wenn}\left(4 < x \le \frac{16}{3}, 4\sqrt{-3\frac{x}{e^4} + \frac{16}{e^4}}\right)\right)$

Gibt man den Befehl „Oberfläche(h,360)“ in die Eingabezeile ein, so wird der Rotationskörper gezeichnet.

9. Der Freifallturm – eine realitätsnahe Aufgabe

Die Idee zu der folgenden realitätsnahen Aufgabe stammt von Prof. Blum und wurde von ihm anlässlich einer Regionalkonferenz von T^3 2014 vorgestellt. Sie ist vom Verfasser für den Unterrichtseinsatz mit Geogebra modifiziert worden. Die Aufgabe zeigt sehr schön, dass man mithilfe des CAS auch interessante und komplexere Aufgaben behandeln und die Lösungen in graphisch ansprechender Form präsentieren kann. Vor allen Dingen die kombinierte Animation des Fallvorgangs im 2 D- und 3 D-Fenster zeigt auf beeindruckende Weise die Leistungsfähigkeit von Geogebra.

Freifallturm

Freifalltürme sind Attraktionen in einigen Freizeitparks. Der Freifallturm „The High Fall" im Movie Park Germany hat eine Gesamthöhe von 61 m. Die Passagiere erreichen im freien Fall Geschwindigkeiten von 90 km/h. An der Außenseite des Turms wird eine Gondel mit Passagieren durch einen Aufzug hochgezogen. Das dauert 45 Sekunden und die Geschwindigkeit beträgt gemütliche 1,3 m/s. Oben bleibt die Gondel noch 10 Sekunden stehen, damit die Passagiere die Aussicht genießen können. Danach wird die Gondel ausgeklinkt und fällt – von Schienen geführt – 2,5 Sekunden lang frei nach unten, bevor sie wieder durch ein magnetisches Bremssystem gestoppt wird.

Diagramm 1 stellt den Geschwindigkeitsverlauf während einer Fahrt dar. In Diagramm 2 wurde daraus der Abschnitt mit dem freien Fall herausgezoomt.

Diagramm 1: Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm

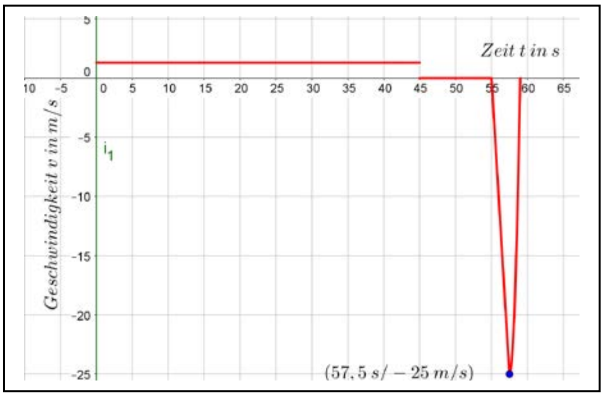
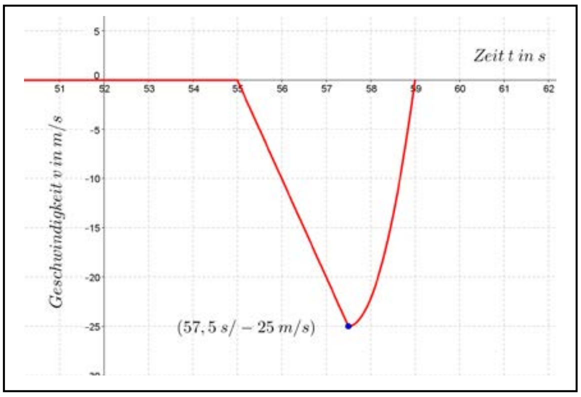


Diagramm 2: Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm (Fallvorgang)



a) Erklären Sie anhand der Diagramme, welcher Teil der Graphen jeweils welchen Teil der Fahrt auf dem Freifallturm beschreibt. Woran erkennen Sie eine Aufwärts- bzw. eine Abwärtsbewegung?

b) Berechnen Sie, auf welche Höhe die Gondel durch den Aufzug gezogen wird. Erläutern Sie, wie Sie Ihre Rechnung und das Ergebnis in Diagramm 1 auch geometrisch veranschaulichen können.

c) Nutzen Sie jetzt das Diagramm 2, um zu bestimmen, wie lang die Strecke ist, welche die Passagiere frei fallen. Während des Fallens ist der Geschwindigkeitsverlauf linear.

Schätzen Sie anschließend den Bremsweg bis zum Stillstand der Gondel ab. Erklären Sie Ihr Vorgehen. Finden Sie unterschiedliche Lösungswege?

d) Die Geschwindigkeit in der Bremsphase B kann für Diagramm 2 durch eine quadratische Funktion v_B modelliert werden. Der Graph von v_B hat an der Stelle t = 57,5 s den Scheitelpunkt. Nach 59 s kommt die Gondel zum Stehen. Sie befindet sich dann noch 2,25 m über dem Startplateau.

1. Ermitteln Sie aus diesen Angaben mithilfe des GeogebraCAS die Funktionsgleichung von v_B! Zur Kontrolle: $v_B(t)=\frac{100}{9}\cdot(t-57{,}5)^2-25$. Nutzen Sie dies, um den gesamten Bewegungsvorgang darzustellen und die Höhe der Gondel h zu beliebigen Zeitpunkten angeben zu können.
2. Stellen Sie die Geschwindigkeits-Zeit Funktion mithilfe von Geogebra zeichnerisch dar!
3. Stellen Sie den Graphen von h mithilfe von Geogebra dar!
4. Animieren Sie den Fallvorgang mithilfe von Geogebra im 2 D- und im 3 D-Graphikfenster (Schieberegler einführen! Eine mögliche Lösung zeigt die Abb. 2)!

Lösungshinweise:

Abschnittweise definierte Funktionen stellt man in Geogebra mithilfe der Befehle Wenn[<Bedingung>, <Dann Objekt>] bzw. Wenn[<Bedingung>, <Dann Objekt>, <Sonst Objekt>] dar. Beispiel: Die Funktion $f(x)=\begin{cases} x+1 \text{ für } 0\le x<2 \\ 3 \text{ für } 2\le x\le 4\end{cases}$ würde man im CAS-Fenster von Geogebra folgendermaßen darstellen: f(x):=Wenn[0<=x<2, x+1, Wenn[2<=x<=4,3]. Natürlich kann man den Befehl weiter verschachteln. Es empfiehlt sich aber z. B. bei der Definition für die Höhenfunktion h eine Unterscheidung in den Aufwärts- und Verweilvorgang h_1 und den Abwärts- und Bremsvorgang h_2 und h_3 vorzunehmen und h als Summe von h_1, h_2 und h_3 darzustellen, weil sonst die Handhabung zu „sperrig“ wird.

Abb. 1: Höhen/Zeit-Diagramm

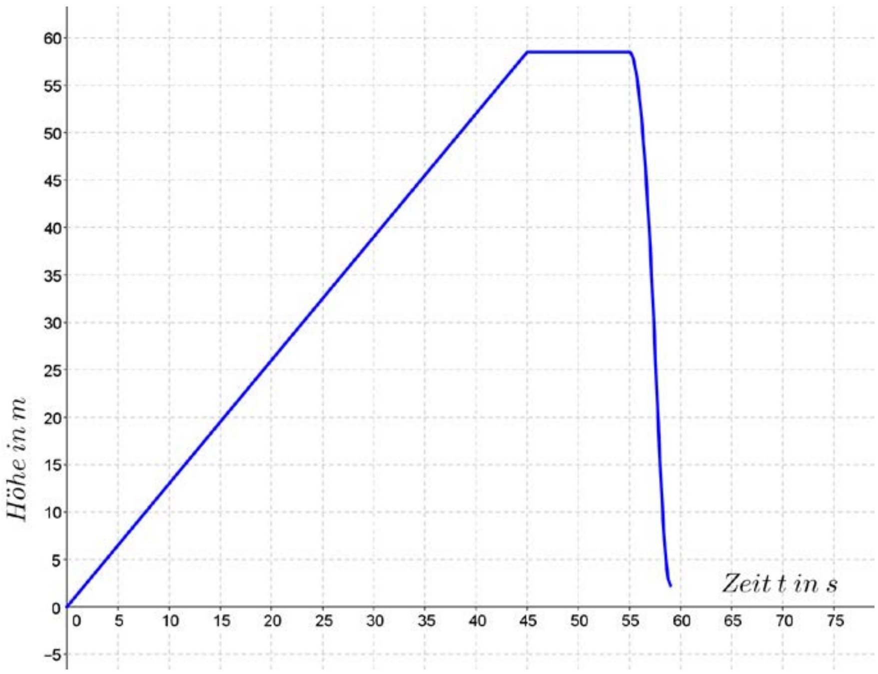
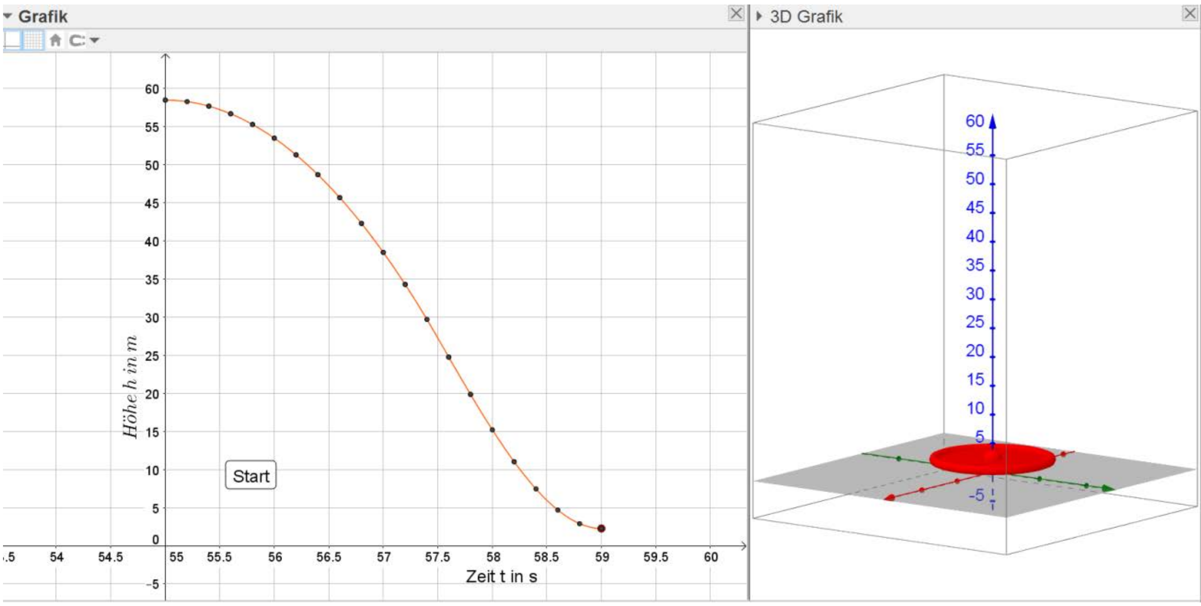


Abb. 2: Animation des Fallvorgangs



Zur Animation des Fallvorgangs wird übrigens ein Geogebraskript eingesetzt. Beim Klicken auf die Schaltfläche „Start“ startet die Animation die Darstellung des Fallvorgangs.

10. Die wichtigsten CAS-Befehle für die Analysis

Wenn Ihr Hauptinteresse zunächst auf der Erstellung von Arbeitsblättern zur Visualisierung und Animation liegt, können Sie dieses und das nächste Kapitel überspringen. Alle Befehle werden übrigens im Geogebra-Handbuch vorzüglich erklärt. Sie müssen nur „Hilfe“ und danach „Handbuch“ anklicken und können dann mit einem Stichwort die Beschreibung des gewünschten Befehls aufrufen.

a) Folge-Befehl:

Einer der wichtigsten Befehle, um Mehrfachanwendungen zu initiieren. Der Folgebefehl kann sowohl im CAS- als auch im Algebrafenster angewandt werden.

Folge(<Ausdruck>, <Variable>, <Startwert a>, <Endwert b>, <Schrittweite>)

Erzeugt eine Folge von Objekten basierend auf dem gegebenen Ausdruck, wobei die Variable von Startwert a bis Endwert b mit gegebener Schrittweite läuft. Wenn man keine Schrittweite angibt, wird automatisch Schrittweite = 1 gesetzt.

Beispiele: Folge(n^2, n, 1, 5) erzeugt eine Liste von Quadratzahlen: $\{1,4,9,16,25\}$.

Folge(x+n, n, -3, 3, 0.5) erzeugt eine Liste von Funktionstermen $\{x-3, x-2.5, ..., x+3\}$. Die Geradenschar wird gleichzeitig im 2 D-Fenster graphisch dargestellt.

b) Löse-Befehl:

Einer der wichtigsten CAS-Befehle, den es in verschiedenen Varianten gibt:

1. Löse(<Gleichung in x>)

Löst die angegebene Gleichung für die Variable *x* und erzeugt eine Liste mit allen Lösungen.

Beispiel: Löse[x^2-5x+4=0] berechnet {x = 1, x = 4}.

2. Löse(<Gleichung>, <Variable>)

Löst die angegebene Gleichung für die angegebene, unbekannte Variable und erzeugt eine Liste mit allen Lösungen.

Beispiel: Löse(x^2+p*x+4=0, x) berechnet $\{ x = \frac{-p+\sqrt{p^2-16}}{2}, x = \frac{-p-\sqrt{p^2-16}}{2} \}$;

Wichtig: Es muss ein *-Zeichen zwischen p und x gesetzt werden, sonst interpretiert Geogebra dies als eine Variable mit der Bezeichnung „px“!

3. Löse(<Liste von Gleichungen>, <Liste von Variablen>)

Löst das gegebene Gleichungssystem für die angegebenen Variablen und erzeugt eine Liste mit allen Lösungen.

Beispiel:

Löse({2a^2 + 5a + 3 = b, a + b = 3}, {a, b}) liefert {{a = 0, b = 3}, {a = -3, b = 6}}.

4. NLöse(<Gleichung in x>)

Löst die angegebene Gleichung numerisch (!) für die Variable *x* und erzeugt eine Liste mit allen Lösungen.

Beispiel: NLöse(e^x+x-4=0) berechnet {x =1.07}.

c) Befehle für Termumformungen

1. Faktorisiere (<Funktion>)

Faktorisiert den Funktionsterm.

Beispiel: Faktorisiere[x^2 + x - 6] liefert (x + 3) (x - 2).

2. Vereinfache(<Funktion>)

Vereinfacht Funktionsterme.

Beispiel: Vereinfache(3 · x + 4 · x + a · x) liefert x · a + 7x.

3. Multipliziere(<Ausdruck>) Multipliziert den Ausdruck.

Beispiel: Multipliziere[(2x - 1)² + 2x + 3] erzeugt den Ausdruck 4x² - 2x + 4

d) Befehle zur Differentialrechnung

1. Ableitung(<Funktion>) Liefert die Ableitung der Funktion.

Beispiel: Ableitung(x^3 + x^2 + x) liefert 3x² + 2x + 1.

2. Ableitung(<Funktion>, <Variable>)

Liefert die partielle Ableitung der Funktion nach der gegebenen Variablen.

Beispiel: Ableitung(x^3 y^2 + y^2 + x y, y) liefert 2x³y + x + 2y.

3. Integral(<Funktion>, <Variable>)

Berechnet die partielle Integration der Funktion nach der angegebenen Variable.

Beispiel: Integral(x³+3x y, x) berechnet $\left\{\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 y + c_1\right\}$

4. Integral(<Funktion>, <Startwert>, <Endwert>)

Berechnet das bestimmte Integral der Funktion nach der Hauptvariable im Intervall [Startwert , Endwert].

Beispiel: Integral(-1/2x^2+2,-2,2) berechnet $\frac{16}{3}$.

Anmerkung: Dieser Befehl schattiert auch die Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der *x*-Achse, wenn man ihn in die Eingabezeile eingibt (und nicht im CAS-Fenster!). Der Zahlenwert wird dann als Dezimalzahl im Algebrafenster angegeben (im Beispiel 5,33).

5. IntegralZwischen(<Funktion>, <Funktion>, <Startwert>, <Endwert>)

Gibt das bestimmte Integral der Differenz f (x) - g (x) zweier Funktionen *f* und *g* im Intervall [*a, b*] an, wobei *a* der Startwert und *b* der Endwert ist.

Beispiel: Integral(-1/2x^2+2,x^2,-$2/\mathrm{sqrt}(3)$, $2/\mathrm{sqrt}(3)$) berechnet $16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{9}$.

Anmerkung: Dieser Befehl schattiert auch den Bereich zwischen dem Funktionsgraphen von *f* und *g*, wenn man ihn in die Eingabezeile eingibt (und nicht im CAS-Fenster!).

