Schmidt, Stefan
Studienreferendar
1. SPS Wedding

Berlin, den 05.10.1999

<u>Entwurf für eine Unterrichtsstunde im Fach Mathematik</u>

Ort:	Diesterweg-OG, Raum 111
Lerngruppe:	Grundkurs ma-1
Zeit:	05.10.1999, 3. Stunde, 09.50 - 10.35 Uhr

1. Lernabschnitt: **Integralrechnung**

2. Stundenthema: **Unterscheidung zwischen bestimmtem Integral und Flächeninhalt**

2.1 Einordnung der Stunde in den Planungszusammenhang

Dies ist die 16. Unterrichtsstunde dieses 25 Stunden umfassenden Lernabschnitts. Oberstes Ziel während des gesamten bisherigen Unterrichts war die Bestimmung des Flächeninhalts von Flächen unterhalb einer Randfunktion mit nichtnegativen Funktionswerten. Zur Lösung dieses Problems haben die Schüler sich mit Ober- und Untersummen beschäftigt, sich mit Flächeninhaltsfunktionen und Stammfunktionen auseinandergesetzt, den Hauptsatz für Flächeninhaltsfunktionen kennen gelernt und in den gestrigen zwei Stunden eine Zusammenführung der Problematik mit der Definition des bestimmten Integrals erlebt.

Nun soll die Verwendung von bestimmten Integralen zur Bestimmung von Flächeninhalten verwendet werden und insbesondere der Unterschied des bestimmten Integrals zur Maßzahl des Flächeninhalts der von der Randfunktion begrenzten Fläche verdeutlicht werden.

Nach der Klärung dessen sollen noch vielfältige Berechnungsübungen erfolgen und Eigenschaften des bestimmten Integrals (Linearität, Additivität) untersucht werden. Um den Blick der Schüler ein wenig zu weiten, habe ich mir vorgenommen, am Ende des Abschnitts eine Anwendung des Integrals einzubinden, die die Vielfältigkeit der Verwendung von Integralen erahnen lässt (z. B. die Berechnung einer physikalischen Arbeit oder des Volumens eines Körpers).

3. Unterrichtsvoraussetzungen

3.1 Die Lerngruppe

...

3.2 Vorkenntnisse

In den letzten zwei Stunden wurde der Begriff des bestimmten Integrals als Differenz von Stammfunktionswerten eingeführt. Anschließend wurden Integrale mit "einfachen" Funktionen berechnet und auf die richtige Verwendung der neu eingeführten Schreib- und Sprechweisen bezüglich des Integral geachtet. Dabei war der Integrand auf dem betrachteten Intervall stets nichtnegativ und es wurde betont, dass das so berechnete Integral gerade als die Maßzahl der Fläche unterhalb der betrachteten Funktion auf dem Intervall und oberhalb der x-Achse interpretiert werden kann. Als Randfunktionen wurden ganzrationale Funktionen verwendet, für die die notwendigen Integrationsregeln bereits in vorangegangenen Stunden zusammengestellt wurden.

4. Unterrichtsziele

<u>Grobziel</u>: Die Schüler kennen den Unterschied und Zusammenhang zwischen dem bestimmten Integral und der Maßzahl des Flächeninhalt und können dies zur Berechnung von Flächeninhalten anwenden.

Feinziele:

FZ 1: Die Schüler erkennen, dass bei Funktionen mit negativen Funktionswerten das Integral nicht mehr den Flächeninhalt beschreibt.

Indikator: Die Schüler stellen dies bei der Auswertung der Hausaufgaben zu heute fest und stellen eine Vermutung über eine neue Interpretation auf.

FZ 2: Die Schüler sind in der Lage, dem Gedankengang für die Herleitung dieser neuen Interpretation des Integrals zu folgen und ihn zu reproduzieren.

Indikator: Die Schüler bringen ihr bisheriges Wissen bei der Erarbeitung ein und fassen den Gedankengang zusammen.

FZ 3: Die Schüler können die beiden (gegebenen) Deduktionen aus dem Ergebnis der Überlegungen begründen.

Indikator: Sie leiten die dargestellten Sonderfälle aus dem allgemeineren Ergebnis mündlich ab.

FZ 4: Die Schüler kennen die Regel zur Berechung von Flächenmaßzahlen mit Hilfe von Integralen für (stetige) Randfunktionen und können sie anwenden.

Indikator: Sie erläutern, warum die Regel gelten muss, und lösen mit ihrer Hilfe eine (oder mehrere) gestellte Aufgabe(n).

