Der Lernabschnitt „Satzgruppe des Pythagoras“ in einer 9. Klasse der Walter-Felsenstein-Oberschule (Gymnasium)

Darstellungsschwerpunkt:

Förderung der Selbsttätigkeit der Schüler beim Begründen und Beweisen

Schriftliche Prüfungsarbeit zur Zweiten Staatsprüfung
für das Amt der Studienrätin

Vorgelegt von
Studienreferendarin Uta Hövel
3. Schulpraktisches Seminar im Bezirk Hellersdorf (S)

Berlin, den 30. September 2002

Der folgende Text ist eine Kurzfassung meiner Staatsexamensarbeit. Sollten Sie Fragen, Anmerkungen oder Interesse an der ausführlichen Fassung haben, können Sie mit mir unter uhoevel@gmx.de in Kontakt treten.

1. Einleitung

Der Sinn mathematischer Bildung beschränkt sich nicht, wie Schüler oft meinen, auf die unmittelbare Anwendung konkreter mathematischer Inhalte und Rechentechniken, sondern ist in weit umfassenderen Qualifikationen zu sehen. Im Mathematikunterricht können Kreativität und Problemlösefähigkeit, gedankliche Disziplin und kritische Urteilsfähigkeit sowie die Befähigung zu rationaler Argumentation und zu selbstständiger Bewältigung geistiger Herausforderungen gefördert werden. Die Relevanz dieser Qualifikationen in unserer heutigen Welt wird kaum jemand in Frage stellen.

Ein Mathematikunterricht, der zur Erreichung solcher Ziele beitragen will, darf nicht allein algorithmische Fertigkeiten vermitteln, sondern sollte die Schüler in Problemlöseprozesse einbeziehen und mit offenen Fragestellungen konfrontieren. Nur so können diese lernen, selbstständig Lösungen zu finden, eigene Gedanken zu formulieren und kritisch zu reflektieren sowie sich konstruktiv miteinander auseinander zu setzen. Zu einer solchen Schulung des Denkens und der Argumentationsfähigkeiten eignen sich Begründungs- und Beweisaktivitäten in besonderer Weise.

Begründen und Beweisen gehören jedoch zu den schwierigsten und daher unbeliebtesten Tätigkeiten im Mathematikunterricht. Es stellt sich also die Frage, auf welche Weise einerseits die *Motivation*, andererseits die *Fähigkeiten* der Schüler zum Beweisen und Begründen gefördert werden können. Erfahrungsgemäß ist das passive Nachvollziehen von Beweisen wenig geeignet, denn „Beweisen wird nicht gelehrt, sondern gelernt, und zwar durch Selbsttätigkeit.“ ([Fre79], S. 197)

Für eine Umsetzung dieser Forderung nach selbsttätiger Beteiligung der Schüler an der Beweiserarbeitung finden sich in der fachdidaktischen Literatur zahlreiche methodische Vorschläge. Einige davon werde ich im Rahmen dieser Arbeit gezielt auf ihre Effektivität hin untersuchen. Der Schwerpunkt der Zielsetzung liegt dabei auf der Entwicklung von Beweis*verständnis* und der Fähigkeit zur Beweis*darstellung*, nicht aber auf dem Üben von Problemlösestrategien zur Beweis*findung*.

Der Lernabschnitt „Satzgruppe des Pythagoras“ scheint mir für derartige Beweisaktivitäten besonders geeignet zu sein, da eine Vielzahl von einfachen Beweisen der Sätze für Schüler anschaulich aufbereitet werden können.

2. Vorbetrachtungen: Begründen und Beweisen im Mathematikunterricht

Begriffsbestimmung

Es gibt keine eindeutigen Kriterien dafür, wann ein mathematischer Beweis als exakt und vollständig zu bezeichnen ist. In der Mathematikdidaktik wird vielmehr das gesamte Spektrum von den ersten Begründungsversuchen eines Kindes bis hin zum exakten Beweis im Sinne der Hochschulmathematik ausgeleuchtet. Die Begriffe „Beweis“ und „Begründung“ sind somit nicht scharf voneinander zu trennen.

Beweise können nach ihrer Argumentationsbasis (vgl. [FM85], S. 180f.), ihrem Formalisierungsgrad (vgl. [Hol88], S. 56ff.) sowie ihrer Exaktheit und Ausführlichkeit differenziert werden. Welche Ausprägung dieser Dimensionen für den Unterricht jeweils sinnvoll ist, ist eine wichtige didaktische Entscheidung des Lehrers. Vorrangig sollten sich Beweise im Unterricht an der inhaltlichen Interpretation der Mathematik und nicht an ihrer formalen Struktur orientieren. Der Exaktheitsgrad ist stets der Situation anzupassen; größere Ausführlichkeit ist nicht notwendig förderlich für die Verständlichkeit.