6. Grenzwert(<Funktion>, <Zahl>)

Berechnet den Grenzwert der Funktion beim gegebenen Wert. (Dieser kann auch unendlich sein.)

Beispiel: Grenzwert((x^2 + x) / x^2, +∞) berechnet 1.

Anmerkung: Nicht alle Grenzwerte können von GeoGebra berechnet werden. In diesen Fällen wird "undefiniert" zurückgegeben (auch falls das korrekte Resultat "undefiniert" lautet).

7. LinksseitigerGrenzwert(<Ausdruck>, <Wert>)

Berechnet den linksseitigen Grenzwert der Funktion beim gegebenen Wert.

Beispiel: LinksseitigerGrenzwert(1 / x, 0) berechnet -∞.

8. RechtsseitigerGrenzwert(<Ausdruck>, <Wert>)

Berechnet den rechtsseitigen Grenzwert der Funktion beim gegebenen Wert.

Beispiel: RechtsseitigerGrenzwert(1 / x, 0) berechnet ∞.

9. Partialbruch(<Funktion>)

Führt, wenn möglich, eine Polynomdivision bei der angegebenen Funktion durch.

Beispiel: Partialbruch((x^2-x+1)/(x-1)) liefert den Ausdruck x+1/(x-1)

10. Oberfläche(<Funktion>, <Winkel>)

Stellt den Rotationskörper des Graphen von f um die x-Achse im 3 D-Fenster dar.

Beispiel: Geg.: Die auf [0; 5] abschnittsweise definierte Funktion f(x) = $\frac{1}{10}x^2+\frac{1}{2}$ (Befehl: Funktion(1/10x^2+1/2,0,5)). Der Befehl Oberfläche (f, 360) erzeugt den dazugehörigen Rotationskörper einer „Flüstertüte“.

11. Kurve(<Ausdruck>, <Ausdruck>, <Parameter>, <Startwert>, <Endwert>)

Erzeugt die kartesische Parameterkurve für den gegebenen *x*-Ausdruck (erster <Ausdruck>) und den *y*-Ausdruck (zweiter <Ausdruck>) mit dem gegebenen Parameter im Intervall [*Startwert*, *Endwert*].
Beispiel: Kurve(2*cos(t),2*sin(t),t,0,2π) erzeugt einen Kreis mit Radius *2* um den Koordinatenursprung.

12. Kurve(<Ausdruck>, <Ausdruck>, <Ausdruck>, <Parameter>, <Startwert>, <Endwert>)

Erzeugt die dreidimensionale kartesische Parameterkurve für den gegebenen *x*-Ausdruck (erster <Ausdruck>), *y*-Ausdruck (zweiter <Ausdruck>) und *z*-Ausdruck (dritter <Ausdruck>) mit dem gegebenen Parameter im Intervall [*Startwert*, *Endwert*].
Beispiel: $\mathrm{Kurve}(\cos(t),\sin(t),t,t,0,10\pi)$ erzeugt eine 3D-Spirale.

11. Lösen der Zabiaufgabe 1.1. 2010 mit dem Geogebra-CAS

Die folgende Aufgabe aus dem Berlin/Brandenburger CAS-Zentralabitur 2010 eignet sich gut, um zu zeigen, wie man mit dem Geogebra-CAS arbeiten kann. Auf die Darstellung der Lösung der Teilaufgabe e) wird hier verzichtet, weil es sich um eine reine Anwendungsaufgabe handelt.

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x)=(x+a)\cdot e^{a-x}$, $x\in IR; a\in IR, a>0$.
Der Graph der Funktion f_a sei G_a.
In der Anlage sind einige Graphen G_a dargestellt.

a) Ermitteln Sie die Nullstelle von f_a, die Koordinaten und Art des Extrempunktes sowie die Koordinaten des Wendepunktes von G_a in Abhängigkeit vom Parameter *a*.
Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente.
[Kontrollergebnis: $t_a(x)=(-x-a+4)\cdot e^{2a-2}$]

b) Alle Extrempunkte der Graphen G_a liegen auf dem Graphen einer Funktion h.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung für h und zeichnen Sie den Graphen von h in das vorhandene Koordinatensystem.

c) Weisen Sie nach, dass für alle Funktionen f_a die Gleichung $f_a(x)+f_a'(x)=e^{a-x}$ gilt.
Bestimmen Sie allgemein eine Summenformel für $f_a(x)+f_a^{(n)}(x)$ für ungerade *n*.
Hinweis: $f_a^{(n)}$ ist die n-te Ableitung von f_a.

d) Berechnen Sie den Inhalt der zwischen G_a und der *x*-Achse liegenden Fläche über dem Intervall $[-a;2-a]$ sowie den Inhalt der Fläche, die vollständig eingeschlossen wird durch die Wendetangente, die *x*-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x=2-a$.
Weisen Sie nach, dass für alle Funktionen der Schar das Verhältnis der beiden berechneten Flächeninhalte konstant ist.

Lösung mit der CAS-Applikation

Zeile	Eingabe in das Geogebra-CAS-Fenster	Rückmeldung
1	Teilaufgabe a)	
2	f(x,a):=(x+a)*e^(a-x)	$\rightarrow$ $f(x,a):=(a+x)e^{a-x}$
3	Löse(f(x,a)=0,x)	$\rightarrow$ {x=-a}
4	Nullstelle: N(-a/0)	
5	Ableitung(f(x,a),x)	$\rightarrow$ $-(a+x)e^{a-x}+e^{a-x}$
6	f'(x,a):=-(a+x)e^(a-x)+e^(a-x)	$\rightarrow$ $f'(x,a):=(-a-x)e^{a-x}+e^{a-x}$
7	Ableitung(f‘(x,a),x)	$\rightarrow$ $-(-a-x)e^{a-x}-2e^{a-x}$
8	f''(x,a):=-(-a-x)e^(a-x)-2e^(a-x)	$\rightarrow$ $f''(x,a):=-(-a-x)e^{a-x}-2e^{a-x}$
9	Ableitung(f‘‘(x,a),x)	$\rightarrow$ $-(a+x)e^{a-x}+3e^{a-x}$
10	f'''(x,a):=-(a+x)e^(a-x)+3e^(a-x)	$\rightarrow$ $f'''(x,a):=-(a+x)e^{a-x}+3e^{a-x}$
11	Löse(f'(x,a)=0,x)	$\rightarrow$ {x=-a+1}
12	f''(-a+1,a)	$\rightarrow$ $-e^{2a-1}$
13	f(-a+1,a)	$\rightarrow$ e^{2a-1}
14	Hochpunkt H(-a+1;e^(2a-1))	
15	Löse(f''(x,a)=0,x)	$\rightarrow$ {x=-a+2}
16	f'''(-a+2,a)	$\rightarrow$ e^{2a-2}
17	f(-a+2,a)	$\rightarrow$ $2e^{2a-2}$
18	Wendepunkt W(-a+2;2e^(2a-2))	
19	t(x):=f‘(-a+2,a)*(x-(-a+2))+f(-a+2,a)	$\rightarrow$ $t(x):=-(a+x-2)e^{2a-2}+2e^{2a-2}$
20	Teilaufgabe b)	
21	h(x):=e^(2(1-x)-1)	$\rightarrow$ $h(x):=e^{-2x+1}$
22	Teilaufgabe c)	
23	f(x,a)+f‘(x,a)	$\rightarrow$ e^{a-x}
24	f(x,a)+f‘‘‘(x,a)	$\rightarrow$ $3e^{a-x}$
25	Ableitung(f‘‘‘(x,a),x,2)	$\rightarrow$ $-ae^{a-x}-xe^{a-x}+5e^{a-x}$
26	f'''''(x,a):=-a*e^(a-x)-x*e^(a-x)+5e^(a-x)	$\rightarrow$ $f'''''(x):=-ae^{a-x}-xe^{a-x}+5e^{a-x}$
27	f(x,a)+f‘‘‘‘‘(x,a)	$\rightarrow$ $5e^{a-x}$
28	f(x,a)+f^(n)(x,a)=n*e^(a-x)	
29	Teilaufgabe d)	
30	Integral(f(x,a),-a,2-a)	$\rightarrow$ $e^{2a}-3e^{2a-2}$
31	Löse(t(x)=0,x)	$\rightarrow$ {x=-a+4}
32	Integral(t(x),2-a,4-a)	$\rightarrow$ $2e^{2a-2}$
33	(e^(2a)-3e^(2a-2))/(2e^(2a-2))	$\rightarrow$ $\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2a}-3e^{2a-2}}{e^{2a-2}}$
34	Vereinfache($\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2a}-3e^{2a-2}}{e^{2a-2}}$)	$\rightarrow$ $\frac{1}{2}e^{2}-\frac{3}{2}$
35	Ergebnis ist unabhängig von a	

Im CAS-Fenster können einzelne Zeilen als Textzeilen deklariert werden. Dies sollte man nutzen, um die Aufgabe zu strukturieren (Teilaufgabe a), ...) und Ergebnisse stichwortartig zu kommentieren. Zunächst wird in Zeile 2 die Funktionenschar definiert. Mithilfe des Befehls „Ableitung(<Ausdruck>, <Variable>)“ werden die 3 Ableitungen gebildet und jeweils definiert. Einen Term überträgt man übrigens ganz einfach in ein tieferes CAS-Fenster, indem man den Term mit der linken Maustaste anklickt. Mit dem Befehl „Löse(<Gleichung>, <Variable>)“ können dann Nullstelle, Hoch- und Wendepunkt ermittelt werden. Dazu erstellt man sinnvollerweise im Graphikfenster eine Abbildung der Graphen zu den Parameterwerten 0, 0,5, 1 und 1,5 (Abb. 22). In Zeile 19 wird dann die Wendetangente definiert.

Zur Ermittlung der Ortskurve muss lediglich der Ausdruck für die x-Koordinate der Hochpunkte nach a umgestellt und in den Ausdruck für die y-Koordinate eingesetzt werden.

Zur Lösung von Teilaufgabe c) werden die Summen des Funktionsterms mit dem jeweiligen Term der 1., 3. bzw. 5. Ableitung gebildet. Induktiv kann dann der Zusammenhang

$f_a(x) + f_a^{(n)}(x) = n \cdot e^{a-x}$ erschlossen werden.

Zur Bearbeitung von Teilaufgabe d) ist es sinnvoll, sich die Aufgabenstellung anschaulich klar zu machen (z. B. für den Parameterwert a = 1). Dazu kann man die Möglichkeit nutzen, ein zweites 2 D-Graphikfenster zu öffnen (Abb. 23). Die Integrale werden dann mithilfe des Befehls „Integral(<Funktion>, <Startwert>, <Endwert>)“ berechnet und es wird der Quotient der beiden Flächenterme gebildet. Hier zeigt sich eine Eigenart des Geogebra-CAS. Bei Exponentialtermen werden die Ausdrücke oftmals nicht automatisch soweit wie möglich vereinfacht. Erst durch Verwendung des Befehls „Vereinfache(<Funktion>)“ resultiert das gewünschte Ergebnis, das zeigt, dass das Flächenverhältnis nicht vom Parameterwert a abhängt.

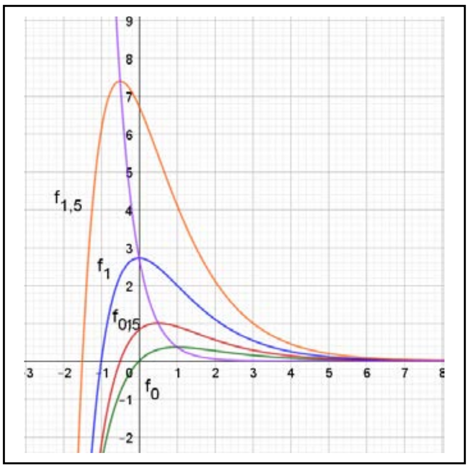


Abb. 22: Graphen $f_a(x)$ (a = 0, 0,5, 1, 1,5)

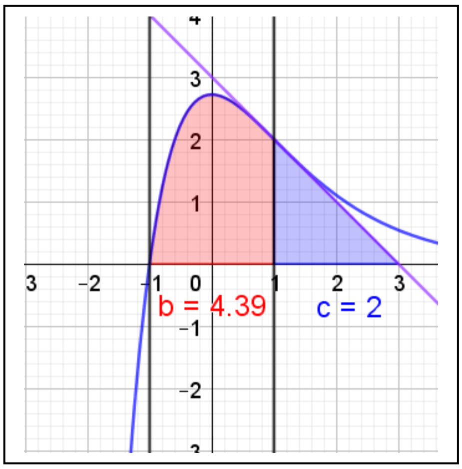


Abb. 23: Flächen für a = 1

III. Stochastik

12. Simulation zum empirischen Gesetz der großen Zahlen (doppelter Würfelwurf)

Im Folgenden wird das Würfeln einer zweistelligen Augensumme mit 2 Würfeln simuliert und die relative Häufigkeit in Abhängigkeit von der Versuchszahl n graphisch dargestellt. Von zentraler Bedeutung ist dazu der Befehl Zufallszahl(<Minimalwert> , <Maximalwert>). Er erzeugt eine Zufallszahl aus dem Intervall [Minimalwert; Maximalwert].

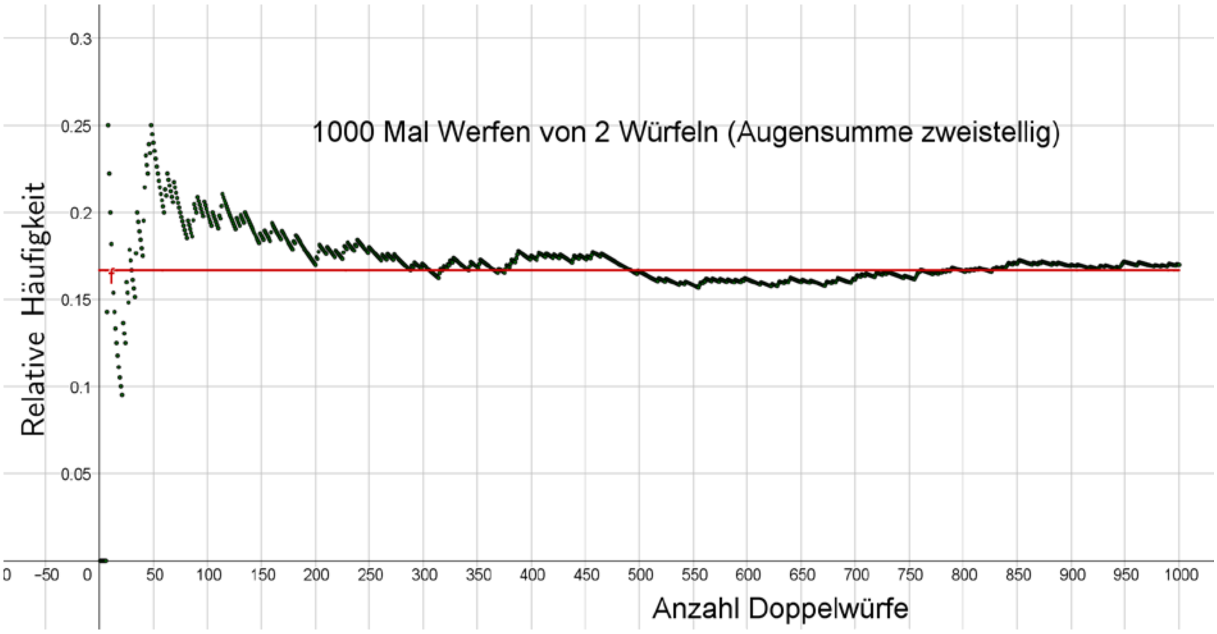


Abb. 24: Simulation zum empirischen Gesetz der großen Zahlen (doppelter Würfelwurf)

Durch Betätigung der Tastenkombination „Str“ „R“ kann man eine neue Simulation durchführen. Man erkennt dabei sehr schön, dass die relative Häufigkeit am Anfang der Versuchsreihe stark schwankt und sich dann mit zunehmender Versuchszahl um den theoretischen Wert $\frac{1}{6}$ (rote Linie) stabilisiert.

Weitere interessante Aufgabenstellungen für Simulationen sind das berühmte „Ziegenproblem“ sowie das „Problem der gerechten Teilung“. Das Ziegenproblem gilt als „Königin der Denk-Illusionen“. Sogar Mathematikprofessoren lagen hier falsch. Das „Problem der gerechten Teilung“ ist auch aus historischer Sicht interessant. Die Lösung des Problems – dokumentiert durch einen Briefwechsel zwischen Pierre de Fermat und Blaise Pascal - gilt als „Geburtsstunde“ der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Beide Simulationen incl. Anleitung sind auf dem Bildungsserver zugänglich.

13. Anwendung der Formel von Bernoulli am Beispiel einer Zabiteilaufgabe

Die folgende Teilaufgabe stammt aus dem Berlin/Brandenburger Zentralabitur 2013 (Aufgabe 3.1).

