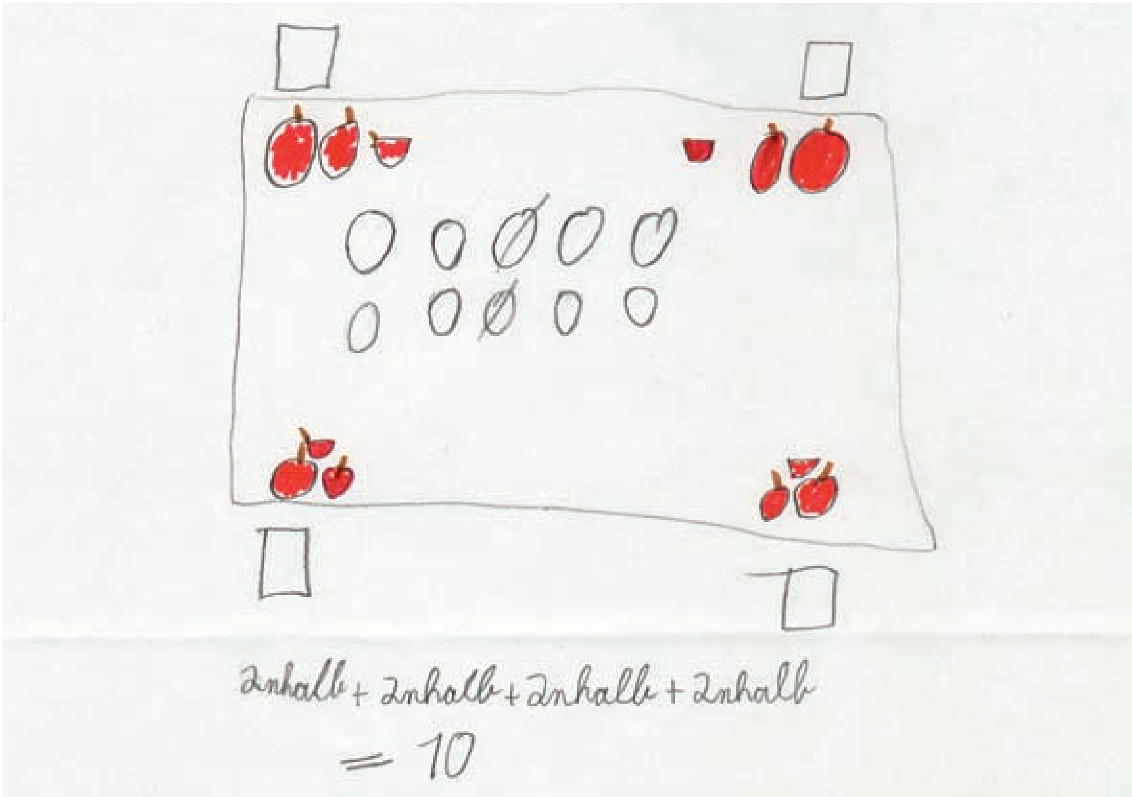
Berlin
Senatsverwaltung für Bildung,
Wissenschaft und Forschung

# Bildung für Berlin




## Individuelle Stärken herausfordern

11 Lernumgebungen für einen differenzierenden kompetenzorientierten Mathematikunterricht von der Schulanfangsphase bis zur 6. Klasse

SINUS-Transfer
Grundschule
Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts

Grundschule Mathematik

**Herausgeber**
Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung
Beuthstraße 6–8, 10117 Berlin
Telefon 030 9026-7

www.senbwf.de

**Verantwortlich**
VI A: Allgemeinbildende Unterrichtsfächer
Elke Dragendorf

**Redaktion**
VI A 1.7
Astrid Gebert
astrid.gebert@senbwf.berlin.de

**Autoren**
Karin Tretter, Grundschule am Sandsteinweg, Berlin
Anita Pfeng, Paul-Klee-Grundschule, Berlin
Kerstin Beyer, Grundschule im Grünen, Berlin
Maria Hums-Heusel, Pestalozzi-Schule, Berlin
Astrid Gebert, Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung, Berlin

**Gestaltung**
V+I+S+K, Berlin

**Titelbild**
Karin Tretter, Grundschule am Sandsteinweg, Berlin

**Druck**
Oktoberdruck AG, Berlin

1. Auflage, 2009

# Vorwort

*„Dies eine dürfte keinem Zweifel mehr begegnen, dass wir unter allen Umständen die Forderung der gleichmäßigen Förderung aufgeben müssen, und dass wir an ihre Stelle die Forderung der höchstmöglichen Förderung jeder einzelnen Begabung zu setzen haben.“*
(Johannes Kühnel: Neubau des Rechenunterrichts 1916)

In der Unterrichtspraxis zeigt es sich täglich auf’s Neue: Die Voraussetzungen, die die Kinder zum Lernen mitbringen, sind sehr unterschiedlich. Während einige Kinder spielerisch mit Zahlen und Zahlbeziehungen jonglieren, Zusammenhänge blitzschnell erfassen und mühelos auf neue Sachverhalte übertragen können, scheint anderen die Welt der Zahlen ein Buch mit sieben Siegeln zu sein, zu der sie nur mit viel Anstrengung und Ausdauer Zugang finden. Mit dieser Vielfalt umzugehen und dabei alle Kinder bestmöglich zu fördern ist eine Herausforderung, die mit traditionellen Unterrichtsformen kaum zu bewältigen ist. Zusammen mit der Diskussion um die Bedeutung und Förderung der allgemeinen mathematischen Kompetenzen ergeben sich zwei zwingende Notwendigkeiten, über grundlegende Veränderungen im Mathematikunterricht nachzudenken.