5. Didaktisch-methodische Überlegungen

5.1 Didaktische Analyse

Das Grundproblem ist, eine angemessene begriffliche Reduktion vorzunehmen, ohne die Mathematik zu verfälschen oder eine eventuell spätere Konkretisierung stark zu behindern. Die Schüler sollen dem Unterricht verständnisvoll folgen können.

Nach dem Rahmenplan (siehe S. 25) ist der "Unterschied zwischen bestimmtem Integral und Flächeninhalt" verbindlicher Lerninhalt dieser Unterrichtseinheit. Die bei einigen Schülern bestimmt vorhandene Auffassung, dass Flächeninhalt und Integral das Gleiche sind, muss an dieser Stelle aufgebrochen und thematisiert werden. Allerdings ist nicht zu erwarten, dass das Integral nun abgehoben von Flächen als etwas Eigenständiges betrachtet wird. Dieser Schritt wird einer eventuell späteren Beschäftigung mit dem Integral vorbehalten bleiben. Die Grundlagen sind aber hier zu legen und deshalb soll am Ende des Lernabschnitts auch eine Berechnung mittels Integralen erfolgen, die dies erahnen lässt.

Es soll bemerkt werden, dass die Einführung des Integrals innerhalb dieses Kurses sich nicht voll mit dem Riemann-Intergral deckt. Ist f aber stetig (und das setzen wir die ganze Zeit still voraus) auf [a ; b], so stimmt das Riemann-Integral mit dem definierten überein. Dies kann aber im Grundkurs nicht thematisiert werden.

Es sei betont, dass alle bisherigen Überlegungen stets von Randfunktionen ausgingen, deren Funktionswerte über dem betrachteten Intervall nichtnegativ sind. Es ist nun zu überlegen, wie man beim Wegfall dieser Voraussetzung Flächen bestimmt, von denen Teile unterhalb der x-Achse im Koordinatensystem liegen (mit dem bisherigen Wissen der Schüler). Daher erscheint es mir nur konsequent, dieses Problem durch den Trick der Verschiebung des Graphen der Randfunktion entlang der x-Achse vorzunehmen. Nur so werden wieder die dem Schüler bekannten Bedingungen hergestellt und man kann auf induktivem Wege das Problem lösen.

5.2 Entscheidung für die einzelnen Phasen

Die Abfolge der einzelnen Phasen orientiert sich prinzipiell an den Vorstellungen der Lernpsychologie.

Einstieg - Besprechung der Hausaufgabe zu heute

Die Schüler haben bisher nur Funktionen mit nichtnegativen Funktionswerten als Randfunktion betrachtet. Durch die Hausaufgabe werden sie bei der Berechnung von zwei bestimmten Integralen (hoffentlich) mit dem Problem konfrontiert, dass das Ergebnis unmöglich mit der Maßzahl des Flächeninhaltes übereinstimmen kann. In gewisser Weise wird eine kleine Inkongruenz erzeugt, die bei besseren Schülern bestimmt schon aufgehoben wird, indem sie eine Vermutung haben, was das Ergebnis zu bedeuten hat ("Differenz der Flächenmaßzahlen").

Damit dies allen deutlich wird, soll die Hausaufgabe kurz besprochen und verglichen werden. Damit das schnell erfolgen kann und gleichzeitig ein Vergleich des zu skizzierenden Graphen möglich ist, setze ich den TI-89 mit zugehörigem OHP-Display ein. Zusätzlich erkennen die Schüler den Vorteil solch eines Gerätes, da es lästige Rechenarbeit übernehmen kann und uns so Zeit zur Besprechung des eigentlichen Sachinhaltes gibt.

Erarbeitungsphase

Nachdem die Vermutung, welche Bedeutung dem Integral nun zukommt, im Raum steht, wird nicht die Frage: "Ist das wirklich so?" gestellt (nicht motivierend), sondern: "Woraus würde das folgen? Hängt das mit bekannten Definitionen oder Sätzen zusammen?"

Die Schüler wissen dann, worum es gehen wird, und gleichzeitig wird damit der Vernetzungsgedanke vorhandenen Wissens mit der (richtigen) Vermutung vorangetrieben. Um nun die Vermutung zu begründen, muss Schritt für Schritt der Gedankengang entwickelt werden unter Berücksichtigung der speziellen Vorkenntnisse, um die Wissenslücke zu schließen.