Beim Open-Air-Musikfest im „Waldstadion“ kauften 60 % der Besucher ihre Eintrittskarten online, 25 % bezogen ihre Karten im Vorverkauf, der Rest der Karten wurde an der Abendkasse verkauft.
Ein Reporter interviewt im Stadion zufällig ausgewählte Besucher und stellt dabei auch Fragen nach der Herkunft der gekauften Karten.

a) Bestimmen Sie die jeweilige Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

B: Die Hälfte von 10 Interviewten haben ihre Karten online gekauft.

C: Mindestens sieben von 10 Interviewten haben ihre Karte online gekauft.

b) Der Reporter möchte nun mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % wenigstens zwei Besucher finden, die ihre Karte an der Abendkasse gekauft haben.
Ermitteln Sie, wie viele Besucher er dazu mindestens interviewen muss.

Dass man im 21. Jahrhundert noch Werte für Wahrscheinlichkeiten zur Binomialverteilung anhand von Tabellen ermittelt, kann man nur als anachronistisch bezeichnen. Die Formel von Bernoulli $P(X=k)=B(n;p;k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ ist in Geogebra implementiert. Der Befehl lautet: Binomial(<Anzahl der Versuche>, <Erfolgswahrscheinlichkeit>, <Anzahl der Erfolge>, <Wahrheitswert Verteilungsfunktion>). Dabei berechnet man mit der Einsetzung „false“ Punktwahrscheinlichkeiten P(X=k) und mit der Einsetzung „true“ kumulierte Wahrscheinlichkeiten P(X≤k).

Die Unteraufgaben der Teilaufgabe a) würde man also folgendermaßen lösen:

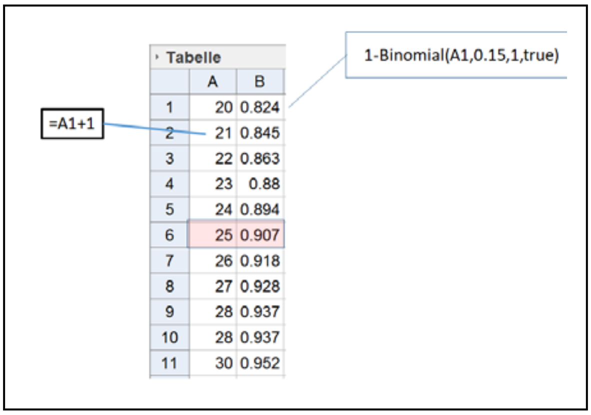
P(B) = Binomial(10,0.6,5, false) $\approx$ 0,2007

B(C) = 1-Binomial(10,0.6,6,true) $\approx$ 0,3823

Die Teilaufgabe b) wird sinnvollerweise mithilfe des Gegenereignisses und durch experimentelles Arbeiten gelöst. Es werden 3 unterschiedliche Darstellungen zur Lösung vorgestellt.

1. Man schätzt zunächst mithilfe der Formel für den Erwartungswert ab, wo man größenordnungsmäßig suchen muss. Dann berechnet man mithilfe des Folgebefehls die Wahrscheinlichkeiten für n von 20 bis 30: Folge(1-Binomial(n,0.15,1,true),n,20,30). Geogebra liefert eine Liste {0,8244, 0,845, 0,8633, 0,8796, 0,8941, 0,9069, 0,9183, …}. Durch Abzählen erkennt man, dass ab n = 25 die Wahrscheinlichkeit größer als 90 % ist.

2. Übersichtlicher gestaltet sich die Lösung der Aufgabe, wenn man die Werte für n und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten in einer Tabelle darstellt. Die Berechnungsvorschrift braucht nur einmal eingegeben werden. Danach kann man die markierte Zelle an dem kleinen Quadrat „herunterziehen“ und der Wert für n wird automatisch eingelesen.



	A	B
1	20	0.824
2	21	0.845
3	22	0.863
4	23	0.88
5	24	0.894
6	25	0.907
7	26	0.918
8	27	0.928
9	28	0.937
10	28	0.937
11	30	0.952

Abb. 25: Tabellarische Darstellung

3. Die Aufgabe lässt sich aber auch mithilfe einer graphischen Darstellung lösen. Man führt einen Schieberegler für n ein und zeichnet die zugehörige Binomialverteilung mit dem Befehl Binomial(n,0.15). Dann berechnet man die Punktwahrscheinlichkeiten für k = 0 und 1 und zeichnet diesen Teil der Binomialverteilung mit dem Befehl Balkendiagramm in einer anderen Farbe. Im Algebrafenster wird dazu der dazugehörige Wert F(n;0.15,1) angezeigt. Man berechnet 1 - F(n;0.15,1) und verschiebt den Schieberegler solange, bis P(X ≥ 2) > 90 % ist (vgl. Abb. 25).

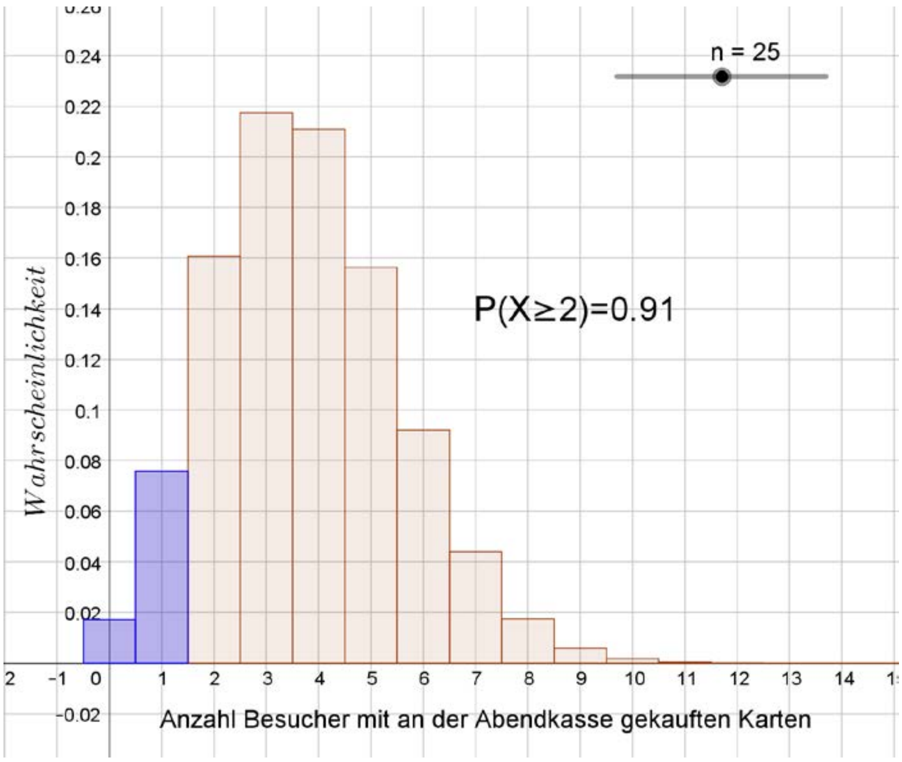


Abb. 26: Histogramm zur Zabiaufgabe 3.1. b) von 2013

14. Alternative Lösungsstrategien am Beispiel einer Zabiteilaufgabe

Die Bearbeitung des folgenden Aufgabenteils aus dem Zentralabitur zeigt, dass man beim Einsatz von Geogebra alternative und anschaulichere Lösungsstrategien einsetzen kann.

Aus dem Berlin/Brandenburger Zentralabitur 2016, Aufgabe 3.2

e) Eine Gruppe umfasst *n* zufällig ausgewählte Bundesbürger. Untersuchen Sie, für welche Gruppengröße *n* die Wahrscheinlichkeit, genau einen Sportfan in der Gruppe zu haben, am größten ist.

Im Text davor wurde die Information gegeben, dass der Anteil der Sportfans 1 Viertel beträgt.

Im Erwartungshorizont der Aufgabenersteller finden sich folgende Lösungsvorschläge:

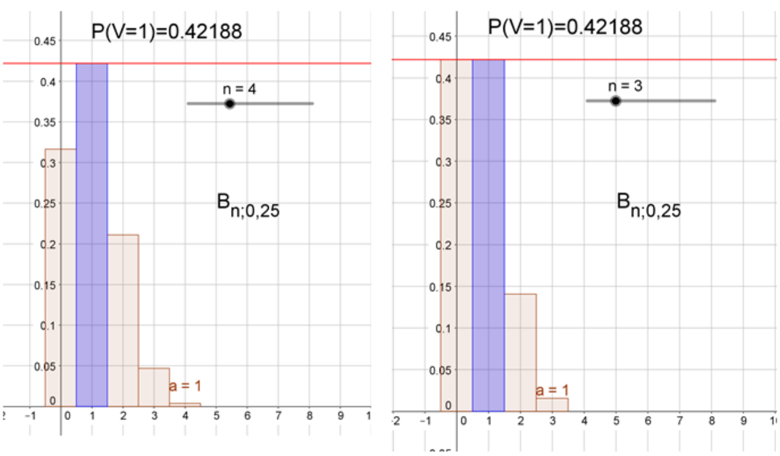
a. Ausgehend von der Formel von Bernoulli für $P(X = 1) = n \cdot 0{,}25^{n} \cdot 0{,}75^{n-1}$ (X: Anzahl der Sportfans) wird eine auf R definierte Funktion f(n) betrachtet und deren Maximum bei n ≈ 3,48 ermittelt. Dann wird argumentiert, dass man in der Umgebung von 3,48 auf ganzzahlige Werte von n hin überprüfen müsse und gelangt zu der Lösung: Für n = 3 oder n = 4 gilt P(X = 1) ≈ 0,4219.

b. Als Alternative wird eine Monotonieuntersuchung von f(n+1)/f(n) durchgeführt, die noch exotischer ist.

Die Aufgabe ist doch eigentlich recht einfach. Über die Formel vom Erwartungswert gelangt man sofort zu n = 4. Jetzt braucht man sich nur noch abzusichern, ob auch benachbarte Werte zu einem Maximalwert für P(X = 1) führen:

Folge(Binomial(n,0.25,1,false),n,1,10) liefert {0,25, 0,375, 0,4219, 0,4219, 0,3956, ...}. Man erkennt, dass der Maximalwert für n = 3 oder n = 4 vorliegt. Für n > 4 muss P(X=1) immer kleiner werden, weil das Maximum der Verteilung mit zunehmendem n immer weiter rechts liegt und die Balkenhöhe zudem wegen der größer werdenden Anzahl von Werten für $P(X=x_i)$ abnimmt. Noch deutlicher wird dies anhand einer graphischen Darstellung des Histogramms, die man mit 3 Befehlen erzeugen kann.

- Vorüberlegung: Für n = 4 ist der Erwartungswert μ = 1.
- *Binomial[A1, 1/4, 1, false]*



A	B
1	0.25
2	0.375
3	0.42188
4	0.42188
5	0.39551
6	0.35596
7	0.31146
8	0.26697
9	0.22525
10	0.18771

Abb. 27: Graphische Lösung zur Zabiaufgabe 3.2. e) von 2016

15. Visualisierung zu den kσ-Umgebungen

Vor der Formulierung der sog. kσ-Regeln wird man mit den Schülern beispielsweise die folgenden Wahrscheinlichkeiten ermitteln und zwar sowohl für den Münzwurf (p = 0,5) als auch für den Würfelwurf (p = 1/6).

n	$P(\lvert X-\mu\rvert \le \sigma)$	$P(\lvert X-\mu\rvert \le 2\sigma)$	$P(\lvert X-\mu\rvert \le 3\sigma)$
50			
100			

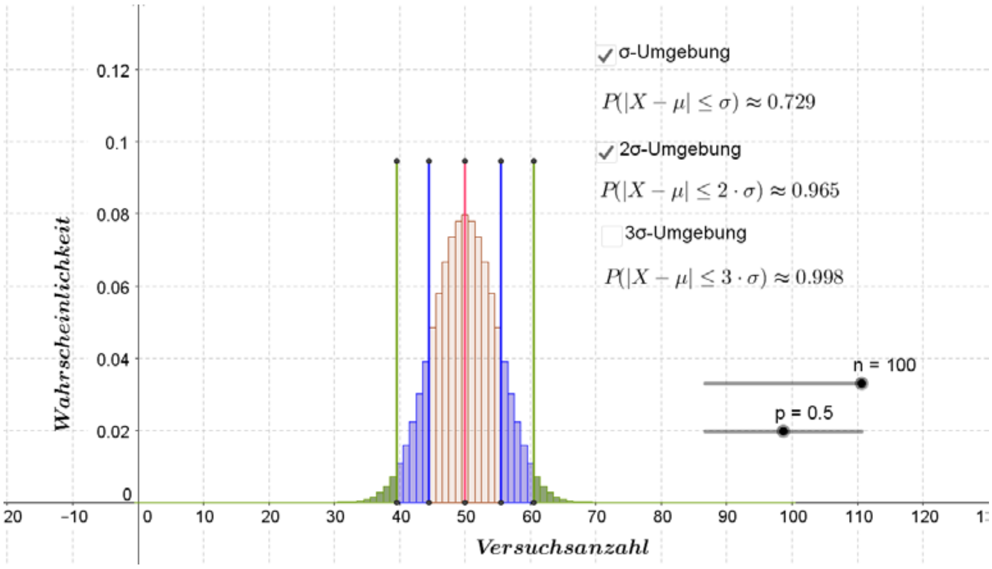


Abb. 28: Visualisierung zu den kσ-Umgebungen

Es dürfte dazu ausreichend sein, dass die Schüler 3 – 4 Wahrscheinlichkeitswerte selbst ermitteln. Die restlichen Ergebnisse kann man der im Folgenden angegebenen Geogebra-Visualisierung entnehmen.

15.1. Geogebra-Tipp: Dynamische Anpassung des Graphikfensters

Wie erreicht man es bei einem Geogebraarbeitsblatt wie bei dem oben abgebildeten zu den kσ-Umgebungen, dass das Histogramm beim Betätigen der Schieberegler für n und p immer zentriert in der Mitte mit vernünftiger Höhe (ca. 2/3 der y-Achse) erscheint und nicht rechts oder links am Rand und/oder teilweise oberhalb des Bildschirms? Dazu muss die Einstellung der x- bzw. y-Achse dynamisch an die Schiebereglerwerte angepasst werden (s. Abb. 29).

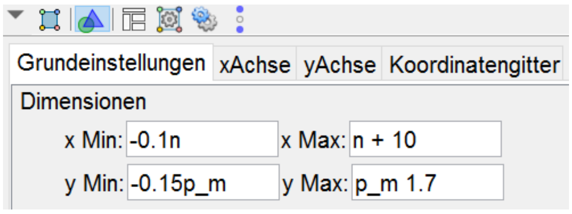


Abb. 29. Anpassung der x- bzw. y-Achse an die Schiebereglerwerte

Zunächst berechnet man im Algebrafenster den maximal zu erwartenden Wert für die Wahrscheinlichkeiten (dies ist in der Regel die Wahrscheinlichkeit am Erwartungswert) mit p_m=Binomial(n,p,n*p,false). Dann kann man die Randwerte der Achseneinstellungen wie in Abb. 29 gezeigt an die Schiebereglerwerte anpassen.

16. Simulation mit binomialverteilten Zufallszahlen (Samenaufgabe)

Der Befehl ZufallszahlBinomialverteilt[(<Anzahl der Versuche>, <Wahrscheinlichkeit>) erzeugt eine Zufallszahl von einer Binomialverteilung mit *n* Versuchen und der Wahrscheinlichkeit *p*. Beispiel: Der Befehl Folge(ZufallszahlBinomialverteilt(100, 0.5),n,1,10) erzeugt eine Liste von 10 Zufallszahlen {53, 53, 57, 53, 54, 45, 49, 55, 43, 49} zu 100 Versuchen mit der Wahrscheinlichkeit 0,5 (entspricht z. B. 100 Münzwürfen). Es soll jetzt eine Simulation zu folgender Aufgabe dargestellt werden:

Eine Großgärtnerei bestellt 800 Samen einer wertvollen Pflanze mit einer Keimfähigkeit von 15 %. Um genauer kalkulieren zu können, möchte der Gärtner von seinem Samenlieferanten eine Prognose darüber, wie viele Samen angehen werden. Außerdem verlangt er, dass diese Prognose mit einer Sicherheit von 95,4 % eintritt.

Quelle: Bigalke/Köhler: Mathematik, Berlin, Leistungskurs MA-2, S. 276, Cornelsen-Verlag, Berlin 2011
Der Wahrscheinlichkeitswert wurde von 95 % auf 95,4 % (d. h. k = 2) verändert.