Die organisatorische Öffnung des Unterrichts ist ein wichtiger Schritt in diese Richtung, der aber mit einem anderen Verständnis von Aufgaben einhergehen muss. „Gerade im Fach Mathematik besteht die große Gefahr, dass die Gleichschrittigkeit des Unterrichts zwar äußerlich zugunsten individualisierter, selbstgesteuerter Lernformen aufgebrochen wird, dass aber die Strukturen des kleinschrittigen Lernens innerhalb offener Organisationsformen (Freiarbeit, Wochenplan, Projekte) ungestört fortwirken: Die Lernwerkstatt mit kleinschrittigem Arbeitsmaterial ist keine Fiktion!“ (Wittmann 1996)

Die Entwicklung einer neuen Aufgabenkultur ist eines der Ziele des bundesweiten Modellvorhabens SINUS-Transfer Grundschule, in dem sich eine große Zahl Berliner Grundschulen seit fünf Jahren engagiert. Im Rahmen dieser Arbeit entstand das vorliegende Heft. Es beschreibt in elf Lernumgebungen Ansätze für einen veränderten Mathematikunterricht, der sein Augenmerk besonders auf einen produktiven Umgang mit unterschiedlichen Lernvoraussetzungen legt. Die Aufgabenstellungen sind so formuliert, dass sie von allen Kindern bearbeitet werden können und jedes Kind die Möglichkeit erhält zu zeigen, was es kann. Nach den Erfahrungen der Kolleginnen im SINUS-Pogramm sind es dabei nicht nur die leistungsstarken Kinder, die starke Leistungen zeigen.

Wir freuen uns, wenn Sie diese Lernumgebungen in Ihrem Unterricht einsetzten, Bewährtes damit ergänzen und sich durch diese Beispiele zu eigenen Ideen anregen lassen.

Für Ihre Arbeit mit diesen Materialien wünschen wir Ihnen viel Erfolg!

Tom Stryck
Leiter der Abteilung VI
Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung

# Inhalt



„Mathematik ist die Wissenschaft von schönen und nützlichen Mustern und Strukturen, die man aktiv und interaktiv erforschen und anwenden kann."

Erich Chr. Wittmann 2009

# Einleitung

## Wie kam es zu dieser Aufgabensammlung?

Sie halten eine Sammlung von Aufgaben in den Händen, die im Rahmen des Modellvorhabens SINUS-Transfer Grundschule in Berlin entstanden ist. Die gemeinsame Suche nach neuen Wegen für den Mathematikunterricht in der Grundschule führte uns, obwohl die Ausgangslagen und Fragestellungen an den einzelnen Schulen sehr unterschiedlich waren, immer wieder auf zwei zentrale Aspekte zurück: Die Frage nach dem sinnvollen Umgang mit den scheinbar immer größer werdenden Begabungsunterschieden zwischen den Schülern sowie die Frage nach einem aktiv-entdeckenden Unterricht, der die allgemeinen mathematischen Kompetenzen fördert.

Schnell wurde uns klar, dass ein Unterricht, der unsere Vorstellungen vom Umgang mit Heterogenität sowie die Kompetenzorientierung besonders berücksichtigt, eine andere Form von Aufgaben und einen anderen Umgang mit Aufgaben erfordert. Auf der Suche nach Anregungen stießen wir besonders in den Lehrerhandbüchern zum Zahlenbuch von G. Müller und E. Wittmann, in den Veröffentlichungen von R. Rasch sowie den beiden Bänden des Schweizer Mathe-Projektes um E. Hengartner und U. Hirt auf eine Vielzahl interessanter Aufgabenbeispiele.[1] Die Aufgaben luden zum Ausprobieren ein und regten zum Entwickeln eigener Aufgaben an. Gleichzeitig fanden wir in den Veröffentlichungen auch den Fachterminus für diese Form von Aufgaben. Sie werden als Lernumgebungen bezeichnet.

[1] Wittmann, Erich Chr./Müller, Gerhard N.: Das Zahlenbuch 1 bis 4. Lehrerband; Klett 1994

Rasch, Renate: Offene Aufgaben für individuelles Lernen im Mathematikunterricht der Grundschule 1/2 und 3/4. Aufgabenbeispiele und Schülerbearbeitungen; Lernbuch Verlag/Kallmeyer 2007

Hengartner, Elmar/Hirt, Ueli/Wälti, Beat: Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht; Klett 2006

Hirt, Ueli/Wälti, Beat: Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte; Klett/Kallmeyer 2008

## Warum braucht der Mathematikunterricht andere Unterrichtsformen?

Die Bandbreite des Kompetenzspektrums, das die Kinder innerhalb einer Schulklasse mitbringen, umfasst häufig mehrere Schuljahre. Eine Differenzierung mit individuellen Angeboten entsprechend dem jeweiligen Lernstand des einzelnen Kindes ist sehr aufwändig, organisatorisch umständlich und stellte uns auch inhaltlich nicht mehr zufrieden. Um sinnvoll über Mathematik zu reden, Lösungswege zu vergleichen und zu optimieren, Ideen anderer aufzunehmen und weiter zu entwickeln, benötigt der Unterricht Inhalte und Aufgaben, mit denen sich alle Schüler beschäftigt haben. Ideal dafür wären Aufgaben, die eine Vielfalt von Aktivitäten auf unterschiedlichen Niveaus herausfordern und eine Differenzierung vom Kinde aus ermöglichen.

Bei der Differenzierung vom Kinde aus, auch natürliche Differenzierung genannt, hat das Kind selbst in der Hand, wie anspruchsvoll es die Aufgabe bearbeitet. Für die Kinder auf dem unteren Leistungsniveau findet sich ein einfacher Zugang, für besonders begabte Kinder gibt es Möglichkeiten einer weiterführenden intensiven Bearbeitung. Die Differenzierung ergibt sich häufig erst durch die Intensität der Bearbeitung der Aufgabe und wird nicht durch eine Vorauswahl von Teilaufgaben vorgegeben. Diese Herangehensweise schafft die Grundlagen für gemeinsame reflektierende Gespräche, bei denen alle Schüler von den unterschiedlichen Herangehensweisen profitieren können und von einander lernen.