Zielsetzungen des Beweisens im Unterricht

Beweisen im Mathematikunterricht fördert:

- Verständnis mathematischer Aussagen, Begriffe und Strukturen;
- Problemlösefähigkeit, schöpferische Phantasie und Kreativität;
- gedankliche Strenge, Begründungshaltung und Fähigkeit zum logischen Schließen;
- Fähigkeit zum präzisen Gebrauch mathematischer Fachsprache und zum Formalisieren, zur exakten Darstellung und Begründung eigener Gedanken;
- rationale Argumentations- und Kommunikationsfähigkeit, auch außerhalb der Mathematik;
- Zielstrebigkeit, Ausdauer und Bereitschaft zu selbstständiger, sorgfältiger, selbstkritischer Arbeit;
- Selbstbewusstsein und Selbstvertrauen.

Probleme des Beweisens im Unterricht

Trotz der Relevanz der genannten Lernziele werden Beweise und Begründungen im gegenwärtigen Mathematikunterricht stark vernachlässigt. Zeitsparende Methoden wie Erarbeitung im fragend-entwickelnden Unterrichtsgespräch oder Lehrervortrag fordern kaum eigenständige Aktivitäten der Schüler. Diese sind daher unmotiviert, zumal die Beweise im weiteren Unterrichtsverlauf oder in Leistungsüberprüfungen oft keine Rolle mehr spielen.

Das Lehren des Beweisens unter Beteiligung der Schüler dagegen ist eine methodisch sehr anspruchsvolle Aufgabe, da die Schüler zahlreiche Schwierigkeiten zu überwinden haben:

- fehlende Motivation und ablehnende Haltung (einerseits wegen Misserfolgserlebnissen, andererseits wegen fehlender Einsicht in die Beweisnotwendigkeit);
- Unverständnis oder Unkenntnis der grundsätzlichen Struktur von Beweisen (Schrittfolge von der Voraussetzung zur Behauptung mit Begründung aller Einzelschritte);
- Problematik der Ideenfindung (wegen mangelnder Gewöhnung an selbstständiges, kreatives Denken und wegen geringer Verfügbarkeit und Flexibilität des mathematischen Wissens);
- Unbeholfenheit bei der sprachlichen und formalen Darstellung von Beweisen (wegen unzureichender Beherrschung der mathematischen Fachsprache).

Methodische Vorschläge zur Entwicklung von Beweisfähigkeiten

Sollen Motivation und Fähigkeiten der Schüler im Beweisen gesteigert werden, ergeben sich als Konsequenz aus den o.g. Problemen sofort einige **grundsätzliche Forderungen an den Mathematikunterricht**:

- Erhöhung des Anteils von Denkaufgaben und offenen Fragestellungen, dafür Reduzierung reiner Rechentätigkeit;
- Festigung des mathematischen Basiswissens und Verbesserung der sprachlichen Ausdrucksfähigkeit der Schüler;
- kontinuierliche Integration von Begründungs- und Beweisaktivitäten in den Unterricht, dabei Gestaltung von Beweisphasen als Kommunikationsprozess (vgl. [Gol92], S. 44);
- Berücksichtigung von Begründungs- und Problemlösefähigkeiten der Schüler bei der Notengebung (zur Problematik dieser Forderung vgl. [Wal72], S. 76ff.).

Die **Motivation** der Schüler beim Beweisen kann insbesondere gesteigert werden durch:

- kognitive Antriebe („Diskrepanzerlebnisse“, vgl. [Zec98], S. 189);
- Verdeutlichung der Beweisnotwendigkeit;
- Thematisierung der allgemeinbildenden Funktion des Beweisens;
- individuell angemessenen Schwierigkeitsgrad der Beweisaufgaben;
- positive Erwartungshaltung des Lehrers und entspannte Atmosphäre;
- Selbsttätigkeit der Schüler.

Zur Förderung der **Beweisfähigkeiten** finden sich in der didaktischen Literatur zahlreiche methodische Vorschläge (vgl. [FM85], [Hes02], [Wal72], [Wal92] und [Bür79]:

- <u>Vorübungen zum Beweisen</u>:
  - Unterscheidung von Sätzen und Definitionen;
  - Übungen zu logischen Strukturen und Schlussweisen (z.B. Umkehrung von Sätzen; Negation von Aussagen; Formulierung von Sätzen in Wenn-dann-Form);
  - Thematisierung des prinzipiellen Aufbaus mathematischer Beweise;
  - Begründung von Einzelschritten beim Lösen von Aufgaben;
  - Zusammenfassende Darstellung von Aufgabenlösungen.