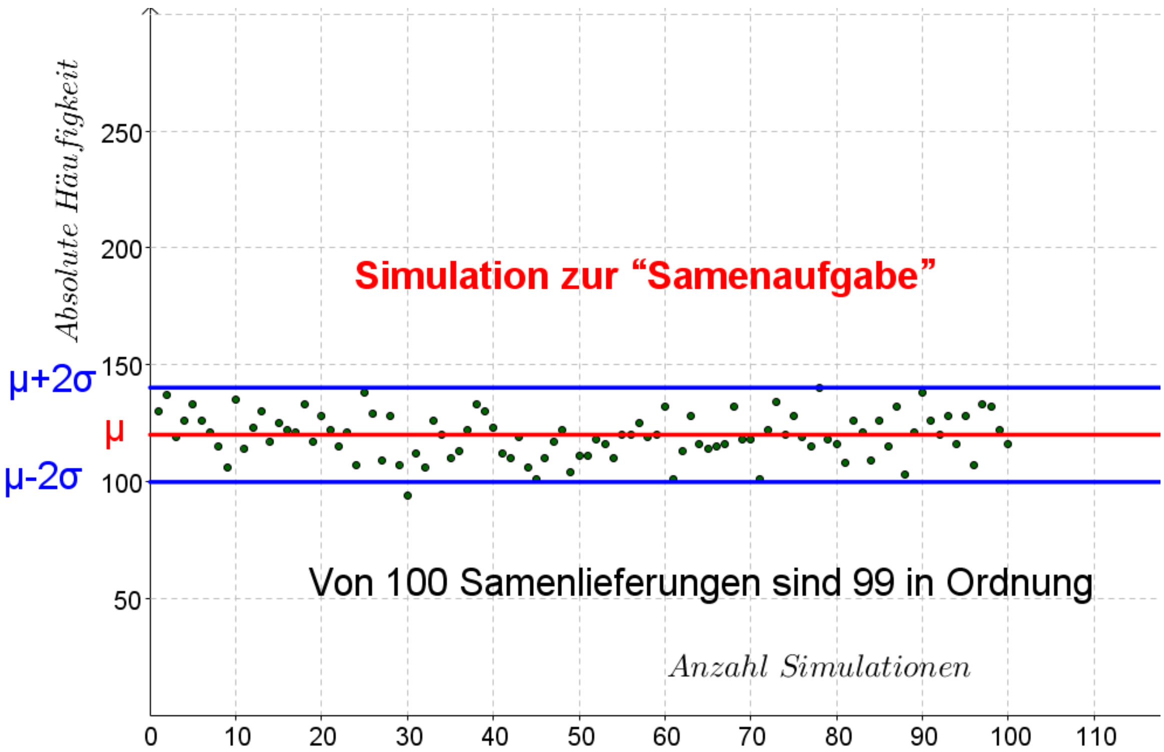


Abb. 30: Simulation zur Samenaufgabe

In der abgebildeten Simulation von 100 Samenlieferungen ist nur 1 Punkt außerhalb der 2σ-Umgebung; d. h. 99 Lieferungen waren bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95,4 % in Ordnung. Durch Betätigung der Tastenkombination „Str“ „R“ kann man eine neue Simulation durchführen.

17. Simulation Münzwurf mit „Wurzeltrichter“ und Prognoseintervall

Betrachtet wird folgendes Beispiel: Eine Münze wird n-mal geworfen. Es soll mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95,4 % prognostiziert werden, in welches Intervall um den erwarteten Wert von p = 0,5 die relative Häufigkeit für „Wappen“ fallen wird.

Dazu wird der Ausdruck für das Prognoseintervall (PI) folgendermaßen „umgeschrieben“:
Prognoseintervall für die absolute Häufigkeit: $|X-\mu| \le k \cdot \sigma$: [μ − k · σ ; μ + k · σ].

Teilt man die Ungleichung durch n und berücksichtigt, dass $\mu = n \cdot p \Leftrightarrow p = \frac{\mu}{n}$ gilt und dass $\frac{X}{n}$ die relative Trefferhäufigkeit h darstellt, folgt:

$$\left|\frac{X}{n}-p\right| \le k \cdot \frac{\sigma}{n} : \left[p-k\cdot\frac{\sigma}{n};\ p+k\cdot\frac{\sigma}{n}\right] \text{ mit } k\cdot\frac{\sigma}{n} = k\cdot\frac{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}{n} = k\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$$

Die Abb. 30 zeigt die Simulation von n Münzwürfen und die Streuung der relativen Häufigkeiten um den theoretischen Wert p = 0,5. Zusätzlich werden die Werte für die Prognoseintervalle für n = 100 und n = 400 angegeben und graphisch durch senkrechte Strecken veranschaulicht. Durch Drücken von „Strg“ „R“ kann wieder eine neue Simulation erzeugt werden. Dabei kann es durchaus vorkommen, dass ein Wert für h außerhalb des Prognoseintervalls liegt. Die Wahrscheinlichkeit, dass die relative Häufigkeit innerhalb des PI’s liegt, beträgt ja auch nur 95,4%.

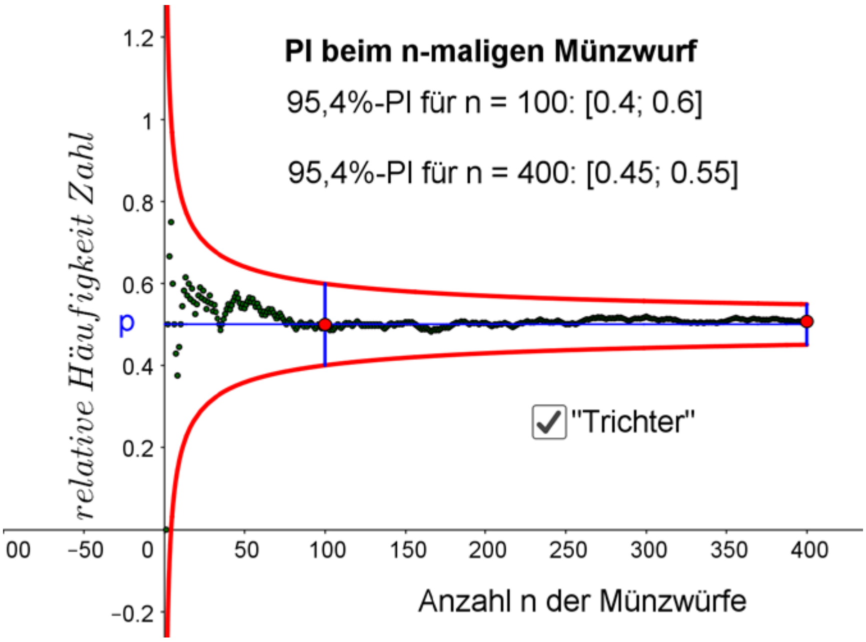


Abb. 31: Simulation Münzwurf mit Prognoseintervall und „Wurzeltrichter“

Prognoseintervalle werden mit wachsendem n immer kleiner, p wird sozusagen immer enger eingeschnürt. Genauer: Es gilt:

$$k\cdot\frac{\sigma}{n} = k\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot k\cdot\sqrt{p\cdot(1-p)} = \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot \text{konst}$$

Man spricht deshalb vom $\frac{1}{\sqrt{n}}$-Gesetz. Z. B. gilt bei Vervierfachung der Wurfzahl n: $k\cdot\frac{\sigma}{4\cdot n}=\frac{1}{\sqrt{4\cdot n}}\cdot\text{konst}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\text{konst}=\frac{1}{2}\cdot k\cdot\frac{\sigma}{n}$. Die Stichprobengröße vervierfachen, bringt (nur) eine Halbierung der Intervalllänge.

Für k = 2 (entspricht einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95,4 %) folgt eine besonders einfache Form des „Wurzeltrichters“: $\left|\frac{X}{n}-p\right|\le\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Durch das $\frac{1}{\sqrt{n}}$-Gesetz wird das Grundphänomen der Stabilisierung der relativen Häufigkeit bei einer großen Zahl von Versuchsdurchführungen – zumindestens für Bernoulli-Experimente – formelmäßig erfasst.

18. Graphische Ermittlung von Prognoseintervallen

Mithilfe des in Abb. 32 gezeigten Geogebraarbeitsblattes lassen sich Prognoseintervalle für verschiedene Werte von n und p mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % graphisch ermitteln.

Man kann zu jeder Wahrscheinlichkeit p (auf der Rechtsachse) das zugehörige 1,96σ-Intervall der relativen Häufigkeiten auf der Hochachse ablesen. Die Intervalle werden durch die Graphen der Funktionen $h(p)=p\pm 1{,}96\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$ begrenzt. Die Grenzen des Prognoseintervalls [a; b] erhält man, indem man die Senkrechte zu x = p mit diesen Graphen schneidet. Die Intervallgrenzen und die –länge werden auf dem Arbeitsblatt auch noch zahlenmäßig angegeben.

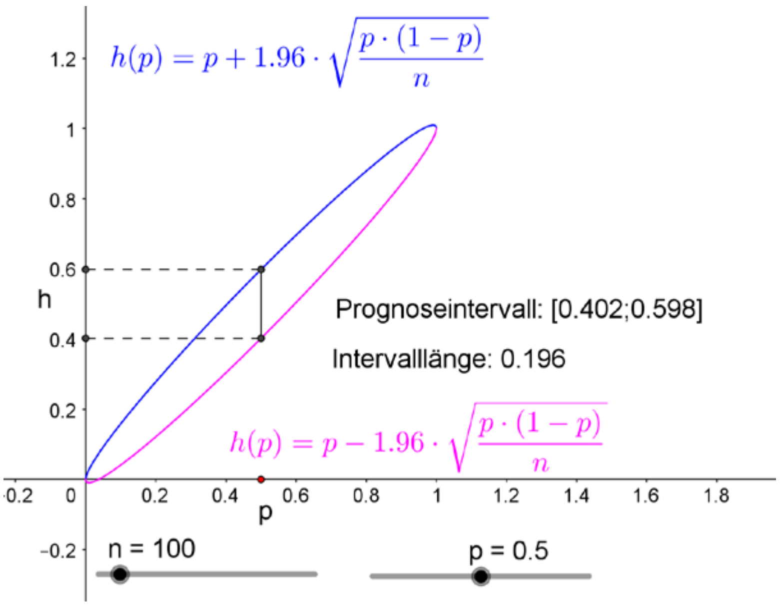


Abb. 32: Grafische Bestimmung von Prognoseintervallen

19. Alternativ- und Signifikanztests leicht gelöst: Der Wahrscheinlichkeitsrechner

Zur schnellen und problemlosen Bearbeitung von Aufgaben zu den Hypothesentests kann man eine in Geogebra implementierte Applikation verwenden: Den Wahrscheinlichkeitsrechner. Dies sei an einer Beispielaufgabe erläutert.

Der Alternativtest

Ein Großhändler erhält eine Importlieferung von Kisten, die sehr viele Schrauben enthalten. Ein Teil der Kisten ist 1. Wahl, d. h. der Anteil der Schrauben, die die Maßtoleranz überschreiten, beträgt 10 %. Die restlichen Kisten sind 2. Wahl, der Ausschussanteil beträgt hier 30 %.

Da alle Kisten gleich aussehen und nicht beschriftet sind, soll durch Entnahme von Stichproben getestet werden, welche Qualität jeweils vorliegt.

Einer zu testenden Kiste werden zu diesem Zweck 20 Schrauben entnommen. Sind höchstens 2 Schrauben Ausschuss, so wird die Kiste als 1. Wahl eingestuft, anderenfalls als 2. Wahl.

Festlegungen: Nullhypothese H_0 (p_0 = 0,3): Die Kiste ist 2. Wahl; Alternativhypothese H_1(p_1 = 0,1): Die Kiste ist 1. Wahl.

Ermitteln Sie die Irrtumswahrscheinlichkeiten!

Quelle: Bigalke/Köhler: Mathematik, Berlin, Leistungskurs MA-4, S. 100, Cornelsen-Verlag, Berlin 2012
Der Aufgabentext wurde am Ende etwas gekürzt.

Die folgende Abb. zeigt die Vorgehensweise zur Ermittlung des Fehlers 1. Art.

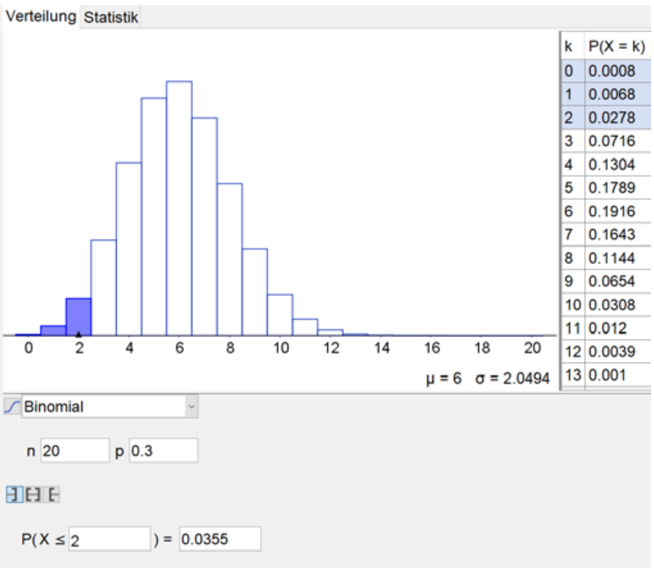


Abb. 33: Fehler 1. Art (Entscheidung für H_1, obwohl H_0 wahr ist)

Man wählt im Fenster zunächst die Art der Verteilung (hier „Binomial“) aus. Dann gibt man die Werte für n und p ein und wählt ein linksseitiges Intervall aus. Der Fehler 1. Art beträgt also 3,55 %. In analoger Art und Weise lässt sich der Fehler 2. Art bestimmen (Abb. 34).

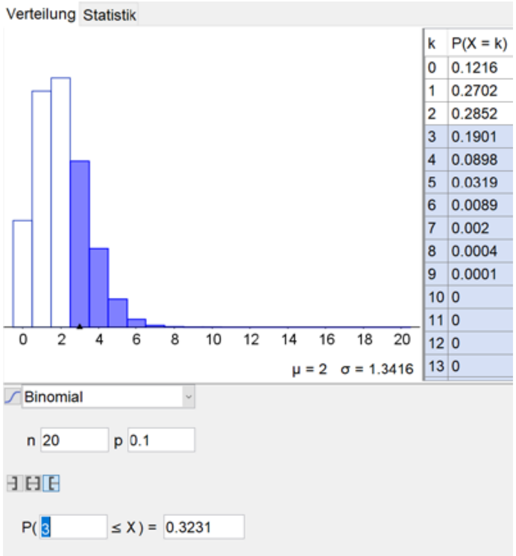


Abb. 34: Fehler 2. Art (H_0 wird angenommen, obwohl H_1 wahr ist)

20. Simulation Medikamententest (Dot-Plot)

Ein typisches Beispiel für einseitige Signifikanztests ist der Medikamententest:

Ein bewährtes Medikament hilft erfahrungsgemäß 50 % der behandelten Patienten. Von einem neuen Medikament wird behauptet, dass es noch besser wirkt (Hypothese H_1). Zur Überprüfung wird das neue Medikament an einer Stichprobe von 100 Patienten getestet. Wenn es bei mindestens 57 Patienten ausreichend wirkt (Entscheidungsregel), wird die Hypothese angenommen. Berechnen Sie die Irrtumswahrscheinlichkeit (Fehler 1. Art), d. h. die Hypothese H_1 wird angenommen, obwohl die Nullhypothese H_0 wahr ist.

Rechnerisch ergibt sich, dass der Fehler 1. Art 9,7 % beträgt. Eine besonders einfache Simulation zu diesem Test ist der sog. Dot-Plot (Abb. 35).

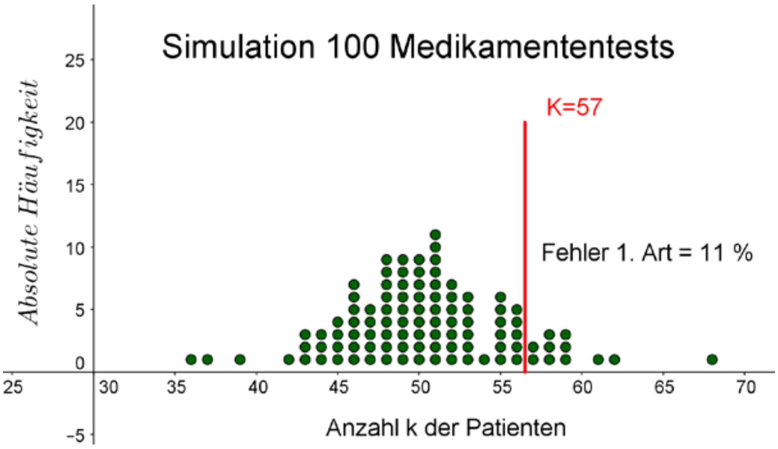


Abb. 35: Simulation von 100 Medikamententests (Dot-Plot)

Führt man diese Simulation durch Drücken der Tastenkombination „Strg“ „R“ mehrfach durch, erkennt man, dass eine Stichprobe vom Umfang 100 doch erheblichen Schwankungen unterworfen ist.