Hiermit kamen wir auch schon zur zweiten Herausforderung an unseren Mathematikunterricht. Es wurde deutlich, dass der Schwerpunkt unseres Unterrichts noch viel zu sehr auf der Reproduktion von Rechenwegen lag. Die Kompetenz des schematischen Abarbeitens von Rechenverfahren kann nicht länger der mehr oder weniger einzige Lernerfolg des Mathematikunterrichts bleiben. Und betrachtet man den Rahmenlehrplan Mathematik und seine allgemeinen Kompetenzen sowie die Bildungsstandards der KMK genauer, so wird auch dort deutlich, dass es im Mathematikunterricht um viel mehr gehen muss: Erfolgreiches Mathematiklernen beinhaltet, dass die Schüler mathematische Probleme lösen, ihre Lösungswege reflektieren und ihre Rechenwege darstellen und dem Lehrer und auch den anderen Schülern erklären.

Besonders fruchtbare Momente eines solchen aktiv-entdeckenden Unterrichts ergeben sich beispielsweise beim Entdecken und Erkennen von Mustern und Strukturen. Dazu gehören auch das Auffinden von Regelmäßigkeiten und das Ordnen und Sortieren von Zahlen, Formen und Aufgaben. Störungen von Mustern regen zum Nachdenken an und fordern zum Argumentieren heraus.

Ein Mathematikunterricht, der die Aktivitäten der Schülerinnen und Schüler in den Mittelpunkt rückt und der konstruktivistischen Aneignung mathematischen Wissens den Vorzug gegenüber der reinen Reproduktion von Verfahren gibt, fördert bei den Schülern ein tieferes Verständnis für mathematische Zusammenhänge. Mathematik ist eben kein vorgefertigtes Regelwerk, das nur vermittelt und nachvollzogen werden muss, sondern eine lebendige Wissenschaft, die sich dem Lernenden erst durch das aktive Tun wirklich erschließt. Eine Aneignung allein durch Gewöhnung ist unmöglich.

## Was sind die wesentlichen Bestandteile des Unterrichtens mit Lernumgebungen?

Unter Lernumgebungen versteht man Aufgabenstellungen, die sowohl die Heterogenität der Schüler/innen berücksichtigen und einen Zugang für alle Kinder bieten als auch das aktiv-entdeckende Lernen begünstigen. Solche Aufgaben sind auf unterschiedlichen Verständnis- bzw. Abstraktionsebenen lösbar und fordern das Entwickeln persönlicher Denkwege und Darstellungsformen heraus. „In Lernumgebungen können langsam und schnell Lernende innerhalb des gleichen fachlichen Rahmens integriert gefördert werden. Dank der Offenheit und der Reichhaltigkeit der Aufgaben und Arbeitsanweisungen regen sie zum eigentätigen Mathematik-Treiben an und lösen Fachgespräche aus.“ (Hirt/Wälti 2008, S. 12)

Im Gegensatz zu traditionellen Aufgaben ist eine Lernumgebung so angelegt, dass sie eine längere und vertiefende Beschäftigung vorsieht, keine Rechenwege vorgibt und viel Spielräume für die Gestaltung des Lösungsweges lässt. Damit kommt der Präsentation der Aufgabe am Anfang der Arbeit mit einer Lernumgebung eine besondere Bedeutung zu. Wichtig ist hierbei, dass wirklich alle Kinder unabhängig von ihrem Leistungsvermögen mit der Fragestellung vertraut werden und diese verstehen können. Dies erfordert eine niedrige Eingangsschwelle, die zum eigenen Ausprobieren anregt und herausfordert. Beim Besprechen der Aufgabenstellung sind die Andeutung von Lösungswegen (strategische bzw. inhaltliche Hilfen) oder Erwartungen an eine bestimmte Darstellungsform möglichst zu vermeiden, denn eine explizite oder auch indirekte Vorgabe von Wegen schränkt das Suchen nach kreativen und eigenen Lösungsmöglichkeiten ein.

Der Lehrerin kommt bei der Arbeit mit Lernumgebungen vor allem die Rolle der Beraterin und Organisatorin zu. Hierzu ist ein tiefes Verständnis des zentralen mathematischen Inhalts der Lernumgebung eine wichtige Voraussetzung. Natürlich wird es immer wieder passieren, dass Kinder in gedankliche Sachgassen geraten. Dann brauchen sie eine Lehrerin, die sie berät und unterstützt, mögliche Perspektiven aufzeigt ohne jedoch wichtige Entdeckungen vorweg zu nehmen. Zu einem späteren Zeitpunkt ist sie dafür verantwortlich, den Austausch untereinander zu organisieren und das auswertende Unterrichtsgespräch zu steuern.

Das Gespräch über die bei der Arbeit gemachten Erfahrungen, die unterschiedlichen Herangehensweisen, die gefundenen Lösungswege und gemachten Beobachtungen ist ein fundamentaler Bestandteil der Arbeit mit Lernumgebungen. Der Austausch über geschickte Rechenwege und Entdeckungen, die Anerkennung der unterschiedlichen Vorgehensweisen oder auch das Wahrnehmen von interessanten Darstellungen findet hier seinen Platz. Da alle Kinder an den gleichen fachlichen Inhalten gearbeitet haben, können sie von den Beobachtungen und Vorgehensweisen der anderen profitieren und werden zum Weiterdenkenden angeregt. Leistungsstärkere Schüler können sich argumentativ auseinandersetzen und ihr fachliches Wissen vernetzen. Die Leistungsschere wird hierbei sicher stärker sichtbar werden als im herkömmlichen Unterricht, dies erzeugt aber einen Lernzuwachs bei allen Kindern. Sich von der Vielfältigkeit und oft auch der gedanklichen Tiefe der Schülerprodukte überraschen zu lassen, ist auch für die Lehrerin spannend. Dies gilt sowohl für Lösungswege als auch für die häufig sehr originellen Formen der Darstellung.

Letztlich wirken Lernumgebungen für das Unterrichtsklima ausgleichend und motivierend, weil alle an der gleichen Aufgabe arbeiten und kein Kind durch Sonderaufgaben ausgegrenzt wird. Das gemeinsame Mathematiktreiben unterstützt das Von- und Miteinander lernen sowie die Akzeptanz von unterschiedlichen Sicht- und Herangehensweisen. Die Auswahl der Aufgaben ist Dreh- und Angelpunkt einer Neuorientierung des Mathematikunterrichts. Ein anderer methodisch-didaktischer Umgang mit Aufgaben in Form von Lernumgebungen ist eine wichtige Ergänzung des Fachunterrichts, die wichtige Inhalte aufnimmt und das Erreichen relevanter Ziele unterstützt. Auch wenn Lernumgebungen immer Elemente des produktiven Übens beinhalten und das Automatisieren grundlegender Fertigkeiten mit dem Fördern eines tieferen Verständnisses mathematischer Zusammenhänge verbinden, bedarf der Unterricht darüber hinaus auch noch spezifischer Phasen des Übens grundlegender Fertigkeiten.