- <u>Arbeit an vorliegenden Beweisen</u>:
  - Wiedergabe von Beweisen (evtl. mit variierter Skizze oder Bezeichnung);
  - Fertigstellung von Beweisen (z.B. Lückenbeweise; Begründung einzelner Beweisschritte; Beweispuzzle);
  - Analyse von Beweisen (z.B. Erläuterung der Beweisstruktur);
  - Kritische Betrachtung von Beweisen (z.B. Präzisierung; Fehlerbehebung; Beweisvergleich);
  - Ausformulierung von Beweisen (z.B. schriftliche Darstellung einer Beweisherleitung oder einer vorgegebenen Beweisidee).

- <u>Finden und Erarbeiten von Beweisen:</u>
  - Verallgemeinerung von Beweisen;
  - Beweisführung nach bekanntem Muster;
  - Gelenkte Beweisführung (z.B. durch Aufgabensequenz);
  - Anwendung von Beweisstrategien (vgl. [Wal72], S. 155f.);
  - Visualisierung am Computer (z.B. durch dynamische Geometrie-Software (DGS)).

3. Planung der Unterrichtsreihe

Nach Berliner Rahmenplan sind im Lernabschnitt „Satzgruppe des Pythagoras“ die drei Sätze (Satz des Pythagoras, Kathetensatz, Höhensatz des Euklid) sowie die Umkehrung des Pythagorassatzes zu behandeln. Zu den Lerninhalten gehören auch Beweise dieser vier Sätze.

Auswahl geeigneter Beweise für den Unterricht

Die wichtigsten der zahlreichen Beweise – allein vom Satz des Pythagoras sind heute etwa 400 bekannt! – lassen sich nach der Art der herangezogenen Hilfsmittel in **Beweistypen** untergliedern (vgl. [Fra90], S. 8ff., aber auch [Lie65], [Bap98]):

- Zerlegungsbeweise (Additionsbeweise) nutzen das Prinzip der Zerlegungsgleichheit aus;
- Ergänzungsbeweise (Subtraktionsbeweise) stützen sich auf ergänzungsgleiche Figuren;
- arithmetische Beweise basieren auf algebraischen Rechnungen anhand geometrischer Figuren;
- abbildungsgeometrische Beweise nutzen Kongruenzabbildungen und Scherungen aus;
- Ähnlichkeitsbeweise stützen sich auf ähnliche (rechtwinklige) Dreiecke.

Bei der Auswahl geeigneter Beweise für den Unterricht spielen folgende **Kriterien** eine Rolle:

1) Mathematischer Gehalt: Der Beweis sollte verständnisfördernd für den Inhalt des Satzes sein. Sinnvoll sind auch Beweise, die bereits bekannte Lerninhalte neuerlich aufgreifen und damit das Wissen der Schüler vernetzen und strukturieren.
2) Relevanz der Beweisidee: Wichtige Beweisgedanken sollten verallgemeinerungsfähig und auf andere Sätze übertragbar sein; der Beweis sollte repräsentative Beweisideen beinhalten sowie typische Schlussweisen und spezifische heuristische Strategien anwenden.
3) Schwierigkeitsgrad: Gefordert ist ein „Minimum an verwendeten Voraussetzungen“ sowie ein „Maximum an Einfachheit in der mathematischen Sache“ (vgl. [TKW82], S. 76), d.h. alters- und lerngruppengerechte Argumentationsbasis und angemessene Komplexität.
4) Eignung des Beweises für Formen der Selbsttätigkeit: Der Beweis sollte einen handlungsorientierten, induktiven oder experimentellen Zugang ermöglichen.

Anhand dieser Kriterien entschied ich mich für den altindischen Ergänzungsbeweis, zwei einfache arithmetische Beweise und die Zerlegung „Stuhl der Braut“ als Beweise des Pythagorassatzes. Katheten- und Höhensatz sollten anschließend durch Ähnlichkeitsargumente bewiesen werden.