21. Animation zur Standardisierung der Binomialverteilung

Das folgende dynamische Arbeitsblatt veranschaulicht die einzelnen Schritte des Standardisierungsprozesses: 1. Schritt: Verschiebung der Binomialverteilung um den Erwartungswert μ nach links, 2. Streckung der Streifen in y-Richtung um den Faktor σ, 3. Verkürzung der Streifenbreite um den Faktor 1/σ, 4. Approximation durch die Gaußsche Standardglockenkurve $\varphi_{0,1}$.

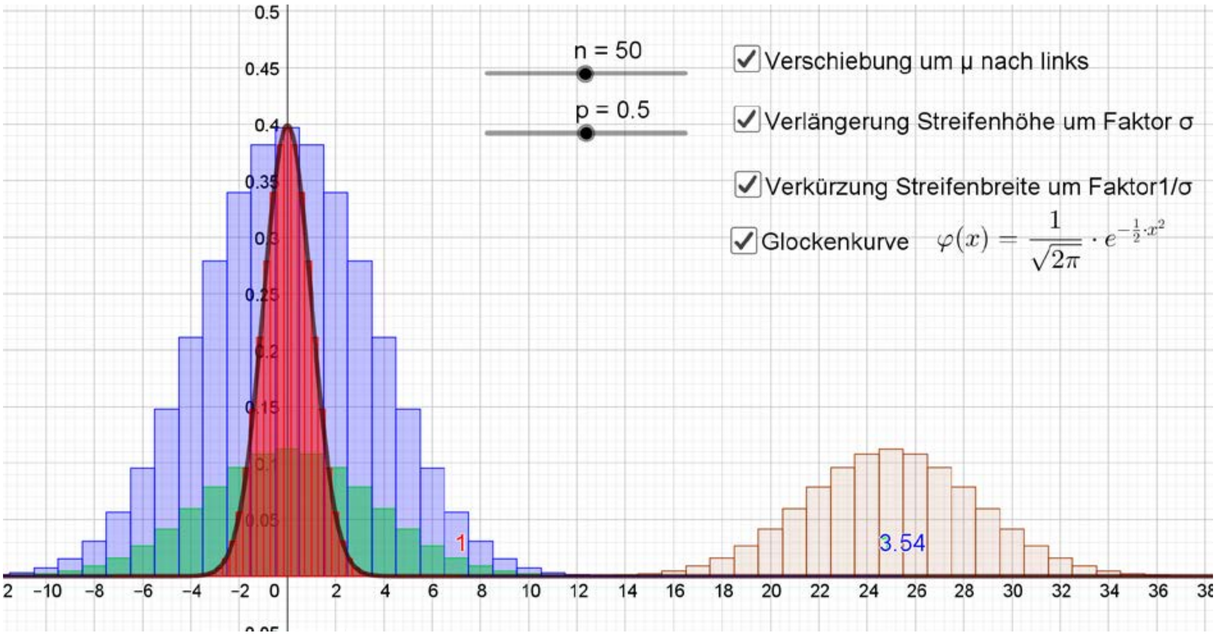


Abb. 36: Standardisierung der Binomialverteilung

Zur Übung können die Schüler mit Geogebra die Umkehrung des Standardisierungsprozesses durchführen; d. h. sie sollen die Gaußsche Standardglockenkurve $\varphi_{0,1}$ so verschieben, dass der Graph von $\varphi_{\mu,\sigma}$ entsteht.

22. Visualisierung zur Stetigkeitskorrektur

Bei Berechnungen von kumulierten Wahrscheinlichkeiten und von Intervallwahrscheinlichkeiten unter Verwendung der Näherungsformel von Moivre und Laplace muss eine sogenannte Stetigkeitskorrektur vorgenommen werden. Das folgende Geogebraarbeitsblatt zeigt den Fehler, den man machen würde, wenn man die „Korrekturrechtecke" nicht berücksichtigen würde sowohl graphisch als auch rechnerisch.

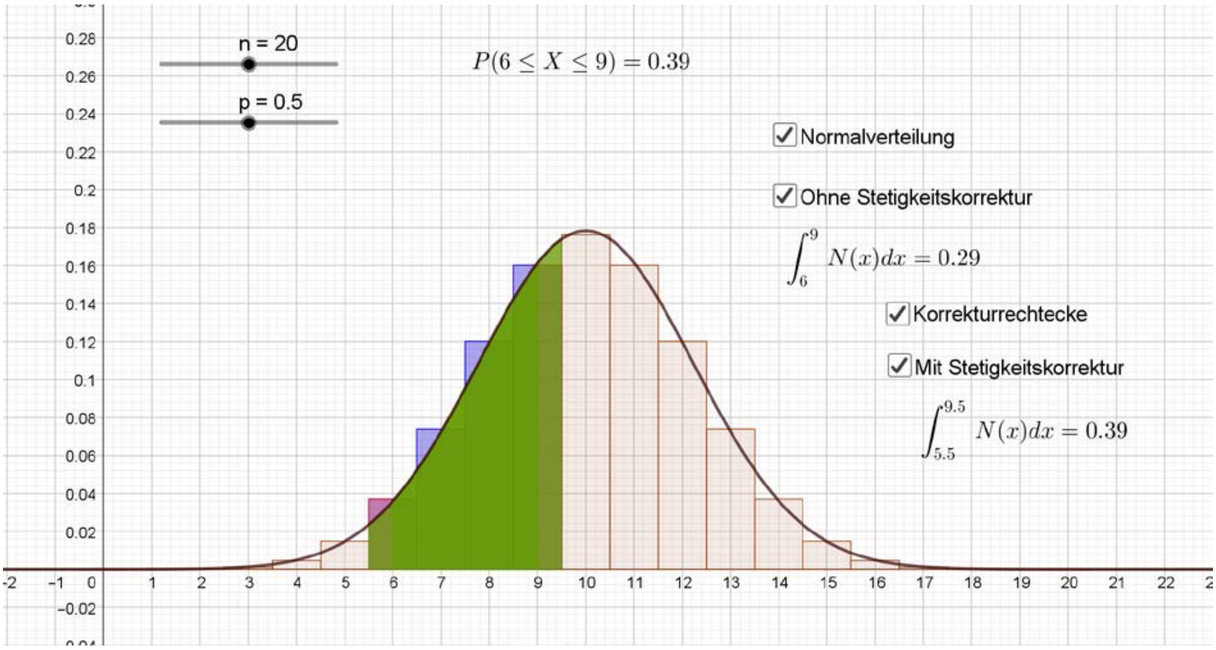


Abb. 37: Stetigkeitskorrektur

22.1 Anleitung zur Erstellung der Graphik zur Stetigkeitskorrektur

Führen Sie jeweils einen Schieberegler für die Versuchsanzahl n (Startwert: 10; Endwert: 30; Schrittweite: 1) und einen Schieberegler für die Wahrscheinlichkeit p (Startwert: 0.05; Endwert: 0.95; Schrittweite: 0.05) ein. Berechnen Sie die zugehörigen Punktwahrscheinlichkeiten durch Eingabe von „Folge(Binomial(n, p, k, false), k, 0, n)“ (→L_1). Zeichnen Sie das Histogramm mit „Balkendiagramm(-0.5, n + 0.5, L_1)“. Berechnen Sie die Punktwahrscheinlichkeiten für k = 6, 7, 8, 9 durch Eingabe von „Folge(Binomial(n, p, k, false), k, 6, 9)“ (→L_2). Zeichnen Sie den Histogrammausschnitt mit „Balkendiagramm(5.5, 9.5, L_2)“.

Berechnen Sie den Erwartungswert μ = n·p und die Standardabweichung σ = $\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$. Zeichnen Sie die Gaußsche Glockenkurve über dem Histogramm durch Eingabe von „N(x)=1 / (σ sqrt(2π)) e^(-0.5((x - μ) / σ)²)“). Berechnen Sie die Fläche ohne Stetigkeitskorrektur durch Eingabe von „Integral(N,6,9)“ und mit Stetigkeitskorrektur durch Eingabe von „Integral(N,5.5,9.5)“. Berechnen Sie die Punktwahrscheinlichkeiten für k = 6 mit „Binomial(n, p, 6, false)“ (→ z. B. g) und k = 9 mit „Binomial(n, p, 9, false)“ (→ z. B. h) und zeichnen Sie die zugehörigen halben Rechteckstreifen (Korrekturrechtecke) mit „Balkendiagramm(5.5, 6, {g})“ bzw. „Balkendiagramm(9, 9.5, {h})“. Färben Sie die einzelnen Flächen unterschiedlich und führen Sie Kontrollkästchen ein zum Einblenden der Normalverteilungskurve, der Flächen ohne Stetigkeitskorrektur, der Korrekturrechtecke und der Fläche mit Stetigkeitskorrektur. Notieren Sie in einem Text den Wert für die Intervallwahrscheinlichkeit P(6 ≤ X ≤ 9).

Jetzt muss noch das Graphikfenster so angepasst werden, dass die Verteilung auch beim Bedienen der Schieberegler immer zentriert bleibt. Lesen Sie dazu den Wahrscheinlichkeitswert des Erwartungswertes aus der Liste L_1 heraus und geben Sie in die Eingabezeile ein: p_{Max}=Element(L_1, round(μ)). Stellen Sie jetzt das Graphikfenster wie folgt ein: x Min: -5; x Max: 2μ+5; y Min: -0.05; y Max: p_{Max}+0.15.

23. Das Geburtstagsproblem

Eines der faszinierendsten Probleme der Stochastik ist das sog. Geburtstagsproblem:

„n Personen befinden sich in einem Raum. Ab wie viel Personen ist die Chance, dass zwei oder mehr dieser Personen am gleichen Tag des Jahres Geburtstag haben, größer als 50 %?"

Das Interessante an dieser Aufgabenstellung ist, dass sie kontraintuitiv ist, d. h. wenn man das erste Mal damit konfrontiert wird, geht die Vermutung bei den meisten Personen in eine völlig falsche Richtung, nämlich dass die Zahl bei über hundert Personen liegen müsse.

Man kann die Aufgabe unter bestimmten Annahmen (Ignorieren von Schaltjahren, alle Tage eines Jahres sind als Geburtstage gleichwahrscheinlich) unter Abbildung auf ein Urnenmodell (Ziehung von n Kugeln mit Zurücklegen) recht einfach lösen, indem man das Gegenereignis betrachtet. Es gilt: $P(E) = 1 - \frac{\prod_{i=1}^{n}(366-i)}{365^n}$. Die folgende Abb. zeigt die graphische Darstellung, die mithilfe von Geogebra mit wenigen Befehlen erstellt wurde.

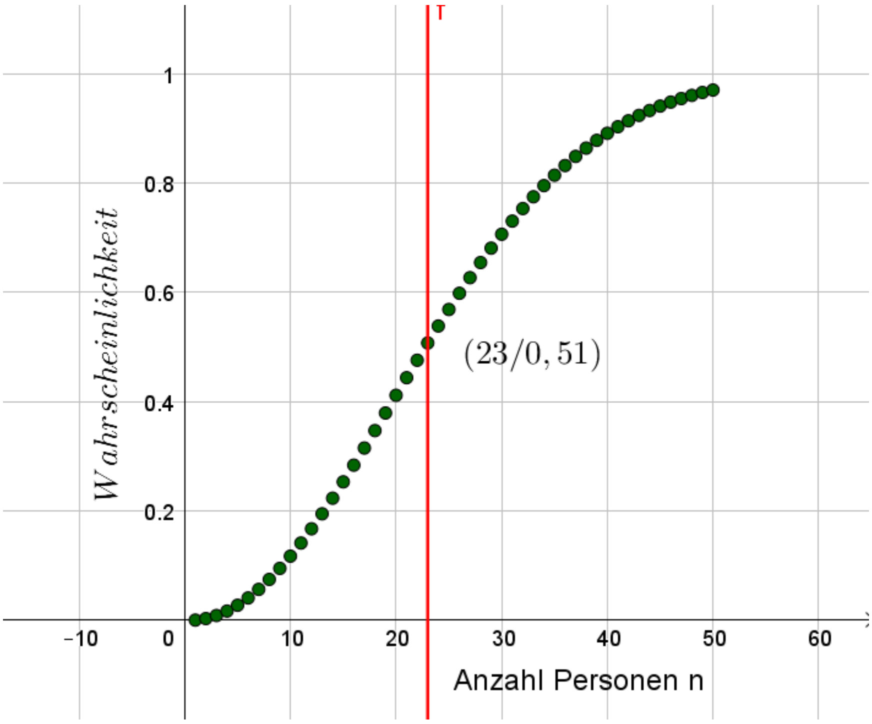


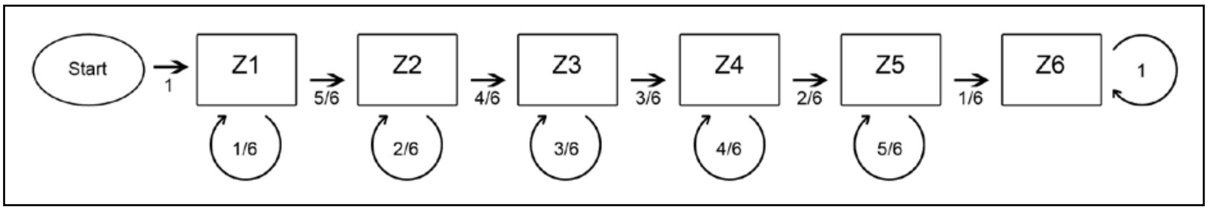
Abb. 38: Graphische Darstellung zum Geburtstagsproblem

Man erkennt, dass schon ab 23 Personen die Wahrscheinlichkeit über 50 % liegt, dass mindestens zwei Personen am selben Tag Geburtstag haben. Die Lösung des Geburtstagsproblems bestätigt damit folgende Aussage, die Pierre-Simon de Laplace (1749 – 1827) zugeschrieben wird: *„Einer der großen Vorteile der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist der, dass man lernt dem ersten Anschein zu misstrauen"*. Diese interessante Aufgabe ist auch ein weiteres Beispiel für den sinnvollen Einsatz von CAS-Systemen, denn händisch wäre eine Bearbeitung nur mit kaum vertretbarem zeitlichen Aufwand möglich.

24. Das Problem der vollständigen Serie

Die folgende Aufgabenstellung geht über den RLP hinaus und ist daher eher für projektartigen Unterricht geeignet. Ausgangspunkt ist folgende Fragestellung: Wie oft muss man einen Würfel werfen bis alle Augenzahlen von 1 bis 6 mindestens einmal aufgetreten sind. Es handelt sich hierbei um eine klassische Aufgabenstellung aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung, mit der sich schon berühmte Mathematiker wie Abraham de Moivre, Leonhard Euler und Pierre Simon Laplace beschäftigt haben. Man bezeichnet dieses Problem auch als „Problem der vollständigen Serie" oder als „Sammelbilderproblem". Im Folgenden wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung zu dem oben formulierten Würfelbeispiel mithilfe von Geogebra ermittelt.

Der Vorgang lässt sich am besten durch einen sog. **Übergangsgraphen** veranschaulichen:



Der Zustand Z4 gibt dabei z. B. an, dass 4 verschiedene Augenzahlen bis zu diesem Zeitpunkt aufgetreten sind. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 4/6 würfelt man dann eine bereits erhaltene Augenzahl und mit einer Wahrscheinlichkeit von 2/6 erzielt man eine neue Augenzahl. Im Zustand Z6 hat man die vollständige Serie erhalten. Einen solchen Endzustand nennt man **absorbierend** (erkennbar am Ringpfeil mit der Wahrscheinlichkeit 1). Alle anderen Zustände nennt man **innere Zustände**.

Von zentraler Bedeutung bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeiten ist die sog. **Übergangsmatrix**. Für das oben angeführte Problem der vollständigen Serie sieht diese Matrix folgendermaßen aus:

$$
\begin{array}{r}
\textit{nach} \\
\\
\\
\\
U = \textit{von} \\
\\
\\
\\
\end{array}
\begin{array}{c}
\\
S \\
Z1 \\
Z2 \\
Z3 \\
Z4 \\
Z5 \\
Z6
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} S & Z1 & Z2 & Z3 & Z4 & Z5 & Z6 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1/6 & 5/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2/6 & 4/6 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 3/6 & 3/6 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 4/6 & 2/6 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 1/6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Dabei steht z. B. in der i-ten Zeile und k-ten Spalte die Wahrscheinlichkeit dafür, vom Zustand Z_i zum Zustand Z_k zu gelangen. Die Übergangsmatrix ist eine sog. stochastische Matrix, bei der die Summe der Wahrscheinlichkeiten in einer Zeile jeweils 1 ist.