## Wie ist die Sammlung von Lernumgebungen aufgebaut?

Nach der Einleitung finden Sie zunächst eine tabellarische Übersicht über die einzelnen Aufgaben. In der ersten Spalte der Tabelle stehen die Namen und die Nummern der Aufgaben. Es schließt sich eine Zuordnung zur vorgesehenen Klassenstufe an, die aber durchlässig ist und sehr von den jeweiligen Vorkenntnissen der Schülerinnen und Schüler abhängt. In der dritten und vierten Spalte finden sich Themenfeld und zugehörige Anforderung des Rahmenlehrplans, die der jeweiligen Aufgabe zugrunde liegen. In der letzten Spalte erfolgt die Zuordnung zu der bei der Aufgabe überwiegenden allgemeinen mathematischen Kompetenz gemäß den Bildungsstandards der KMK. Bei den meisten Lernumgebungen werden jedoch auch die anderen allgemeinen mathematischen Kompetenzen gefördert. Die Tabelle erleichtert das Finden einer passenden Lernumgebung.

Nach der tabellarischen Übersicht folgt eine Auswahl von Leitbegriffen, die uns in Fachvorträgen, Aufsätzen oder Büchern begegneten und für unsere weitere Arbeit bedeutend wurden. Mit dieser Sammlung möchten wir zum Nachdenken anregen und Impulse für die Unterrichtsentwicklung geben, ein Anspruch auf Vollständigkeit besteht dabei nicht.

Nun folgen die einzelnen Lernumgebungen. Nicht alle vorgestellten Beispiele sind neu, manche basieren auf Vorlagen aus der Literatur und wurden von den Autorinnen für ihre Unterrichtszwecke angepasst. Wir haben in den Literaturangaben an entsprechender Stelle auf die Urheber hingewiesen. Die Darstellung der Lernumgebungen umfasst jeweils drei bis sechs Seiten und beginnt mit der Präsentation der einführenden Aufgabe. Anschließend findet sich in der Randspalte eine Einordnung in das jeweilige Themenfeld des Berliner Rahmenlehrplans sowie die Zuordnung zu der vorherrschenden allgemeinen mathematischen Kompetenz. Diese orientiert sich an der Schwerpunktsetzung der Aufgabe.

Unter der Überschrift „Worum geht es?“ folgt eine kurze fachliche Einbettung der Aufgabe mit den zugrunde liegenden mathematischen Überlegungen. Methodische Hilfen zur Einführung in die Lernumgebung, zur Unterrichtsgestaltung und zur Auswertung und Präsentation der Schülerarbeiten werden im Teil „Wie kann man vorgehen?“ dargestellt.

Alle dargestellten Lernumgebungen sind von den Autorinnen und von anderen Lehrkräften mehrfach erprobt worden. Aus diesen Erprobungen stammen die vorgestellten Schülerbeispiele. Sie sollen auf die mögliche Bandbreite der Lösungsansätze aufmerksam machen und wesentliche Merkmale von einfachen bis komplexen Schülerlösungen verdeutlichen. Die Reflexion über die gemachten Unterrichtserfahrungen möchte Anregungen für die weitere Unterrichtsarbeit geben und auch auf mögliche Stolpersteine aufmerksam machen. Der Hinweis auf Möglichkeiten für vertiefende und weiterführende Fragestellungen zum Thema runden die Darstellung ab.

In der weißen Fußzeile unten auf der Seite finden sich praktische Hinweise zur vorgesehenen Klassenstufe, dem etwaigen Zeitbedarf sowie den benötigten Materialien oder den im Anhang befindlichen Kopiervorlagen. Spezifische Literatur zur jeweiligen Lernumgebung ist zur besseren Übersicht ebenfalls in der Fußzeile direkt unter der Lernumgebung selbst aufgeführt.

Im Anschluss an die Aufgaben folgen einige Kopiervorlagen. Teilweise sind sie so gestaltet, dass sie von den Schülern direkt ins Heft geklebt werden können. Zur Arbeitserleichterung und zur Einsparung von Kopierkosten erscheint eine Aufgabe dann mehrfach auf der Seite.

Den Schluss der Publikation bildet die Literaturliste. Sie enthält neben der verwendeten Literatur auch Anregungen und Empfehlungen zum Weiterlesen.

| Aufgabe | Klasse | Themenfeld | Anforderung des Rahmenlehrplans | Kompetenz |
|---|---|---|---|---|
| **1** Jeans und T-Shirts | 1–3 JÜL | Daten und Zufall | einfache kombinatorische Aufgaben lösen | Problemlösen |
| **2** Quadrate spannen | 1–3 JÜL | Form und Veränderung | Erkennen und Beschreiben von Gesetzmäßigkeiten in geometrischen Mustern | Argumentieren |
| **3** Schiebespiel | 1–4 JÜL | Form und Veränderung | räumliche oder ebene Veränderungsprozesse ausführen und beschreiben | Problemlösen |
| **4** Pentominos | 3–5 JÜL | Form und Veränderung | arithmetrische Vorstellungen mit Hilfe geometrischer Mittel veranschaulichen und begründen | Argumentieren |
| **5** Das Haus vom Nikolaus | 4–6 | Form und Veränderung | Handlungen nach mündlichen, schriftlichen und zeichnerischen Vorgaben ausführen | Argumentieren |
| **6** Butterkekse | 3–4 | Größen und Messen | zu einer Sachsituation mathematische Fragen entwickeln | Modellieren |
| **7** Weihnachtspäckchen | 1–3 JÜL | Zahlen und Operationen | die Vorgehensweise bei der Addition und Subtraktion verstehen | Kommunizieren |
| **8** Opa Piepenbrink | 1–3 | Zahlen und Operationen | Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übertragen und dabei Gleichungen bzw. Ungleichungen bilden und sachbezogen lösen | Problemlösen |
| **9** Zahlenfeld | 3–4 JÜL | Zahlen und Operationen | mehrere Rechenoperationen miteinander verknüpfen | Kommunizieren |
| **10** Pizza-Aufgabe | 3–4 | Zahlen und Operationen | Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übertragen und dabei Gleichungen bzw. Ungleichungen bilden und sachbezogen lösen | Modellieren |
| **11** Das Pascal’sche Dreieck | 3–6 | Zahlen und Operationen | Muster und Strukturen in Zahlenfolgen erkennen | Argumentieren |