Didaktisch-methodische Entscheidungen

Auf Grund der geringen Beweiserfahrungen der Schüler schienen mir vorwiegend Methoden zur „Arbeit an vorliegenden Beweisen“ als geeignet, weil hier die Beweisideen und Beweistexte schon vorgegeben werden. Konkret plante ich folgendes **methodisches Vorgehen**:

- Altindischer Ergänzungsbeweis (*eine Unterrichtsstunde*):
  - Veranschaulichung der Beweisidee durch ein farbiges Puzzle (Unterrichtsgespräch);
  - Erarbeitung der Beweisschritte durch eine Aufgabensequenz (Einzelarbeit/Partnerarbeit);
  - Auswertung der Ergebnisse (Unterrichtsgespräch);
  - Ausformulierung des Beweises (Hausaufgabe).
- Arithmetische Beweise (*zwei Unterrichtsstunden*):
  - Vorgabe der Beweisideen durch farbige Zeichnungen;
  - Erarbeitung der Beweisschritte durch Lückenbeweise (Einzelarbeit/Partnerarbeit);
  - Darstellung der Beweise mit eigenen Worten (Hausaufgabe);
  - Präsentation der Beweise durch Schüler (Schülervortrag mit Unterrichtsgespräch);
  - Auswertung: Beweisanalyse, Beweisvergleich (Unterrichtsgespräch).
- Zerlegungsbeweis „Stuhl der Braut“ (*anderthalb Unterrichtsstunden*):
  - Vorgabe der Beweisidee und Visualisierung mittels DGS;
  - Erarbeitung der Beweisschritte mittels DGS und Beweisaufgaben (Partnerarbeit);
  - Auswertung: Erläuterung der Beweisidee, Beweisanalyse (Unterrichtsgespräch).

- <u>Beweis der Umkehrung des Satzes des Pythagoras</u> (*eine Unterrichtsstunde*):
  - Beweispuzzle (schwierigere Variante: mit Fehlstellen) (Einzelarbeit);
  - Herausarbeitung der Beweisidee (Unterrichtsgespräch);
  - Darstellung des Beweises mit eigenen Worten (Hausaufgabe).
- <u>Ähnlichkeitsbeweise von Kathetensatz und Höhensatz</u> (*je eine halbe Unterrichtsstunde*):
  - Beweispuzzle (Variante: mit überzähligen Teilen) (Einzelarbeit);
  - Ausformulierung des Beweises für die andere Kathete (Hausaufgabe);
  - Herausarbeitung der Beweisidee (Unterrichtsgespräch).

Dabei lässt sich die geplante **Progression** wie folgt charakterisieren: Die Beweisideen werden anfangs auf der enaktiven und der ikonischen, später auf der symbolischen Darstellungsebene vorgegeben. Die Anforderungen bei der Beweisdarstellung hinsichtlich Exaktheit und Vollständigkeit werden von umgangssprachlicher über fachsprachliche Formulierung bis hin zu einer formalen Darstellung in Tabellenform gesteigert.

Als **binnendifferenzierende Maßnahmen** werden Lückenbeweise und Beweispuzzles stets in zwei Schwierigkeitsniveaus angeboten, wobei die Schüler selbst auswählen dürfen. In einigen Phasen können die Schüler zwischen Einzel- und Partnerarbeit wählen, um sich individuell möglichst günstige Voraussetzungen für eine erfolgreiche Aufgabenbearbeitung zu schaffen.

4. Die Unterrichtsreihe: Beobachtungen, Analyse und Alternativen

Altindischer Ergänzungsbeweis

<u>Beobachtungen</u>:

In dieser ersten Stunde der Unterrichtsreihe fielen vor allem die stark unterschiedlich ausgeprägten Fähigkeiten der Schüler beim Beweisen auf: Während einige Schüler die Aufgaben selbstbewusst und selbstständig bearbeiteten, waren andere vollkommen hilflos.

Die größten Schwierigkeiten bereitete die Einsicht in die Beweisnotwendigkeit (nachdem der enaktive Zugang über ein Puzzle die Beweisidee gut verdeutlichen konnte) sowie der Schritt von der Aufgabensequenz zu einer folgerichtigen Beweisdarstellung.

<u>Analyse und Alternativen</u>:

Die eingeplanten Hilfestellungen waren für das Ausgangsniveau der meisten Schüler noch zu gering. Eine längere lehrerzentrierte Einführung (mit Erläuterung der Beweisnotwendigkeit und des grundsätzlichen Aufbaus eines Beweises) wäre sinnvoll gewesen, um eine gemeinsame Basis für die folgenden Stunden zu schaffen und grundsätzliche Probleme von vornherein auszuräumen. Außerdem hätten die notwendigen geometrischen Grundkenntnisse vor der Beweiserarbeitung reaktiviert werden müssen.

Für die Phase der Selbsttätigkeit hätte sich statt einer Aufgabensequenz eher ein Lückenbeweis empfohlen, da hier der Beweisgang den Schülern schon vorgegeben gewesen wäre.