Geht man von der Anfangsverteilung $M_0 = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$ aus, so kann man unter Verwendung der Übergangsmatrix „M_U" mit den Eingaben $M_0 \cdot M_U^6, M_0 \cdot M_U^7$,... die Wahrscheinlichkeiten berechnen, mit denen sich das System nach 6, 7, ... Würfen in den Zuständen $S, Z1, Z2, \ldots, Z6$ befindet. Im Folgenden sind die ersten beiden Zeilen der entstandenen Matrix angegeben:

$$M_1 = (0 \quad 0 \quad 0.02 \quad 0.232 \quad 0.502 \quad 0.232 \quad 0.015)$$

$$M_2 = (0 \quad 0 \quad 0.007 \quad 0.129 \quad 0.450 \quad 0.360 \quad 0.054)$$

Man erkennt, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man schon mit 6 Würfen eine vollständige Serie erzielt hat, ungefähr 1,5 % beträgt. Nach 7 Würfen hat man bereits mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 5,4 % alle Zahlen gewürfelt.

Stellt man diese Wahrscheinlichkeiten in einem Histogramm dar, so erhält die sog. **kumulierte Wahrscheinlichkeitsverteilung** (s. Abb. 39).

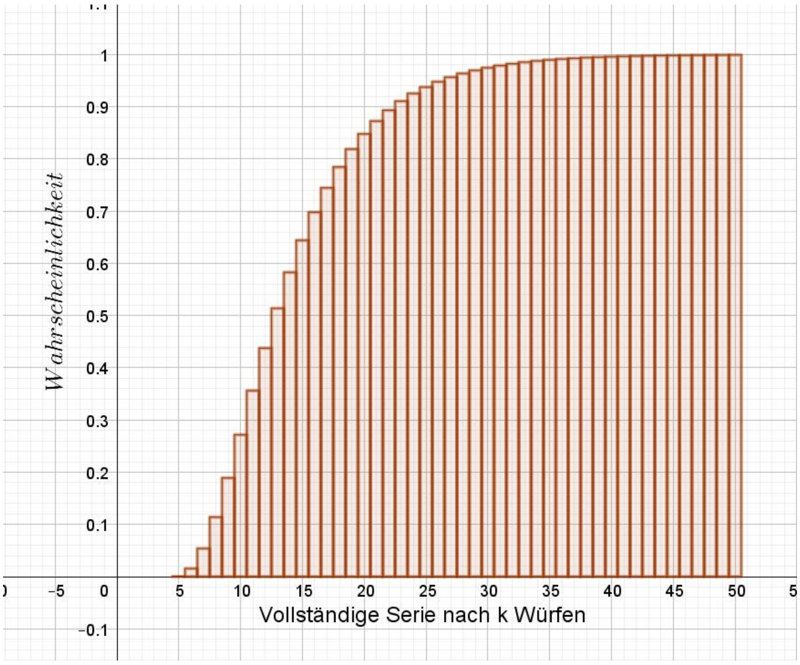


Abb. 39: Kumulierte Wahrscheinlichkeitsverteilung zum Problem der vollständigen Serie

Man erkennt an der kumulierten Wahrscheinlichkeitsverteilung, dass bereits nach dem 13. Wurf die Wahrscheinlichkeit größer als 50 % ist, eine vollständige Serie zu würfeln. Nach 50 Würfen beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Erzielen einer vollständigen Serie bereits gerundet 99,9 %.

Um zu der unten abgebildeten **Wahrscheinlichkeitsverteilung** zu gelangen, müssen Differenzen zwischen Wahrscheinlichkeiten ermittelt werden. Wenn man die Wahrscheinlichkeit für den (n-1)-ten Wurf von derjenigen für den n-ten Wurf subtrahiert, erhält man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man genau mit dem n-ten Wurf eine vollständige Serie erzielt. Man erkennt, dass bei 11 Würfen die Wahrscheinlichkeit am größten ist, eine vollständige Serie zu erzielen. Sie beträgt gerundet 8,4 %.

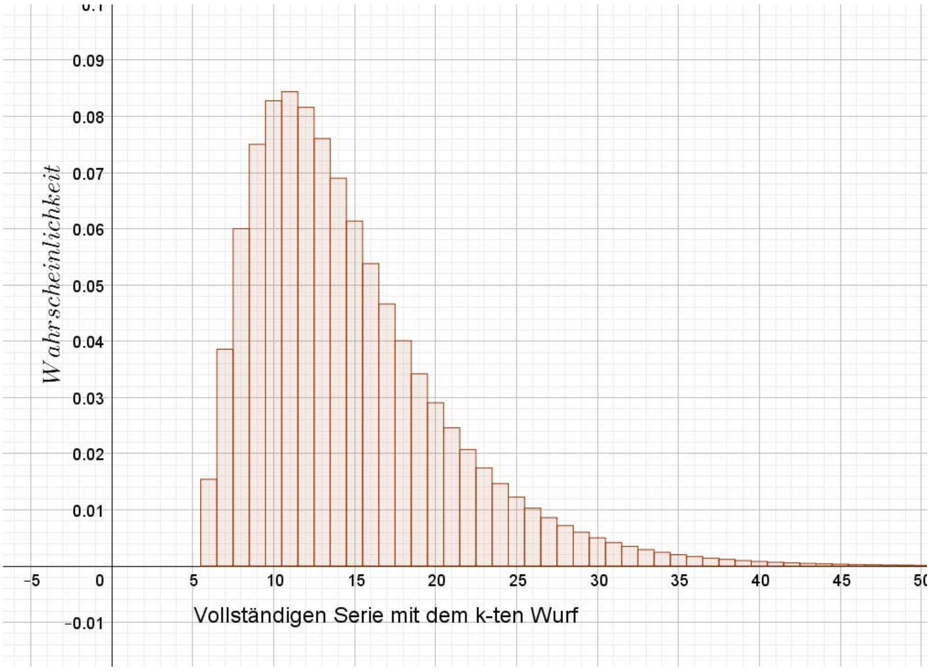


Abb. 40: Wahrscheinlichkeitsverteilung zum Problem der vollständigen Serie

25. Die wichtigsten Befehle für die Stochastik

a. Zufallszahlen

1. Zufallszahl(<Minimalwert>, <Maximalwert>)

erzeugt eine Zufallszahl aus dem Intervall [Minimalwert; Maximalwert].

Beispiele: Folge(Zufallszahl(0,1),n,1,10) erzeugt z. B. eine Liste {1,0,0,1,0,1,0,1,0,1}.

Folge(Zufallszahl(1,6),n,1,10) erzeugt z. B. eine Liste {3,4,3,3,2,4,1,2,4,6}.

2. ZufallszahlBinomialverteilt(<Anzahl der Versuche>, <Wahrscheinlichkeit>)

Erzeugt eine Zufallszahl von einer Binomialverteilung mit *n* Versuchen und der Wahrscheinlichkeit *p*.

Beispiel: Folge(ZufallszahlBinomialverteilt(100, 0.5),n,1,10) erzeugt z. B. eine Liste von 10 Zufallszahlen {53, 53, 57, 53, 54, 45, 49, 55, 43, 49} zu 100 Versuchen mit der Wahrscheinlichkeit 0,5 (entspricht z. B. 100 Münzwürfen).

b. Balkendiagramm

Diesen Befehl gibt es in verschiedenen Varianten.

3. Balkendiagramm(<Liste von Daten>, <Liste von Häufigkeiten>)

Erstellt ein Balkendiagramm mit der Liste der Daten mit den entsprechenden Häufigkeiten.

Anmerkung: Die Liste der Daten muss Zahlen enthalten, die immer zunehmen.
Beispiel: Balkendiagramm({10,11,12,13,14}, {5,8,12,0,1})

4. Balkendiagramm(<Anfangswert>, <Endwert>, <Liste von Balkenhöhen>)

Erstellt ein Balkendiagramm, abhängig vom vorgegebenen Intervall. Die Anzahl der Balken wird durch die Länge der Liste, deren Elemente die Höhe der Balken festlegen, bestimmt.

Beispiel: Balkendiagramm(-0.5, 10.5, Liste 1) erstellt ein Balkendiagramm mit 11 Balken, wenn in Liste 1 z. B. die Wahrscheinlichkeiten zu einer Binomialverteilung mit n = 10 stehen.

c) Binomialverteilung

5. Binomial(<Anzahl der Versuche>, <Erfolgswahrscheinlichkeit>)

Erzeugt ein Balkendiagramm einer Binomialverteilung.

Der Parameter *Anzahl der Versuche* gibt die Anzahl der unabhängigen Bernoulli-Versuche an und der Parameter *Erfolgswahrscheinlichkeit* die Wahrscheinlichkeit auf Erfolg pro Versuch.

6. Binomial(<Anzahl der Versuche>, <Erfolgswahrscheinlichkeit>, <Anzahl der Erfolge>, <Wahrheitswert Verteilungsfunktion>)

Sei X eine binomialverteilte Zufallsvariable und sei v die Anzahl der Erfolge.
Berechnet P(X = *v*), wenn der Wahrheitswert *false* ist.
Berechnet P(X ≤ *v*), wenn der Wahrheitswert *true* ist.
Die ersten beiden Parameter sind gleich wie oben.

d) Normalverteilung

7. Normal(<Erwartungswert>, <Standardabweichung>, x, <Wahrheitswert Verteilungsfunktion>)

Ist der Wahrheitswert false, so wird die Gaußsche Glockenkurve $\varphi_{\mu,\sigma}$ gezeichnet. Bei Eingabe von Normal(0,1,x,false) wird die Gaußsche Standard-Glockenkurve $\varphi_{0,1}$ gezeichnet.

Ist der Wahrheitswert true, so wird die Gaußsche Integralfunktion $\Phi_{\mu,\sigma}$ gezeichnet.

8. Normal(<Erwartungswert>, <Standardabweichung>, <Wert der Variablen v>)

Berechnet die Funktion $\Phi\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)$ an der Stelle *v* mithilfe des Erwartungswerts μ und der Standardabweichung σ. Die Funktion Φ ist die Gaußsche Integralfunktion

e) Spezielle Befehle

9. ZähleWenn[<Bedingung>, <Liste>]

Zählt jene Elemente der Liste, welche die Bedingung erfüllen.
Beispiel: ZähleWenn(x<3,{1,2,3,4,5}) erzeugt die Zahl *2*.

10. Element(<Liste>, <Position des Elements>)

Gibt das *n*-te Element der Liste an. Eignet sich zum Auswerten von Listen.
Beispiel: Element({1,3,2},2) liefert *3*, das zweite Element der Liste *{1, 3, 2}*.

11. Wenn(<Bedingung>, <Dann Objekt>, <Sonst Objekt>)

Wenn eine bestimmte Bedingung erfüllt ist, wird ein bestimmtes Objekt zugewiesen, anderenfalls das dahinterstehende. Eignet sich zum Auswerten von Listen.

Beispiel: L_1={8,11,6,1,10}. Folge(Wenn(Element(L_1,n)≥10,1,0),n,1,5) erzeugt {0,1,0,0,1}.

12. Summe(<Liste>)

Berechnet die Summe aller Listenelemente.
Beispiel: Summe({1,2,3}) liefert die Zahl *a* = *6*.

13. Summe(<Liste>, <Zahlen der Elemente>)

Berechnet die Summe der ersten *n* Listenelemente.
Beispiel: Summe({1,2,3,4,5,6},4) liefert die Zahl $a = 10$.

14. DotPlot[<Liste von Rohdaten>]

Erstellt einen Dot-Plot zu der Liste der gegebenen Zahlen. Man erhält außerdem eine Liste von Punkten, wobei zum Beispiel für jede Zahl *n*, die *k*-mal vorkommt, die Punkte *(n, 1), (n, 2), ..., (n, k)* erzeugt werden.

Beispiel: DotPlot[{2, 5, 3, 4, 3, 5, 3}] liefert *{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (5, 1), (5, 2)}*.

Anmerkung: Man kann hinter der Liste von Rohdaten durch ein Komma getrennt noch einen Skalierungsfaktor angeben, um den Abstand zwischen übereinanderliegenden Punkten einzustellen.

15. Ceil(<x>)

Nächst größere oder gleiche ganze Zahl.
Beispiel: ceil(2.2) liefert 3.

16. Floor(<x>)

Nächst kleinere oder gleiche ganze Zahl.
Beispiel: floor(2.2) liefert 2.

17. Round(<x>)

Nächst größere oder nächst kleinere oder gleiche ganze Zahl.
Beispiele: Round(2.2) liefert 2; Round(2.6) liefert 3,

IV. Analytische Geometrie

26. Schattenwurf

Die folgende Einstiegsaufgabe kann zeichnerisch aber natürlich auch unter Verwendung des Geogebra-CAS gelöst werden.

Im „Koordinatenraum“ steht ein schräg nach oben geneigtes Dreieck ABC mit A(3/2/0), B(3/6/0) und C(2/3/4). In Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ *fällt paralleles Licht auf dieses Dreieck. Berechnen Sie dazu die Koordinaten des Dreiecksschattens auf dem Boden und den Wänden des Raumes, wobei Sie sich an der (nicht maßstäblichen) Skizze orientieren.*

C_2 ist ein (virtueller) Hilfspunkt in der x,y-Ebene außerhalb des Koordinatenraumes.

Quelle: Bigalke/Köhler: Leistungskurs Mathematik MA-3, Cornelsen-Verlag, 2011, S. 89, Berlin 2011

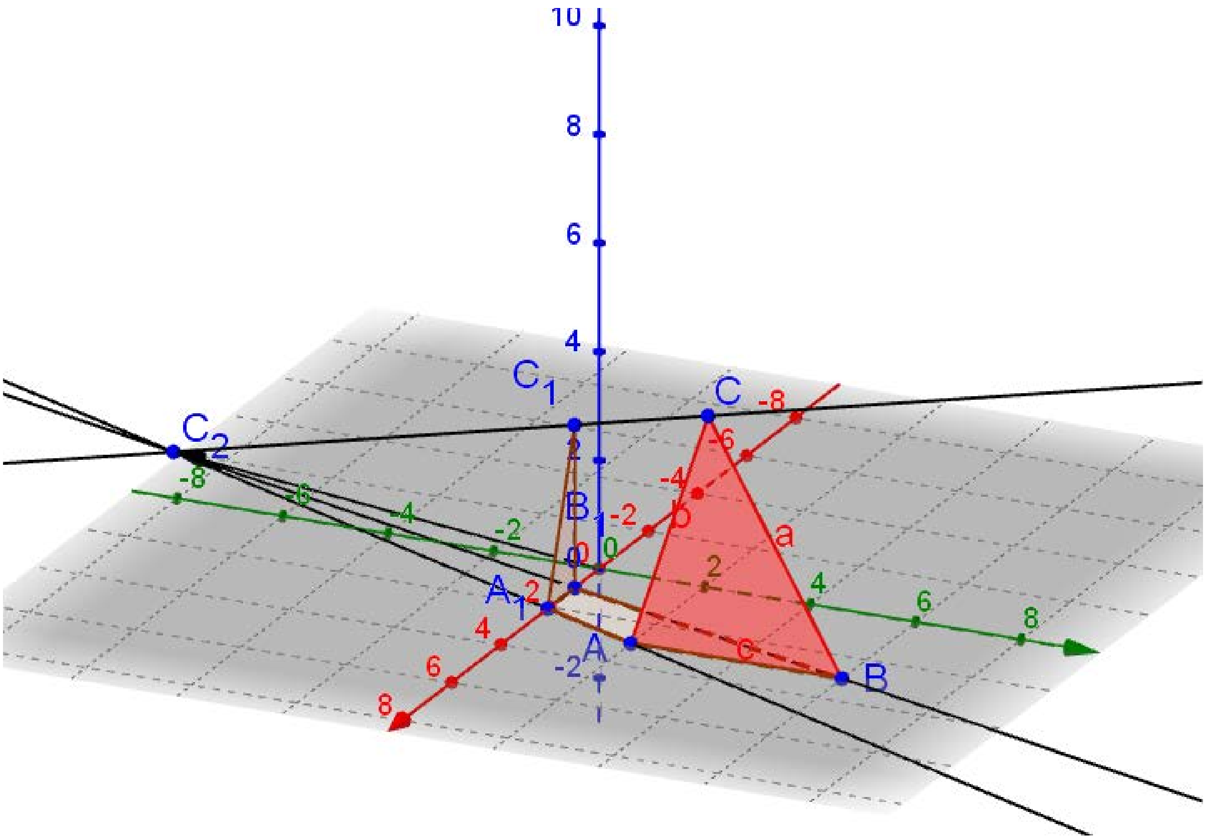


Abb. 41: Schattenwurf

Die Aufgabe ist mit Geogebra zeichnerisch lösbar. Man muss sich lediglich überlegen, dass der Schattenpunkt von C in der x,z-Ebene die Koordinaten $C_1(1/0/3)$ hat. Im Folgenden wird die CAS-Lösung zu dieser einfachen Einstiegsaufgabe erläutert, weil die Vorgehensweise in der analytischen Geometrie nicht ganz so intuitiv ist wie in der Analysis.