# Fundstücke – Leitbegriffe für einen veränderten Mathematikunterricht

## Substanzielle Aufgaben

Gute und substanzielle Aufgaben bilden den Kern eines veränderten Mathematikunterrichts. „Substanzielle Aufgaben sind Aufgaben, bei denen sich die Investition von Zeit für die Kinder spürbar lohnt, da sie – natürlich auf unterschiedlichen Leistungsniveaus und mit unterschiedlich ausgeprägten Interessensgraden – an der Erschließung eines Kontext „innermathematischer“ oder „außermathematischer“ Art arbeiten.“[1] Diese Aufgaben sind auch mathematisch substanziell, man kann an ihnen zentrale Inhalte, Strukturen und Muster in der Mathematik bearbeiten.

Die Schulgruppe der Galilei-Grundschule hat in der Beschäftigung mit dem SINUS-Modul 7 (Christoph Selter) in einem spannenden Prozess mehrere Monate daran gearbeitet, immer mehr zu verstehen, was substanzielle Aufgaben sind. Das erforderte auch das Ablegen alter Gewohnheiten, etwa das kleinschrittige Einführen in Aufgabenstellungen. Aus dem Aufbereiten von Aufgaben für das vermutete Niveau der Schülerinnen und Schüler wurde ein zunehmendes Gespür für qualitativ hochwertige Aufgabenstellungen, die ein breites Differenzierungspotential enthalten und an Interessen der Kinder anknüpfen. Manchmal mussten eigentlich interessante Sachaufgaben aus Mathematikbüchern zunächst entschlackt oder geöffnet werden, indem beispielsweise direkte Fragen entfernt oder Zahlenräume für die Bearbeitung frei gestellt wurden. Kinder brauchen problemreiche, spannende Anregungen zum Lernen, sie müssen aktiv Mathematik betreiben können. Oft sind Aufgaben übrigens erst dann substantiell, wenn sie auch den Lehrkräften Herausforderungen bieten.

[1] Selter, Christoph:
Modul G7 – Interessen aufgreifen und weiter entwickeln; IPN 2007

## Lernumgebung

Eine Lernumgebung stellt die Erweiterung einer guten oder substantiellen Aufgabe dar. Es ist eine große flexible Aufgabe, die auch aus einem Verbund kleiner Aufgaben bestehen kann, die einen gemeinsamen Leitgedanken haben oder einer gemeinsamen Fragestellung folgen. Lernumgebungen bieten ein hohes Maß an Differenzierung: Die Lösungen können einfach und anspruchsvoll sein. Besonders elegante Lernumgebungen bieten viel Differenzierung, sind anregend, mathematisch gehaltvoll und brauchen, die Lehrkraft wird dankbar sein, wenig Aufwand in der Vorbereitung.

Wittmann, Erich Chr./Wollring, Bernd/
Hengartner, Elmar: diverse Vorträge und Publikationen

**Natürliche Differenzierung**

Eine elegante Aufgabenstellung mit natürlichen Differenzierungspotential ermöglicht es Kindern mit unterschiedlichen Leistungsniveaus, daran intensiv zu arbeiten. Wenn alle ein Stück Holz mit Schnitzmessern bearbeiten, formen manche vielleicht einen Schwan, bei anderen sind nur erste Bearbeitungsspuren im Holz zu sehen; jeder macht es so gut er kann. Alle arbeiten gemeinsam an einer Aufgabenstellung und können sich gemeinsam darüber austauschen.

Wer Hilfe benötigt, holt sie sich selbst, die Differenzierung geht vom Kind aus, nicht vom Lehrer, der die Aufgaben vorsortiert. Die inhaltliche Qualität und Tiefe der Auseinandersetzung entsteht quasi „natürlich". Es kommt nicht darauf an, wie viele Päckchen mit Einzelaufgaben bearbeitet wurden.

Wittmann, Erich Chr.: Natürliche Differenzierung;
In: Wittmann, Erich Chr./Müller, Gerhard N.: Das Zahlenbuch 1 Lehrerband; Klett 2006 S. 15 ff

**Denkanalyse**

„Ich muss also das mathematische Denken der Kinder ernst nehmen, auch und gerade dort, wo Kinder zu falschen Lösungen kommen; ich muss anerkennen, dass sie das aufgrund von Überlegungen tun, die ihnen selbst richtig erscheinen; ich muss sie dazu bringen, über diese Überlegungen Auskunft zu geben, nicht nur verbal (was mitunter schwierig ist), sondern vor allem auch durch Vorzeigen ihrer Lösungswege; und ich muss daraus aufgrund meines Fachwissens und meiner Erfahrung die richtigen Schlüsse ziehen."[2]

Michael Gaidoschik beschreibt hier anschaulich die von ihm als Denkanalyse bezeichnete Grundhaltung gegenüber rechnenden Kindern. Traditionell erwartet man vielleicht, dass Schüler den erklärenden Ausführungen der Lehrer folgen, aber es sind ja immer die Kinder, die Strukturen und Erklärungsmuster ausbilden müssen, um etwas zu verstehen. Die Überlegungen der Kinder geben Auskunft über ihre Vorerfahrungen und Denkmodelle. Nur wenn wir sie verstehen, können wir sie dabei unterstützen, ihr Wissen und Verständnis zu vertiefen.