Arithmetische Beweise

<u>Beobachtungen</u>:

Die Methode der Lückentexte motivierte die Schüler, so dass sie sehr engagiert arbeiteten. Zahlreiche Schüler wählten freiwillig die schwierigere Variante des Textes; fast alle hatten zum Ende der Stunde ihren Lückentext weitgehend richtig ausgefüllt.

Mit der Darstellung des Beweises in eigenen Worten (Hausaufgabe) dagegen waren einige Schüler überfordert – sie hatten den Text fast wörtlich abgeschrieben. Nur bei wenigen Schülern ließen die Aufzeichnungen auf gutes Beweisverständnis schließen.

Daher verlief die Präsentation der Beweise in der nachfolgenden Stunde zunächst schleppend, bis ich gezielt leistungsstärkere Schüler zum Vortrag aufforderte. Das bewirkte eine Wende im Gesprächsverlauf, da nun alle Schüler ein stärkeres Interesse zeigten, Fragen stellten, einander auf Fehler hinwiesen und sich gegenseitig ergänzten. Es ergab sich eine intensive und fruchtbare Diskussion, aus der ich mich weitgehend heraushalten konnte.

Analyse und Alternativen:

Lückenbeweise sind zur selbsttätigen Erarbeitung sehr geeignet, da die Schüler Erfolgserlebnisse haben, Beweisdetails durchdenken und verstehen und dabei geometrische Grundlagen wiederholen.

Die Konzentration auf Beweisdetails ist jedoch andererseits ein Nachteil der Methode, weil sie den Blick auf das Ganze verstellen. Daher leisten Lückenbeweise nur einen geringen Beitrag zum Verständnis der Beweisidee. Ebenso wenig befähigt Detailverständnis zu mündlicher oder schriftlicher Beweiswiedergabe.

Die Beweispräsentation unter Leitung von (leistungsstarken) Schülern bewirkt Interaktion zwischen den Schülern: Ideen, Zweifel, Fragen und „unfertige Gedanken“ werden offener als in lehrerzentrierten Phasen geäußert, die meisten Schüler zeigen sich kommunikationsbereit und kritisch.

Beweis „Stuhl der Braut“

Hier bot sich der Einsatz einer dynamischen Geometrie-Software an, weil die für den Beweis entscheidende Drehung zweier Dreiecke von den Katheten- in das Hypotenusenquadrat gut im Zugmodus zu veranschaulichen ist. Mangels entsprechender Software an meiner Schule nutzte ich ein frei im Internet zugängliches DGS-Arbeitsblatt (www.mathe-werkstatt.de/download/pythagoras/, vgl. [Els02]).

Beobachtungen:

Die meisten Schüler waren durch das neue Medium außerordentlich motiviert, jedoch wich bei einigen die anfängliche Begeisterung bald der Ernüchterung, dass auch am Computer „richtig“ gearbeitet werden sollte.

Im Auswertungsgespräch in der nächsten Stunde stellte sich heraus, dass viele Schüler Beweisdetails erläutern konnten und die Beweisidee verstanden hatten. Wieweit allerdings die dynamischen Bilder zum Verständnis beigetragen hatten, war nicht klar zu erkennen. Viele Schüler hatten zusätzlich Zeichnungen auf Papier angefertigt und miteinander diskutiert.

Analyse und Alternativen:

Meine Beobachtungen und eine Befragung der Schüler zeigten, dass der Verstehensprozess mehr durch das Arbeitsblatt, Aufzeichnungen und Schülerdiskussionen gefördert wurde als durch die DGS. Das bestätigt die in der Literatur angeführten Bedenken: Experimentelle Arbeitsweise und große Anschaulichkeit können die Frage nach dem „Warum“ in den Hintergrund drängen und die Schüler vom vertieften Nachdenken abhalten, da sie alles verstanden zu haben glauben (vgl. [Els97], [Els02+]).

Sinnvoller scheint mir daher ein Einsatz von DGS und ähnliche Medien in Phasen der Ideenfindung und -veranschaulichung, während die anschließende mathematische Vertiefung und Exaktifizierung möglicherweise ohne Visualisierung effektiver verläuft.

Beweis der Umkehrung des Pythagorassatzes; Beweis von Katheten- und Höhensatz

Beobachtungen:

Die Methode des Beweispuzzles aktivierte die Schüler, wenn auch einige Schüler zunächst fehlerhafte Lösungen vorlegten. Schwierigkeiten bereitete vor allem die Anforderung, dass bei jeder neuen Beweiszeile nur bekannte Tatsachen ausgenutzt werden dürfen. Die tabellarische Darstellung mit den Spalten „Es gilt“ und „wegen/weil“ stellte kein Problem dar, sondern verdeutlichte den Schülern die grundsätzliche Struktur eines Beweises.