Es liegt also nahe, den Graphen der Funktion einfach "frech" in Richtung der y-Achse so weit zu verschieben, bis er komplett im betrachteten Intervall positive Funktionswerte hat. Nun können die Schüler ihr Wissen wieder anwenden, müssen aber eine Beziehung zum ursprünglichen Problem mit Hilfe bekannter Regeln und Sätze herstellen. Dabei braucht auch die Anschauung nicht zu kurz kommen. Mit Hilfe erstellter graphischer Darstellungen wird der Gedankengang unterstützt bzw. für mehrere Schüler bestimmt erst möglich gemacht.

Gewinnung der Regeln

Nachdem das Ergebnis nun fixiert und die Vermutung bestätigt wurde, muss die praktische Konsequenz daraus gezogen werden. Um einfach Zeit für das Notieren der sich ergebenden Fälle zu sparen, werden die zwei "Sonderfälle" des Ergebnisses bereits formuliert auf einem Arbeitsblatt verteilt. Aufgabe der Schüler wird es sein, diese zu begründen. Durch diese zu erbringende Deduktion wird für den Lehrer sichtbar, inwieweit die Schüler dem bisherigem Gedankengang folgen konnten bzw. ob sie das formulierte Ergebnis auf diese neue Situation anwenden können.

Die logische Konsequenz ist dann die Rechenregel, die ebenfalls bereits auf dem Arbeitsblatt steht. Die Schüler können nun noch einmal kurz ihre Richtigkeit begründen.

Anwendung der Rechenregeln

Zum Schluss sollen die Schüler zur Übung eine Flächen- bzw. Integralberechnungsaufgabe lösen. Hier werden nochmals die Maßzahl der Gesamtfläche und das bestimmte Integral über das gesamte Intervall verglichen und die Übereinstimmung mit den gemachten Überlegungen hergestellt. Hausaufgabe wird dann zur Festigung eine ähnlich geartete Aufgabe (s. Verlaufsplanung). Die Aufgabe wird lediglich noch etwas komplexer, da die Nullstellen von f innerhalb des betrachteten Intervalls noch bestimmt werden müssen.

5.3 Alternativen

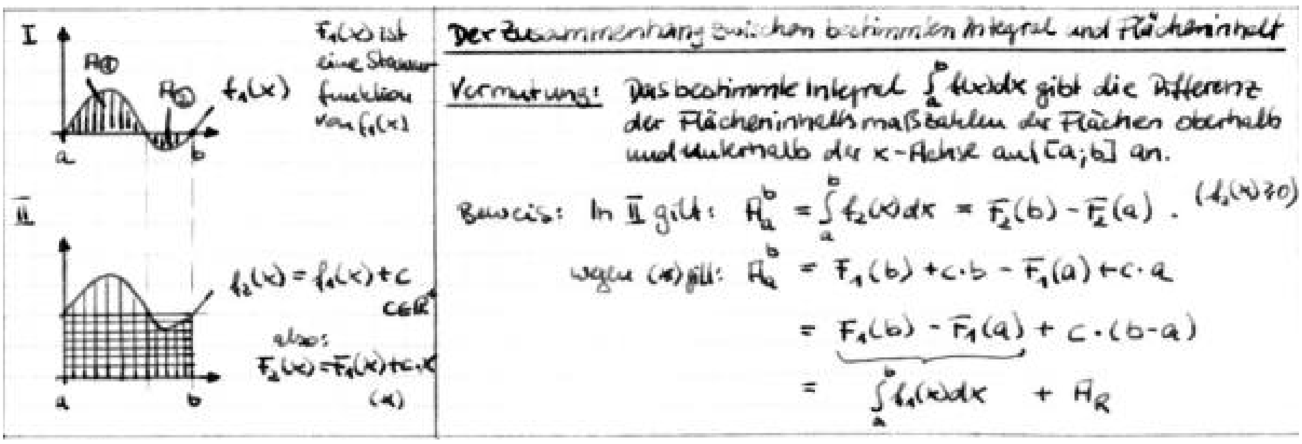
Insbesondere ist der Weg zu nennen, den die Lehrbuchautoren des genutzten Buches einschlagen. Über die Spiegelung des Graphen der Randfunktion erhält man eine Fläche mit gleichem Inhalt wie dem gesuchten. Über Vorzeichenbetrachtungen und Anwendung der vorgenommenen Integraldefinition kommt man dann auf den Unterschied zwischen Integral und Flächeninhalt für Randfunktionen mit negativen Funktionswerten. Anschließend zerstückelt man das Intervall, auf dem die Funktion betrachtet wird, in Teilintervalle, innerhalb derer die Funktionswerte jeweils nur positiv bzw. negativ sind. Der Aspekt der Flächenbilanz steht dabei nicht im Vordergrund, ist aber in Anwendungsfällen, z. B. in der Physik, besonders wichtig.