[2] Gaidoschik, Michael:
Förderung rechenschwacher Kinder: Wege und Irrwege;
http://www.rechenschwaeche.at
02. 05. 2009

**… ohne „Bunte Hunde"**

„Bunte Hunde" sind mittlerweile zu einem Synonym für sog. „spielerische" Übungsformen geworden, die als Ersatz für die „grauen Rechenpäckchen" fungieren und den Kindern das unvermeidliche und anscheinend unattraktive Üben versüßen sollten. Als ein zentraler Vorteil ihres Einsatzes wurde nicht selten angeführt, dass es so gelänge, die Kinder zum Üben zu motivieren und sie – wenn auch auf Umwegen – für Mathematik zu interessieren.

Aus meiner Sicht war der erstmalig im Jahr 1990 erschienene Aufsatz „Wider die Flut der ‚bunten Hunde' und der ‚grauen Päckchen' von Erich Wittmann die Initialzündung dafür, dass Konzeptionen eines zeitgemäßen Mathematikunterrichts, deren Umsetzungen in Schulbüchern und wiederum deren Umsetzungen in der Unterrichtspraxis heutzutage auf „bunte Hunde" weitgehend verzichten können."[3]

[3] Selter, Christoph:
Modul G7 – Interessen aufgreifen und weiter entwickeln; IPN 2007

## Eigenproduktionen

Eigenproduktionen sind von den Schülern schriftlich festgehaltene Lösungen von Aufgaben, bei denen die Schüler die Möglichkeit hatten, einen eigenen Lösungsweg zu finden und über die Art und Weise der schriftlichen Darstellung selbst zu entscheiden. Eigenproduktionen können selbstverständlich auch in Partner- oder Gruppenarbeit entstehen.

Um Spielräume für individuelle Wege zu eröffnen, benötigt der Unterricht offene Aufgabenstellungen, die ein breites Spektrum an Lösungswegen zulassen.

Christoph Selter unterscheidet vier Typen von Eigenproduktionen, die sich durch die von den Schülern erwartete Tätigkeit unterscheiden:

- *Erfindungen:* Die Schüler werden angeregt, selbst Aufgaben zu erfinden.
- *Rechenwege:* Die Schüler lösen Aufgaben mit eigenen Vorgehensweisen.
- *Forscheraufgaben:* Die Schüler beschreiben begründen Auffälligkeiten oder Muster.
- *Rückschau oder Ausblick:* Die Schüler äußern sich über ihren Lernprozess.

Eigenproduktionen geben dem Lehrer detaillierte Einblicke in die Denkwege seiner Schüler. Sie können zur Reflexion über den Unterricht und zur weiteren Planung verwendet werden oder auch neue Formen der Leistungsbeurteilung unterstützen.

Von den Schülern erstellte Eigenproduktionen können für die weitere Unterrichtsarbeit eingesetzt werden.

Sundermann, Beate/Selter, Christoph:
Mit Eigenproduktionen individualisieren.
In: Christiani, Reinhold (Hrsg.):
Jahrgangsübergreifend unterrichten.
Cornelsen-Scriptor 2005

Hirt, Ueli/Wälti, Beat:
Lernumgebungen im Mathematikunterricht; Klett/Kallmeyer 2008

## Anerkennungskultur

Die Arbeit von Schülern, die Notationen ihrer Rechenprozesse, ihre Lösungswege und Lösungsvorschläge, ihre Überlegungen und Denkwege gehören in den Mittelpunkt des Unterrichts. Lehrende sollten sich dafür interessieren und Schüler immer wieder ermuntern, ihre Arbeit zu präsentieren und darüber mit anderen zu sprechen. Die Aufmerksamkeit richtet sich dann fast von selbst auf das, was die Schüler schon können – eine Anerkennungskultur ist ein gutes Fundament für die Weiterarbeit.

**Instruktionsverbot**

Es kann sehr hemmend für das Verstehen von mathematischen Zusammenhängen sein, wenn sie belehrend vermittelt werden. Videomitschnitte von gelungenem Mathematikunterricht zeigen deshalb häufig Lehrer, die so wenig wie möglich sprechen. Man sieht hingegen ihr Bemühen, den Ausführungen und Erklärungen der Kinder interessiert zu folgen. Sie halten es auch aus, wenn Kinder zunächst in „falsche" Richtungen denken.

Wenn der Lehrer instruiert, reduziert er die Möglichkeit der Schüler, Muster und Strukturen selbst zu entdecken. Manchmal kann dies durchaus sinnvoll sein, beispielsweise wenn es um das rasche und wirksame Vermitteln von schriftlichen Rechenverfahren geht. Konstruktivistische Lerntheorien fordern jedoch vor allem einen Ansatz, der mit Instruktionen sehr sparsam umgeht. Lernen ist ein aktives Konstruieren von Sinn, den ein lernendes Individuum vollzieht. Der Schüler instruiert und erklärt selbst, was und wie viel er verstanden hat. Im Erklären schärft sich seine Einsicht in die Zusammenhänge.

Wollring, Bernd:
Zur Konzeption von Lernumgebungen – Leitideen und Beispiele;
Vortrag 9. Fortbildungsveranstaltung SINUS-Transfer Grundschule; 11. 09. 2008

**Spielraum – Dokument**

Raum zum Gestalten: „Spiel-Raum"
Um in den Lernumgebungen die erforderlichen Optionen zum eigenen Gestalten, zum Verbessern, zum Nachdenken, zum Entdecken zu öffnen, sollte es Bereiche geben, in denen die Gegenstände in ihren jeweiligen materiellen Repräsentationen auch tatsächlich flexibel zu gestalten sind. Diesen Raum zum Gestalten innerhalb der Lernumgebung könnte man wie Bernd Wollring den „Spiel-Raum" nennen.

Raum zum Behalten: „Dokument"
Der Spiel-Raum ist zu unterscheiden von dem Raum zum Behalten und durch diesen zu ergänzen. Der Raum zum Behalten umfasst alle Formen der Dokumentation, die für späteres Weiterarbeiten oder Erinnern erhalten bleiben sollen. Viele uns bekannte Arbeitssituationen leiden in ihrem Artikulationsangebot unter einem Mangel im Bereich des Spielraums und einem Überangebot im Bereich des Dokumentierens.