Die Beweisformulierung in eigenen Worten (Hausaufgabe) zeigte dann jedoch, dass vielen Schülern die Beweisidee trotz Verständnis der Einzelschritte noch nicht klar war. Deswegen war ein auswertendes Unterrichtsgespräch von besonderer Wichtigkeit.

Analyse und Alternativen:

Da die Schüler bei Beweispuzzles nicht mit den Schwierigkeiten der Ideenfindung oder der formalen Darstellung konfrontiert werden, stellen sich schnell Erfolgserlebnisse ein. Allerdings können auch nichtmathematische Überlegungen herangezogen werden, um die richtige Reihenfolge der Teile zu erschließen. Daher muss bei der Erstellung eines Beweispuzzles besonderes Augenmerk auf den Schwierigkeitsgrad gerichtet werden. Zur Differenzierung bieten sich Fehlstellen oder überzählige Teile an.

Zum Verständnis der Beweisidee liefern Beweispuzzles allerdings kaum einen Beitrag. Möglicherweise ist es daher günstiger, diese Methode nur bei vorher erarbeiteten und besprochenen Beweisen einzusetzen.

Beweise in Lernerfolgskontrollen

Kreative Leistungen zu bewerten, die innerhalb eines zeitlich begrenzten Rahmens zu erbringen sind, ist grundsätzlich problematisch. Zudem ist ein objektives und differenziertes Urteil hierbei schwerer zu fällen als bei der Bewertung von Rechenfertigkeiten (vgl. [Wal72], S. 76ff.). Dennoch sollten die Leistungen der Schüler beim Begründen und Beweisen wegen ihrer grundsätzlichen Relevanz und speziell wegen des Schwerpunkts der Unterrichtsreihe in der Lernerfolgskontrolle und der Klassenarbeit zur Bewertung herangezogen werden.

Zur Messung von Beweisverständnis gibt es in der Literatur zahlreiche Vorschläge (vgl. [Pra79], [Sch81], S. 36, [TKW82], S. 78, [Cla89], S. 141f.). In meiner Klasse hielt ich folgende Aufgaben für angemessen:

- Erläuterung der Beweisidee eines (selbst gewählten) Beweises des Pythagorassatzes;
- Begründungen einzelner Teilschritte der Beweise;
- Skizzieren der Beweisfigur zu „Stuhl der Braut“ für den gleichschenkligen Spezialfall;
- Lückenbeweis des Höhensatzes (arithmetische Herleitung).

Die Schüler konnten diese Aufgaben so erfolgreich bearbeiten, dass der Notenspiegel nicht schlechter als bei „normalen“ Lernerfolgskontrollen ausfiel.

5. Kritische Auswertung

Meinungsbild und Selbsteinschätzung der Schüler

Die Schüler bewerteten die Beweisaktivitäten mehrheitlich als sinnvoll, weil sie durch die intensiven Übungen einen Zugang zu Beweisen und Begründungen finden konnten. Der Unterricht wurde als „interessant“, „gut gestaltet“ und „abwechslungsreich“ empfunden, die angewendeten Methoden als nützlich eingeschätzt (v.a. Beweispuzzles und Lückenbeweise, aber auch grundsätzlich die Form der selbstständigen Erarbeitung in Partnerarbeit). Nur wenige Schüler hätten größere Hilfestellung durch den Lehrer gewünscht.

Die subjektive Einschätzung des eigenen Lernzuwachses fiel ebenso positiv aus. Viele Schüler gaben an, dass sie Beweise nun besser verstehen als früher, dass sie wissen, wie ein Beweis aufgebaut ist und dass sie die Beweisgedanken verstanden haben. Dagegen schätzten die meisten Schüler ihre Fähigkeit, selbstständig Beweise und Begründungen zu finden und diese mündlich oder schriftlich zu formulieren, weiterhin als gering ein.

Im affektiven Bereich sind aus Schülersicht vor allem Ausdauer, Durchhaltevermögen und Selbstvertrauen gewachsen. Für die außerordentliche Schwierigkeit des Beweisens spricht jedoch die Tatsache, dass 60% der Schüler nach wie vor Angst davor haben, Beweise nicht zu verstehen oder unbemerkt Fehler in der Beweisführung zu machen.

Lernerfolg und Effektivität der gewählten Methoden aus Sicht des Lehrers

In allen Beweisphasen der Unterrichtsreihe zeigten sich die **Vorteile selbsttätiger Erarbeitung**:

- aktive Einbindung der Schüler in den Lern- und Verständnisprozess, hohe Motivation;
- veränderte Lehrerrolle: der Lehrer als helfender Ansprechpartner kann individuelle, differenzierte Zuwendung und Hilfestellungen leisten;
- realistischere Selbsteinschätzung der Schüler, da ihnen das eigene Tun Verständnislücken besser vor Augen führt.