Man gibt zunächst in die Eingabezeile die Koordinaten der Punkte A, B und C ein und kennzeichnet das Dreieck mithilfe des Befehls Vieleck(A,B,C). Die Koordinaten der berechneten Punkte C_2, A_1, B_1 und C_1 werden im Verlauf der Rechnung ebenfalls eingegeben. Im Folgenden sind die Eingaben in die CAS-Applikation angegeben:

Zeile	Eingabe in das Geogebra-CAS-Fenster	Rückmeldung
1	av:=A	➔ av:= $\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$
2	bv:=B	➔ bv:= $\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix}$
3	cv:=C	➔ cv:= $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$
4	lv:=(-1,-3,-1)	➔ lv:= $\begin{pmatrix}-1\\-3\\-1\end{pmatrix}$
5	gc(r):=cv+r*lv	➔ gc(r):= $\begin{pmatrix}-r+2\\-3r+3\\-r+4\end{pmatrix}$
6	Löse((x,y,0)=gc(r),{x,y,r})	➔ {{x=-2,y=-9,r=4}}
7	c2:=C_2	➔ c2:= $\begin{pmatrix}-2\\-9\\0\end{pmatrix}$
8	ga(s):=av+s*(c2-av)	➔ ga(s):= $\begin{pmatrix}-5s+3\\-11s+2\\0\end{pmatrix}$
9	Löse((x,0,0)=ga(s),{x,s})	➔ {{x= $\frac{23}{11}$, $s=\frac{2}{11}$}}
10	gb(t):=bv+t*(c2-bv)	➔ gb(t):= $\begin{pmatrix}-5t+3\\-15t+6\\0\end{pmatrix}$
11	Löse((x,0,0)=gb(t),{x,t})	➔ {{x=1, $s=\frac{2}{5}$}}
12	Löse((x,0,z)=gc(r), {x,z,r})	➔ {{x=1,z=3,r=1}}

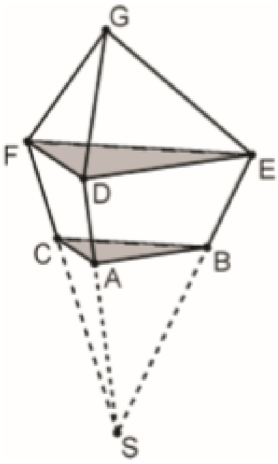
Vektoren werden in Geogebra mit kleinen Buchstaben definiert. Damit diese Definitionen nicht mit automatischen Bezeichnungen von Geogebra z. B. für Streckenlängen kollidieren, sollte man unbedingt 2 Buchstaben verwenden und zwar in intuitiv verständlicher Art und Weise (z. B. av für den Ortsvektor von A). Man gibt Vektoren als Zeilenvektoren ein; Geogebra schreibt diese dann in Spaltenvektoren um. Deshalb ist die mathematisch falsche Eingabe va:=A möglich. Auch innerhalb eines Lösebefehls können Vektoren zunächst als Zeilenvektoren eingegeben werden (vgl. z. B. Zeile 6).

Es erhöht die Übersichtlichkeit, wenn man beim Definieren von Geradengleichungen sowie beim Verwenden des Lösebefehls mit Buchstaben arbeitet. Beim Definieren von Geraden und Ebenengleichungen in Parameterform fasst Geogebra die Vektoren zusammen. Bei der Dokumentation müssen die Schüler diesen Prozess gedanklich rückgängig machen, um den Term als Summe von Ortsvektor und Richtungsvektor(en) darstellen zu können.

27. Überprüfen durch Messen (Zabi 2018 LK CAS, 2.1)

Anhand der folgenden Aufgabe 2.1 aus dem CAS-LK-Zentralabitur 2018 kann man sehr schön zeigen, wie sich Rechenergebnisse durch Messen im Graphikfenster mit wenigen Mausklicks überprüfen lassen: Winkelgröße, Höhenlänge mit Koordinatengleichung der Hilfsebene, Pyramidenvolumen, Schnittpunktskoordinaten Gerade/Ebene, Abstand Punkt/Ebene. Die dafür relevanten Aufgabenteile sind im Folgenden angegeben:

Aufgabe 2.1 CAS: Museum



Das Gebäude eines Museums kann modellhaft durch den abgebildeten Körper *ABCDEFG* dargestellt werden. Die obere Etage des Museums entspricht dabei der Pyramide *DEFG*, die untere Etage dem Körper *ABCDEF*, der Teil der Pyramide *DEFS* ist. Das Dreieck *ABC* liegt in der *x*-*y*-Ebene. Das Dreieck *DEF* liegt parallel zu dieser Ebene.
In einem kartesischen Koordinatensystem gilt für die Lage einiger der genannten Punkte: $A(-5\,|\,5\,|\,0)$, $B(-5\,|\,25\,|\,0)$, $D(0\,|\,0\,|\,15)$, $E(0\,|\,30\,|\,15)$, $F(-25\,|\,5\,|\,15)$ und $G(-10\,|\,10\,|\,35)$. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Realität.

b) Weisen Sie nach, dass die Bodenfläche der oberen Etage nicht rechtwinklig ist.

c) Berechnen Sie für das Dreieck *DEF* die Größe des Innenwinkels bei *E* sowie die Länge der Höhe auf der Seite $\overline{EF}$. [Zur Kontrolle: $h_{EF} \approx 21{,}21\,\text{m}$]

d) Für die obere Etage wird eine Anlage zur Entfeuchtung der Luft installiert, die für 100 m^3 Rauminhalt eine elektrische Leistung von 0,8 Kilowatt benötigt.
Weisen Sie nach, dass für den Betrieb der Anlage eine Leistung von 25 Kilowatt ausreichend ist.

e) Weisen Sie nach, dass sich die Gerade durch die Punkte *A* und *G* und die Ebene, in der das Dreieck *DEF* liegt, im Punkt $R\left(-\frac{50}{7}\,\middle|\,\frac{50}{7}\,\middle|\,15\right)$ schneiden.

f) An einer Metallstange, die durch die Strecke $\overline{RG}$ dargestellt wird, ist ein Scheinwerfer befestigt, der sich entlang der Stange verschieben lässt. Die Größe des Scheinwerfers soll vernachlässigt werden. Der Scheinwerfer soll aus einer Entfernung von 5 m diejenige Wand beleuchten, die im Modell durch das Dreieck *EFG* dargestellt wird.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes, der die Position des Scheinwerfers im Modell beschreibt.

Die folgende Abbildung zeigt die Graphik zur Aufgabe. Durch Betätigen der Kontrollkästchen lassen sich die einzelnen Objekte incl. der Messergebnisse ein- bzw. ausblenden.

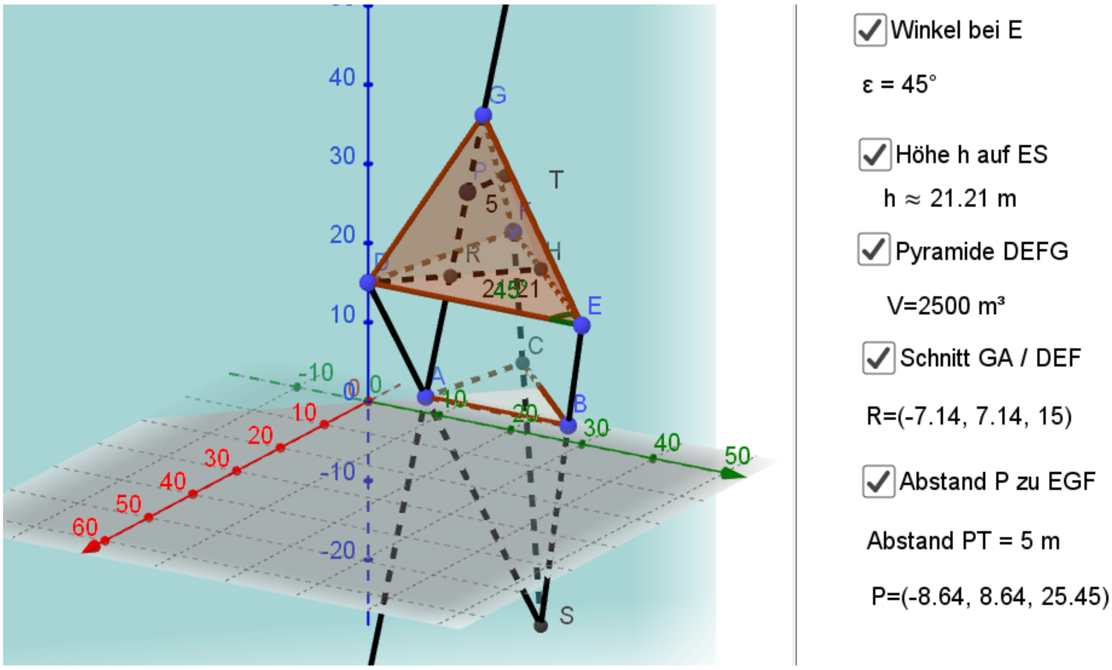


Abb. 42: Graphik zur Zabiaufgabe 2.1 aus 2018

28. Zabi-„Probieraufgabe“ – mit Geogebra elegant einfach gelöst

Im Berlin/Brandenburger CAS-LK-Zentralabitur 2017 2.2. f) trat eine sogenannte „Probieraufgabe“ auf.

f) Auf das Zelt treffendes Sonnenlicht lässt sich im Modell zu einem bestimmten Zeitpunkt durch parallele Geraden mit einem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -4{,}2 \\ a \end{pmatrix}$ beschreiben. Zu diesem Zeitpunkt trifft Sonnenlicht durch ein kleines Loch im horizontalen Vordach genau auf den Mittelpunkt des Zeltbodens.
Für a kommen verschiedene ganzzahlige Werte infrage. Ermitteln Sie einen dieser Werte und geben Sie die Koordinaten des zugehörigen Punktes an, der im Modell eine mögliche Position des Lochs im Vordach darstellt.

Zunächst musste man in den vorherigen Teilaufgaben die Koordinaten der Punkte eines Zeltes ermitteln: A(0/0/0), B(5/0/0), C(5/5/0), D(0/5/0), S(2.5/2.5/3.9), M(2.5/2.5/0), E(3.2/3.85/1.8), F(1.8/3.85/1.8), G(3.8/5.98/1.8), H(1.8/5.98/1.8). Zelt und Vordach sind mit den Befehlen Pyramide(A,B,C,D,S) und Vieleck(E,F,G,H) rasch gezeichnet. Man führt jetzt einen Schieberegler u für die unbekannte z-Koordinate des Richtungsvektors ein und definiert eine Geradengleichung in der Geogebra-CAS-Syntax: vm:=M; vs:=(0.5,-4.2,u); gs(r):=vm + r·vs. Mit dem Schneide-Werkzeug kann man jetzt den Durchstoßunkt anzeigen lassen und dessen Koordinaten im Algebrafenster ablesen. Natürlich lässt sich der Schnittpunkt auch mit dem Geogebra-CAS sofort berechnen.

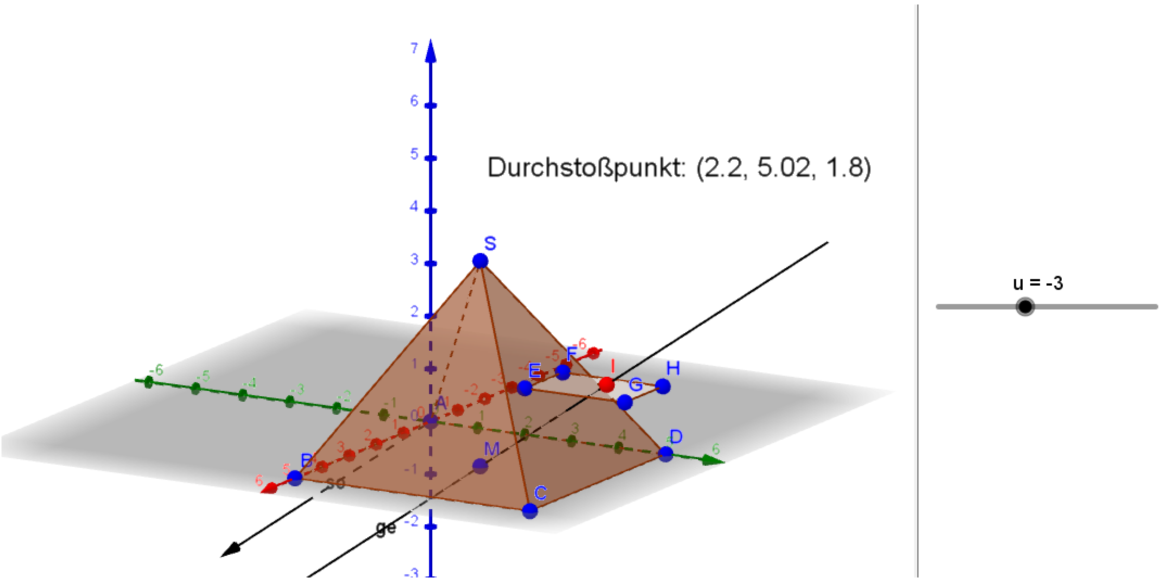


Abb. 43: Zabi 2017 2.2. f): Probieraufgabe“

29. Haus mit Pultdach – eine komplexe abiturähnliche Aufgabe

Die folgende Aufgabe eignet sehr schön um zu demonstrieren, wie man mit Geogebra unter Verwendung von Algebra-, CAS- und 3 D-Fenster arbeiten kann.

Ein Haus mit Schrägdach hat die angegebenen Maße.

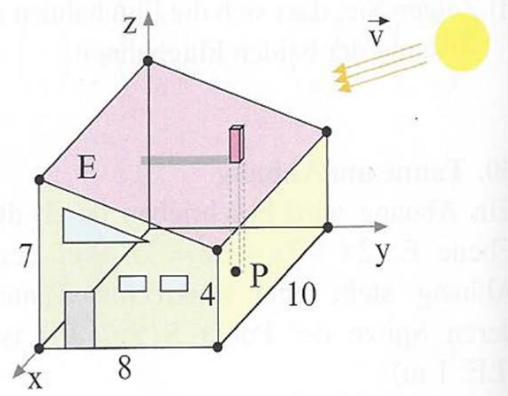
a) Geben Sie für die Dachebene E eine Gleichung in Koordinatenform an.

b) Welchen Winkel hat die Dachebene gegenüber der Horizontalen?

c) Der Schornstein mit dem Fußpunkt P(4|6|0) soll 1 m aus dem Dach ragen. Wie hoch muss der Schornstein sein?

d) Der Schornstein wird 6 m hoch gemauert. Wie lang ist sein Schatten auf dem Dach, wenn die Sonnenstrahlen aus Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ kommen?

e) Wie groß ist der Abstand der Schornsteinspitze vom Dach?



Quelle: Bigalke/Köhler: Leistungskurs Mathematik MA-3, Cornelsen-Verlag, 2011, S. 190, Berlin 2011

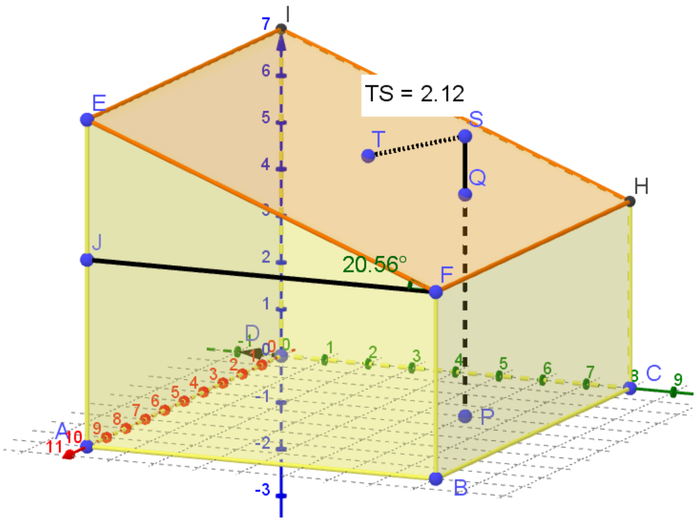


Abb. 44: Haus mit Pultdach

Zunächst gibt man die Koordinaten der Punkte A(10/0/0), B(10/8/0), F(10/8/4), E(10/0/7) und D(0/0/0) ein. Dann geht man auf „Einstellungen“→“Objektname anzeigen“ und aktiviert „keine neuen Objekte“ damit nicht alle Kanten beim Zeichnen des Hauses beschriftet werden. Dann zeichnet man das Haus mit dem Befehl Prisma(A,B,F,E,D). Bei der Eingabe des Befehls „Prisma(<Punkt>, <Punkt>, ...)“ muss darauf geachtet werden, dass der Punkt auf der Deckfläche (hier D) senkrecht über dem zuerst angegebenen Punkt der Grundfläche (hier A) liegt. Später kann man noch den Punkt J einzeichnen, sowie die Punkte P, Q und S des Schornsteins sowie den Schattenpunkt T. 2 Rechenergebnisse lassen sich durch Messen in der Graphik überprüfen: Der Winkel Dachebene/Horizontale (20,56°) und der Abstand ST (2,12 LE).