Typische Beispiele aus dem Mathematikunterricht sind Rechnungen, bei denen als Artikulation nur die niedergeschriebene Endfassung zugelassen ist. Zu ergänzen wären solche Umgebungen durch einen Spielraum für Nebenrechnungen, unterstützende Bilder oder Mind Maps."[4]

[4] Wollring, Bernd:
Zur Kennzeichnung von Lernumgebungen für den Mathematikunterircht in der Grundschule;
http://www.mathematik.uni-kassel.de
02. 05. 2009

# 1 Jeans und T-Shirts

Monika trägt am liebsten T-Shirts und Jeans. Drei ihrer T-Shirts zieht sie besonders gern an. Sie sind rot, grün und gelb. Dazu hat sie 3 Jeans. Diese sind weiß, schwarz und blau. Monika möchte mit einer Hose und einem T-Shirt trotzdem jeden Tag anders aussehen.

**a** Finde verschiedene Kombinationen, die Monika mit ihren Lieblingsstücken zusammenstellen kann.

**b** Wie viele Möglichkeiten gibt es? Findest du alle?

**c** Beschreibe deinen Lösungsweg.

**Differenzierung**

**d** Monika hat auch noch zwei Paar Strümpfe. Ein Paar ist gestreift, das andere ist gepunktet. Wie viele Möglichkeiten hat sie jetzt?

**Worum geht es?**

Es handelt sich um eine problemhaltige Aufgabe aus dem Bereich der Kombinatorik. Auch außerhalb der Schule werden Kinder schon frühzeitig mit Phänomenen konfrontiert, die mit kombinatorischen Überlegungen zusammen hängen, z. B. die Wahl von 2 oder 3 Eiskugeln aus verschiedenen Eissorten, die Kombination der Puppen- oder Teddysachen, die Wahl der eigenen Anziehsachen, …)

Der Sachverhalt der vorliegenden Aufgabe spricht die Schüler inhaltlich an und ist auch für jüngere Schüler leicht zu erfassen. Es müssen nicht von allen Schülern gleich alle Lösungen gefunden werden, sie eignet sich daher auch gut für den Einsatz in jahrgangsgemischten Gruppen. Durch die aktive Auseinandersetzung mit der Problemstellung werden Vermutungen angestellt, Lösungsstrategien entwickelt und genutzt. Es werden Zusammenhänge erkannt, die später auf ähnliche Aufgaben übertragen werden können. Um sich diese Lösungsstrategien dauerhaft zu Eigen zu machen ist es wichtig, dass die Schülerinnen und Schüler ihre Lösungswege reflektieren und anschließend ihren Mitschülern vorstellen. Sie diskutieren ihre unterschiedlichen Darstellungsformen, vergleichen und bewerten sie nach ihrer Effektivität. Außerdem müssen sie Lösungen anderer auf ihre Korrektheit überprüfen, Begründungen suchen und formulieren. Zeichnungen oder die schriftliche Niederlegung ihres Lösungsweges helfen den Schülerinnen und Schülern ihr Vorgehen zu rekonstruieren und zu erklären. So früh wie möglich schreiben die Schülerinnen und Schüler ihre Lösungswege auf.

Eine der einfachsten und natürlichsten Lösungsstrategien in der Grundschule ist das konkrete Ausprobieren mit tatsächlich vorhandenen Materialien. Zum Beispiel könnten hier mit ausgeschnittenen Kleidungsstücken und einer Papierfigur konkret handelnd verschiedene Bekleidungsvarianten ausprobiert werden. Ein weiteres wichtiges Hilfsmittel zur Lösung von problemhaltigen Aufgaben ist das Anfertigen einer Zeichnung. Verschiedene Kombinations-

**Themenfeld**
Daten und Zufall

**Anforderung**
einfache kombinatorische Aufgaben lösen

**Allgemeine mathematische Kompetenz**
*Problemlösen:* Lösungsstrategien entwickeln und nutzen



**Stufe**
1. bis 3. Klasse,
geeignet auch für jahrgangsgemischte Lerngruppen

**Zeitbedarf**
mindestens 1 Unterrichtsstunde

**Material**
– Aufgabentext
– Knobelheft
– Kopiervorlage

möglichkeiten der Kleidung werden aufgezeichnet. Dieses Vorgehen wird häufig noch sehr ungeordnet sein, kann aber nach und nach planvoller und systematischer erfolgen. Das Anfertigen einer Zeichnung ist für die Kinder kein selbstverständlicher Weg zur Lösung und bedarf der gezielten Förderung und Übung.

Mathematisch handelt es sich um eine einfache kombinatorische Aufgabe aus dem Bereich Variation und Kombination. Es soll aus jeder Teilmenge (Jeans, T-Shirt und Strümpfe) immer genau ein Element mit jeweils einem anderen aus den anderen Teilmengen kombiniert werden.

Im ersten Teil der Aufgabe gibt es drei verschiedenfarbige T-Shirts, die mit jeweils einer Jeans zusammengestellt werden können. Es gibt genau drei Möglichkeiten, T-Shirt 1 mit den drei Jeans zu kombinieren. Das gleiche gilt für das zweite und dritte T-Shirt, also gibt es für die Aufgabe a) $3 \cdot 3 = 9$ Möglichkeiten, die Sachen zu kombinieren. Kommen jetzt noch bei Aufgabe b) zwei Sorten Strümpfe hinzu und gilt weiterhin, dass aus jeder Menge mindestens ein Teil angezogen werden muss (sie darf also nicht ohne Socken oder ohne T-Shirt gehen), dann ergeben sich für die 9 ($3 \cdot 3$) bisher gefundenen Möglichkeiten noch einmal 2 verschiedene, also $9 \cdot 2$ oder $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ Möglichkeiten.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| T-Shirt 1 | | Jeans 1 | | Strümpfe 1 |
| T-Shirt 2 | + | Jeans 2 | + | Strümpfe 2 |
| T-Shirt 3 | | Jeans 3 | | |

Bei dieser Form der Kombinationsaufgabe (je ein Element aus jeder Teilmenge wird kombiniert mit genau jeweils einem Element aus allen anderen Teilmengen) müssen die Anzahlen der Elemente der Teilmengen miteinander multipliziert werden.