Wichtige **Verhaltensänderungen** und **Zuwachs an kognitiven Fähigkeiten** lassen sich wie folgt zusammenfassen. Die Schüler ...

- ... wurden vertrauter mit Aufbau und formaler Darstellung von Beweisen, sie verbesserten ihr logisches Denkvermögen;
- ... wendeten ihre geometrischen Kenntnisse immer sicherer bei Begründungen an und erweiterten damit ihre Argumentationsbasis;
- ... verbesserten ihre argumentativen Fähigkeiten und erkannten die Notwendigkeit exakter sprachlicher Formulierungen, sie wurden kritischer gegenüber eigenen und fremden Argumentationen;
- ... zeigten zunehmend Mut, eigene Ideen zu äußern und dabei auch Fehler und Irrtümer zuzulassen;
- ... entwickelten mehr Selbstständigkeit sowie Ausdauer bei der Bearbeitung von Aufgaben.

Weniger Lernerfolg gab es dagegen in folgenden Bereichen:

- Einsicht in die Beweisnotwendigkeit;
- Strukturierung und Analyse komplexerer Beweise;
- schriftliche Beweisdarstellung und mündliche Erläuterungen unter korrektem Gebrauch der Fachsprache;
- Problemlösefähigkeiten (dies jedoch war auch nicht der Schwerpunkt der Unterrichtsreihe).

Für den Lernerfolg spielten die **ausgewählten Beweise und Methoden** eine wesentliche Rolle:

- Alle ausgewählten Beweise erwiesen sich als prinzipiell geeignet für den Unterricht.

- Medien (farbige Plakate, Puzzles, DGS) erleichterten den Zugang zu den Beweisen.
- Zusammenarbeit in Paaren und Kleingruppen sowie binnendifferenzierende Maßnahmen waren dem Lernfortschritt förderlich.
- Die eingesetzten Methoden zur Arbeit an Beweisen sind im Hinblick auf bestimmte Lernziele unterschiedlich zu bewerten:
  - Lückenbeweise, Beweispuzzles und Aufgabensequenzen sind grundsätzlich hilfreich, um einzelne Beweisschritte zu verstehen und den Aufbau von Beweisen kennen zu lernen. Beweisidee und -struktur werden durch diese Methoden weniger deutlich.
  - DGS wirkt sehr motivierend und dient der Veranschaulichung von Beweisideen, ist aber weniger zur Erarbeitung von Beweisdetails und für eine exakte mathematische Fundierung geeignet.
  - In Diskussionsphasen, beispielsweise nach der Präsentation von Beweisen durch Schüler, kann Verständnis sowohl der Beweisidee als auch von Beweisdetails erlangt werden.
  - Die Darstellung von bereits erarbeiteten Beweisen in eigenen Worten, Beweisanalyse und Beweisvergleich sind schwierige, aber lohnende Methoden, da sie das Beweisverständnis fördern.
  - Für den problemlösenden Aspekt des Beweisens (Beweisfindung) sind die angewendeten Methoden weniger geeignet.
- Nach allen Phasen der Selbsttätigkeit ist ein auswertendes Unterrichtsgespräch notwendig, in dem die Beweisidee nochmals herausgearbeitet, Verständnislücken aufgearbeitet und vertiefende Betrachtungen angestellt werden.

Trotz des ausgewiesenen Lernerfolgs sind mir einige mit der Selbsttätigkeit verbundene **Probleme** bewusst:

- Der Zeitaufwand für die Erarbeitung ist sehr groß.
- Leistungsschwächere Schüler sind schnell überfordert; binnendiffererenzierende Hilfestellungen müssen daher in großem Umfang vorbereitet sein.
- Der Leistungszuwachs ist in Lernerfolgskontrollen nur schwer zu messen und zu bewerten (problematisch sind v.a. Validität und Objektivität der Bewertung).
- Es ist kaum möglich, jedem Schüler stets die Möglichkeit zur Kontrolle seiner individuellen Lösungen zu geben.

Fazit und Ausblick auf zukünftigen Unterricht

Die geplante Unterrichtsreihe ließ sich in der angesetzten Zeit im Wesentlichen umsetzen. Die Selbsttätigkeit bewirkte eine Motivationssteigerung und einen dem zeitlichen Umfang der Reihe angemessenen Lernerfolg im Bereich des Beweisverständnisses, der Fähigkeiten zum Begründen, der formalen Darstellung von Beweisen und der argumentativen Fähigkeiten.