6. Geplanter Unterrichtsverlauf

Phase: Funktion, Zeit, LZ	Lehrerverhalten	erwartetes Schülerverhalten	Form / Medien
Einstieg ca. 5 Min. FZ 1	Der Lehrer initiiert die Hausaufgabenbesprechung. Er fordert die Schüler zu Vermutungen auf, was das bestimmte Integral nun angibt. Er gibt die Zielsetzung der Stunde bekannt.	Die Schüler geben ihre Ergebnisse bekannt und vergleichen den Graphen mit dem vorgestellten. Sie äußern (begründete) Vermutungen bezüglich des Integrals.	gUG, OHP, TI-89 mit Display
Erarbeitungs-phase ca. 20 - 25 Min. FZ 2	Im gelenkten UG wird das Tafelbild entwickelt, wesentliche Gedanken werden herausgestellt.	Die Schüler bringen auf Fragen ihr Wissen in den Beweis ein. Ein Schüler fasst den Gedankengang noch einmal zusammen.	gUG, Tafel, Hefter
Erkenntnisgewinn ca. 5 - 10 Min. FZ 3, FZ 4	Der Lehrer verteilt die Arbeitsblätter und fordert zur Begründung der Sonderfälle und Rechenregeln auf (nach Diskussion mit dem Banknachbarn).	Die Schüler lesen sich die Fälle durch, diskutieren sie kurz und stellen ihre Überlegungen mündlich dar.	AB, Stillarbeit, Partnerarbeit, UG
Übung ca. 5 - 15 Min. FZ 4	Der Lehrer erteilt den Auftrag, den Flächeninhalt einer gegebenen Fläche zu bestimmen. Eventuell stellt er noch weitere Aufgaben.	Die Schüler können notwendige Angaben (Nullstellen) der Skizze entnehmen. Falls noch Zeit zur Verfügung steht, wird das Ergebnis an der Tafel vorgetragen.	Stillarbeit, Partnerarbeit, Hefter, UG, Tafel
Hausaufgabe FZ 4	Lehrbuch, S. 154, Nr. 14 i, l		

Abkürzungen: UG - Unterrichtsgespräch, FZ - Feinziel, HA - Hausaufgabe, OHP - Overheadprojektor, gUG - gelenktes Unterrichtsgespräch, AB - Aufgabenblatt

7. Tafelbild



Also gilt:

$$\int_a^b f_1(x)dx = A_a^b - A_R$$
$$= A_1 + A_R - A_2 - A_R$$
$$= A_1 - A_2$$

Die Vermutung hat sich bestätigt.

8. Aufgaben

- Hausaufgaben zu heute:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$.
a) Skizzieren Sie den Graphen von f auf dem Intervall [0 ; 3]!
b) Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_0^2 f(x)dx$ und $\int_0^3 f(x)dx$!

- Hausaufgaben zur nächsten Stunde: LB, S. 154 / 14 i, l

Welchen Inhalt hat die Fläche, die das Schaubild von f mit der x-Achse einschließt?
i) $f(x) = 2x^4 + 7x^3 + 5x^2$ l) $f(x) = x^5 - x^3$

9. Verwendete Literatur

- Vorläufiger Rahmenplan für Unterricht und Erziehung in der Berliner Schule, Gymnasiale Oberstufe, Fach Mathematik, Berlin, 1995
- LS Mathematik, Analysis, Grundkurs Gesamtausgabe, Klett, Stuttgart, 1995 (im Kurs verwendet)
- Bigalke / Köhler / Kuschnerow: Analysis, Kursstufe, Cornelsen, Berlin, 1995
- Zech: Grundkurs Mathematikdidaktik, Beltz Verlag, Weinheim und Basel, 1996
- Homeister, J.: Analysis im Grundkurs ma-1, Vortragspapier zur Veranstaltung des Berliner Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts in der TFH Berlin, 22.06.1989
- Knoche,N. / Wippermann, H.: Vorlesungen zur Methodik und Didaktik der Analysis, Bibliographisches Institut, Mannheim, Wien,

Zürich, 1986

- Tietze, U.-P. / Klika, M. / Wolpers, H.: Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Band 1, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1997

10. Sitzplan der Grundkurses ma-1:

...

1. Zeichen: Mitarbeit
2. Zeichen: mündliche Leistung
3. Zeichen: schriftliche Leistung
(- ausreichend und schlechter; 0 befriedigend bis ausreichend; + gut bis sehr gut; ? kann noch nicht beurteilt werden)

St.Schmidt@online.de

Verwendetes Arbeitsblatt: ab.html