In folgenden wird die Bearbeitung im CAS-Fenster gezeigt.

Zeile	Eingabe in das Geogebra-CAS-Fenster	Rückmeldung
1	ev:=E	➔ ev:= $\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$
2	fv:=F	➔ fv:= $\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$
3	hv:=H	➔ hv:= $\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$
4	(ev-fv) $\otimes$ (hv-fv)	➔ $\begin{pmatrix} 0 \\ -30 \\ -80 \end{pmatrix}$
5	nv:=(0,3,8)	➔ $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$
6	((x,y,z)-fv)*nv=0	➔ b: 3y+8z-56=0
7	uv:=(0,-1,0)	➔ uv:= $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
8	acosg(uv*(ev-fv))/abs(ev-fv))	$\approx 20{,}56°$
9	pv:=P	pv:= $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$
10	gs(r):=pv+r*(0,0,1)	➔ gs(r):=(4,6,r)
11	Löse(3*6+8*r-56=0,r)	➔ $r = \left\{\frac{19}{4}\right\}$
12	gs(19/4)	➔ $\left(4, 6, \frac{19}{4}\right)$
13	sv:=S	➔ sv:= $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$
14	gl(s):=sv+s*(1,-4,-1)	➔ gl(s):=(4+s,6-4s,6-s)
15	Löse(3+(6-4s)+8*(6-s)-56=0,s)	➔ $s = \left\{\frac{1}{2}\right\}$
16	gl(1/2)	➔ $\left(\frac{9}{2}, 4, \frac{11}{2}\right)$

17	tv:=T	➔ tv:= $\begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ 4 \\ \frac{11}{2} \end{pmatrix}$
18	abs(tv-sv)	➔ $\frac{3}{\sqrt{2}}$
19		≈ 2.12

Das Kreuzprodukt kann mit dem Befehl Kreuzprodukt(<Vektor>, <Vektor>) berechnet werden oder einfacher durch Verwendung des Zeichens „⊗ „ (vgl. Zeile 4). Zur Berechnung des Skalarproduktes gibt es in Geogebra einen implementierten Befehl Skalarprodukt(<Vektor>, <Vektor>). Man kann jedoch auch hier einfacher ein „*“-Zeichen verwenden (vgl. Zeile 6). Mit der vordefinierten Funktion acosg(...) berechnet man den Arcuscosinus im Gradmaß (deshalb der Zusatz „g“ am Ende). Man muss allerdings im Modus „≈“ rechnen. Die Normalengleichung einer Ebene wird von Geogebra automatisch in eine Koordinatengleichung umgewandelt (vgl. Zeile 6). Durch Einblenden der Ebene in die Graphik kann man sich von der Richtigkeit der Rechnung überzeugen.

30. Schlechtwetterfront – eine Aufgabe zur Berechnung von Abständen

Die vordere Begrenzung einer 4,5 km dicken Schlechtwetterfront wird beschrieben durch die Ebene E: 2x + 2y + z = 6 (LE: 1 km).

a) Ein Flugzeug fliegt längs der Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ *. Weisen Sie nach, dass seine Flugbahn parallel zur Schlechtwetterfront liegt. Berechnen Sie den Abstand der Flugbahn zur Schlechtwetterfront.*

b) Ein Meteorologe befindet sich mit seinem Flugzeug im Punkt P(5/5/4). Er möchte zu Forschungszwecken die Schlechtwetterfront orthogonal durchfliegen. In welchem Punkt A tritt sein Flugzeug in die Schlechtwetterfront ein?

c) In welchem Punkt B verlässt das Flugzeug des Meteorologen die Schlechtwetterfront? Welche Ebene F beschreibt die hintere Begrenzung der Schlechtwetterfront?

d) Zeigen Sie, dass sich die Flugbahnen der beiden Flugzeuge nicht kreuzen. Ermitteln Sie den Abstand der beiden Flugbahnen.

Quelle: Bigalke/Köhler: Leistungskurs Mathematik MA-3, Cornelsen-Verlag, 2011, S. 189, Berlin 2011

Die folgende Abbildung zeigt die Geogebragraphik zur Aufgabe mit den beiden Flugbahnen sowie der vorderen und hinteren Begrenzungsebene der Front.

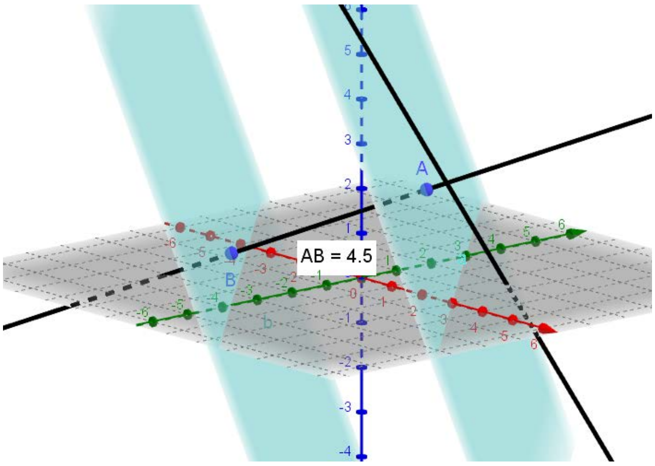


Abb. 45: Schlechtwetterfront mit Flugbahnen

Im Folgenden sind die Detailangaben zur Eingabe ins CAS-Fenster angeführt:

Zeile	Eingabe in das Geogebra-CAS-Fenster	Rückmeldung
1	Teilaufgabe a)	
2	vq:=(3,1,1)	➔ $vq := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
3	m1:=(1,-2,2)	➔ $m1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$
4	gf(r):=vq+r*m1	➔ $gf(r) := \begin{pmatrix} r+3 \\ -2r+1 \\ 2r+1 \end{pmatrix}$
5	nv:=(2,2,1)	➔ $nv := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
6	nv*m1	0
7	Löse(2(r+3)+2(-2r+1)+2r+1=6,r}	➔ { }
8	Flugzeug ist echtparallel zur Front	
9	n0:=Einheitsvektor(nv)	$n0 := \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$
10	(vq-(0,0,6))*n0	➔ 1
11	Abstand Flugbahn/Front: 1 km	
12	Teilaufgabe b)	
13	vp:=P	➔ $vp := \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

14	gm(s):=vp+s*nv	➔ $gm(s) := \begin{pmatrix} 2s+5 \\ 2s+5 \\ s+4 \end{pmatrix}$
15	Löse(2(2s+5)+2(2s+5)+s+4=6,s)	➔ {s=-2}
16	gm(-2)	➔ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
17	va:=A	➔ $va := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
18	va-4.5*n0	➔ $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$
19	Teilaufgabe c)	
20	vb:=B	$vb := \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$
21	((x,y,z)-vb)*nv=0	➔ b: 2x + 2y + z + $\frac{15}{2}$ =0
22	Teilaufgabe d)	
23	Löse(gf(r)=gm(s),{r,s})	➔ { }
24	m1⊗nv	➔ $\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$
25	n1:=Einheitsvektor((-6,3,6))	➔ $n1 := \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$
26	(vq-vb)*n1	➔ -2
27	Abstand Flugbahnen: 2 km	

31. Geradenscharen

Wenn man die Gleichung der Geradenschar $g_a:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\a\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix};\ a\in\mathbb{R}$ in Form von

gg(r,a):=(-2,a,0)+r*(-2,0,2) in das CAS-Fenster von Geogebra eingibt, wird im Graphikfenster eine Ebene dargestellt. Dies ist unmittelbar einsichtig, denn der Term der Geradenschar lässt sich in die Parameterform einer Ebenengleichung umschreiben: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}+a\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}$. Es ist diejenige Ebene, in der alle Geraden der Schar liegen (vgl. Abb. 46). Geraden zu ausgewählten Parameterwerten lassen sich durch Eingabe von z. B. g_1(r):=gg(r,1) definieren und zeichnen.

Stellt man in analoger Weise das Geradenbüschel $g_a:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}a\\a\\1\end{pmatrix}$ durch Eingabe von gg(r,a):=(-1,2,2)+r*(a,a,1) dar, so wird die Trägerebene gezeichnet, allerdings mit einer doppelkeilförmigen Unterbrechung (vgl. Abb. 47). Auch dies hat einen mathematischen Hintergrund, denn keine Gerade der Schar verläuft durch den Trägerpunkt P(-1/2/2) und parallel zur x,y-Ebene.

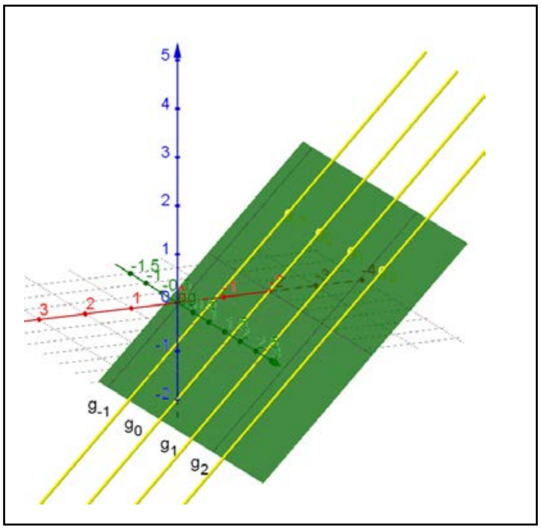


Abb. 46: Parallele Geraden

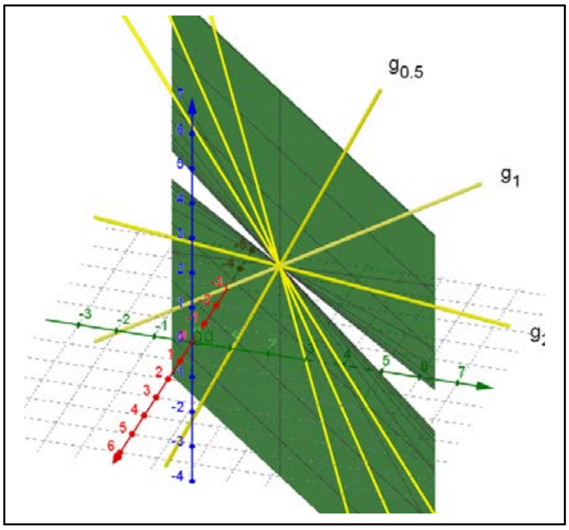


Abb. 47: Geradenbüschel

32. Abbildungsgeometrie und andere Projekte – ein Ausblick

Die folgenden Anregungen zum Arbeiten mit Geogebra gehen über den RLP hinaus und sind eher für projektartiges Arbeiten gedacht. Die beiden Graphiken (s. Abb. 48 und 49) wurden durch Mehrfachanwendung von Matrizenoperationen generiert. Auch hier handelt es sich um CAS-spezifische Anwendungen, denn händisch sind derart komplexe Operationen nicht mehr mit vertretbarem Aufwand durchführbar.

Bei dem links unten abgebildeten Ornament aus Kreiselementen wurden Kreise mehrfach mithilfe der Drehmatrix $\begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$ gedreht. Die rechte Abbildung zeigt eine Ellipse, die mithilfe der Matrix $\begin{pmatrix} u & 1-u \\ u-1 & u \end{pmatrix}$ mehrfachen Drehstreckungen unterzogen wurde.

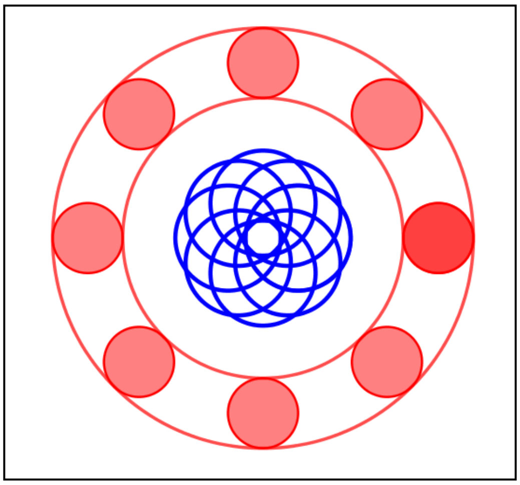


Abb.48: Ornament

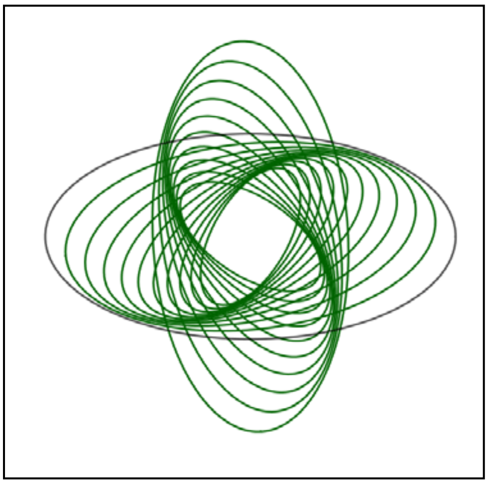


Abb. 49: Drehstreckung einer Ellipse

Hier ist eine endliche Schnittmenge zwischen Geogebrabildern und graphischen Design erkennbar. In eine ähnliche Richtung geht die Konstruktion „gotischer Kirchenfenster“ sowie die Bearbeitung von Problemstellungen aus der „japanischen Tempelgeometrie“ (sehr anspruchsvoll!) mithilfe von Geogebra.

33. Die wichtigsten CAS-Befehle in der analytischen Geometrie

a) Vektoren

1. Eingabe von Vektoren

Vektoren gibt man als Zeilenvektoren ein und benennt sie mit einem kleinen (!) Buchstaben (besser sind 2 Buchstaben!). Geogebra schreibt die Eingabe in einen Spaltenvektor um. Würde man einen großen Buchstaben als Bezeichnung verwenden, würde Geogebra dies als Koordinaten eines Punktes interpretieren.

Beispiel: Eingabe: va:=(1,2,3) → va:= $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

2. Betrag eines Vektors

Geogebraeingabe: Länge(<Vektor>). Beispiel: Länge((1,2,3)) → $\sqrt{14}$
Alternative: abs(<Vektor>). Beispiel: abs((1,2,3)) → $\sqrt{14}$

3. Einheitsvektor

ermittelt den Einheitsvektor gleicher Richtung zu einem gegebenen Vektor

Geogebraeingabe: Einheitsvektor((1,2,3)) → $\begin{pmatrix}1/\sqrt{14}\\2/\sqrt{14}\\3/\sqrt{14}\end{pmatrix}$

b) Rechenoperationen mit Vektoren

4. Summe von Vektoren

Beispiel: va:= $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$; vb:= $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$; va+vb→ $\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$

5. S-Multiplikation

Beispiel: va:= $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$, 2*va→ $\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$

6. Skalarprodukt

Skalarprodukt[<Vektor>, <Vektor>]
Berechnet das Skalarprodukt zweier Vektoren.

Beispiel: Skalarprodukt((1,3,2),(0,3,-2))→5
Einfacher: (1, 3, 2)*(0, 3, -2)→5

7. acosg((<Vektor>)*(Vektor) / (abs(<Vektor>)*abs(<Vektor>)))

Berechnet den Winkel zwischen 2 Vektoren in der Einheit Grad. Die Abkürzung „acosg" steht für Arcuscosinus in der Einheit Grad (deshalb der Zusatz „g" am Ende). Achtung! Im CAS-Fenster muss oben das Werkzeug "≈" aktiviert sein! In analoger Weise kann man den Arcussinus berechnen (Eingabe (asing(...)).

8. Kreuzprodukt[<Vektor u>, <Vektor v>]

Berechnet das Kreuzprodukt der Vektoren *u* und *v*.

Beispiel: Kreuzprodukt((1,3,2),(0,3,-2))→(-12,2,3)

Einfacher: (1, 3, 2) ⊗ (0, 3, -2)→(-12,2,3)

Anmerkung: Das Symbol für das Kreuzprodukt „⊗“ ist bei der Geogebra 6-Version etwas versteckt. In der Tastatureinblendung muss man oben in der Kopfleiste „ABC“ anklicken und danach links unten die Sonderzeichen „#&¬“ öffnen.

Senatsverwaltung
für Bildung, Jugend
und Familie

Berlin

Bernhard-Weiß-Str. 6
10178 Berlin
Telefon +49 (30) 90227-5050
www.berlin.de/sen/bjf
briefkasten@senbjf.berlin.de