Derartige Beweisübungen werden in meinem zukünftigen Unterricht weiter ihren Platz finden. Dabei bedürfen die Methoden der Verfeinerung und einer besseren Anpassung an das konkrete Leistungsniveau der Klasse. Daneben werde ich häufiger Begründungsaktivitäten im Rahmen herkömmlicher Aufgabenstellungen in meinen Unterricht einbeziehen. Zusätzlich muss durch geeignete Aktivitäten die Problemlösefähigkeit weiterentwickelt werden. Außerdem ist auf die Förderung des mündlichen und schriftlichen Ausdrucksvermögens der Schüler verstärkt Wert zu legen, weil fachsprachliche Ausdrucksfähigkeit und mathematisches Verständnis eng miteinander verbunden sind.

Das Ziel aller dieser Maßnahmen besteht in der Steigerung der mathematischen Fähigkeiten der Schüler, der Entwicklung einer Begründungshaltung, der Ermutigung zu selbstständigem Denken, der Befähigung zu rationaler Argumentation und Kommunikation sowie zu kritischer Entscheidungs- und Urteilsfindung.

Auszug aus dem Literaturverzeichnis

[Bap98] BAPTIST, Peter: *Pythagoras und kein Ende?* Leipzig/Stuttgart/Düsseldorf 1998.

[Bür79] BÜRGER, Heinrich: *Beweisen im Mathematikunterricht – Möglichkeiten der Gestaltung in der Sekundarstufe I und II*. In: [DF79], S. 103 – 134.

[Cla89] CLAUS, Heinz Jörg: *Einführung in die Didaktik der Mathematik*. Darmstadt 1989.

[DF79] DÖRFLER, W., FISCHER, R. (ed.): *Beweisen im Mathematikunterricht. Vorträge des 2. Internationalen Symposiums für „Didaktik der Mathematik" von 26.9. bis 29.9. 1978 in Klagenfurt*. Wien/ Stuttgart 1979.

[Els97] ELSCHENBROICH, Hans-Jürgen: *Dynamische Geometrieprogramme: Tod des Beweisens oder Entwicklung einer neuen Beweiskultur?* In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 1997/8, S. 494 – 496.

[Els02] ELSCHENBROICH, Hans-Jürgen: *Der Satz des Pythagoras mit Schere und Computer. Mathe-Welt*. In: Mathematik lehren 109/2001, S. 23 – 38.

[Els02+] ELSCHENBROICH, Hans-Jürgen: *Visuell-dynamisches Beweisen*. In: Mathematik lehren 110/2001, S. 56 – 59.

[FM85] FISCHER, Roland, MALLE, Günther: *Mensch und Mathematik*. Mannheim/Wien/Zürich 1985.

[Fra90] FRAEDRICH, Anna Maria: *Die Satzgruppe des Pythagoras*. Stuttgart 1990.

[Fre79] FREUDENTHAL, Hans: *Konstruieren, Reflektieren, Beweisen in phänomenologischer Sicht*. In: [DF79], S. 183 – 200.

[Gol92] GOLDBERG, Elke: *Beweisen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. Ergebnisse – Schwierigkeiten – Möglichkeiten*. In: Der Mathematikunterricht 1992/6, S. 33 – 45.

[Hes02] HESKE, Henning: *Methodische Überlegungen zum Umgang mit Beweisen*. In: Mathematik lehren 110/2002, S. 52 – 54.

[Hol88] HOLLAND, Gerhard: *Geometrie in der Sekundarstufe*. Mannheim/ Wien/Zürich 1988.

[Lie65] LIETZMANN, W.: *Der Pythagoreische Lehrsatz*. Leipzig 1965.

[Pra79] PRACHT, Egon: *Beweisverständnis und dessen Überprüfbarkeit*. In: [DF79], S. 349 – 356.

[Sch81] SCHMIDT, Günter (ed.): *Methoden des Mathematikunterrichts in Stichwörtern und Beispielen 7/8*. Braunschweig 1981.

[TKW82] TIETZE, Uwe-Peter, KLIKA, Manfred, WOLPERS, Hans: *Didaktik des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II*. Braunschweig/Wiesbaden, 1982.

[Wal72] WALSCH, Werner: *Zum Beweisen im Mathematikunterricht*. Berlin 1972.

[Wal92] WALSCH, Werner: *Beweisen im Mathematikunterricht – logische, psychologische und didaktische Aspekte*. In: Der Mathematikunterricht 1992/6, S. 23 – 32.

[Zec98] ZECH, Friedrich: *Grundkurs Mathematikdidaktik*. Weinheim/Basel 1998[9].