## Wie könnte man vorgehen?

Um sicherzustellen, dass die Aufgabe von allen Kindern verstanden wird, wird sie gemeinsam gelesen und es werden Fragen zum Text geklärt. Im anschließenden Gespräch äußern sich die Schüler spontan und entwickeln erste Lösungsideen, die an dieser Stelle zunächst möglichst wenig kommentiert werden.

Anschließend arbeiten die Schüler allein. Sie suchen Lösungen und zeichnen eventuell Bilder dazu. Schüler der 1. bzw. 2. Jahrgangsstufe können ihrem Nachbarn oder der ganzen Klasse mündlich ihre Lösung beschreiben. Schüler der 3. Jahrgangsstufe beschreiben ihren Lösungsweg zunächst schriftlich. (Reflexion des eigenen Weges).

Wichtig ist es, dass sich die Schülerinnen und Schüler nach dem Lösen der Aufgabe ihrer angewendeten Strategien bewusst werden (siehe oben). Im anschließenden gemeinsamen Gespräch werden die einzelnen Strategien daher verbalisiert und diskutiert. Es wird über Mathematik gesprochen. Impulse dazu können sein: „Wie bist du vorgegangen?“ „Was hat dir ge-

Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung / SINUS-Transfer Grundschule / Individuelle Stärken herausfordern – 11 Lernumgebungen für einen differenzierenden kompetenzorientierten Mathematikunterricht

holfen, die Lösung zu finden?“ „Was hat nicht funktioniert?“ „Findest du einen Lösungsweg von einem anderen Mitschüler interessanter, schneller, weniger umständlich?“ Für viele Schüler, besonders in den unteren Klassenstufen, ist es hilfreich mit konkreten Gegenständen zu arbeiten, um im handelnden Umgang zu Lösungsmöglichkeiten zu kommen, die dann anschließend zeichnerisch festgehalten werden können. Es sollten also entsprechende „Anziehsachen“ aus farbigem Papier oder Moosgummi zur Verfügung stehen. Das gleiche ist auch bei der Aufgabe mit den farbigen Türmen möglich, hier bieten sich die so genannten „Steckkuben“ an, die bestimmt noch an vielen Schulen vorhanden sind. Wird dabei darauf geachtet, dass jedes Kind von jeder Farbe nur einen Steckwürfel hat, ist die Notwendigkeit einer Zeichnung erklärt. So können Wiederholungen leichter verhindert werden, wenn der Turm für die nächste Lösung neu kombiniert wird. Auch bei allen anderen Aufgaben ist es möglich, entsprechende Materialien aus der Spielzeugkiste (Spielzeugsattelschlepper, Puppenkleider etc.) zusammenzustellen. Gelingt dies nicht, sind entsprechende Abbildungen aus Moosgummi oder farbigem Papier ein guter Ersatz. Meist lösen sich die Schüler ganz von selbst nach einiger Zeit vom konkreten Material und finden ihre Lösungen „im Kopf“.

Um die individuelle Lösung des Problems zu fördern ist es wichtig, dass sich die Lehrkraft in der Erarbeitungsphase im Hintergrund hält und möglichst keine Kommentare oder Hilfen gibt. Äußerungen der Schülerinnen und Schüler (auch richtige Lösungen) sollten möglichst gar nicht kommentiert oder womöglich als richtig bestätigt werden, weil sonst die fruchtbare Diskussion der Schüler untereinander, „das Mathematiktreiben“ wie Büchter und Leuders (2005) es nennen, womöglich im Keim erstickt wird. Der Lehrer könnte diese Zeit nutzen, um sich einen Überblick über Lösungs- und Arbeitsverhalten der einzelnen Schüler zu verschaffen.

Beim Vorstellen der Ergebnisse ist besonders darauf zu achten, dass unterschiedliche Lösungsstrategien vorgestellt werden. Es beginnen zunächst die Schüler, die weniger Lösungen gefunden haben. Die leistungsstärkeren Schüler, die alle Lösungsmöglichkeiten gefunden haben, stellen ihre Ergebnisse später vor.

## Erfahrungsbericht

Alle Schülerinnen und Schüler fanden schnell einen Zugang zu der Problemstellung der Aufgabe. Je nach Alter und Leistungsniveau waren die Lösungsstrategien und Hilfsmittel in ihrer Bandbreite erstaunlich und zeigten eine große Heterogenität sowohl innerhalb einer Jahrgangsstufe als auch in einer jahrgangsgemischten Gruppe. Da die Vorgehensweise nicht vorgegeben war, probierten die Schülerinnen und Schüler unterschiedliche Lösungsstrategien aus. Lernanfänger oder leistungsschwächere Kinder begannen zunächst damit, Jeans und T-Shirts in unterschiedlichen Kombinationen zu zeichnen. Die meisten gingen dabei eher unsystematisch vor.

Auch bei den Zeichnungen wurden große Unterschiede deutlich. Einige waren sehr originalgetreu, andere zeigten abstraktere Formen der Abbildung. Nach einiger Zeit hatten alle Kinder verschiedene Lösungen gefunden. Beim Vergleich mit dem Nachbarn oder anderen Schülern der Tischgruppe stellten sie fest, dass nicht alle die gleiche Anzahl an Möglichkeiten hatten. Es entstand eine rege Diskussion, in der die Ursache dafür gesucht wurde (Doppelungen, fehlende Kombinationen, falsche Farben …). Dabei entwickelte sich die einhellige Meinung, dass durch eine gewisse Systematik (siehe Bild 2 und 4) eine Doppelung nicht so schnell übersehen werden kann. Nachdem gemeinsam geklärt war, dass es offensichtlich neun verschiedene Kombinationen gibt, waren die Schüler an den unterschiedlichen Lösungsstrategien interessiert. Danach demonstrierten die leistungsstärkeren Schüler noch die erweiterte Kombinationsmöglichkeit mit den Strümpfen.

### Dokumente aus der Erprobung

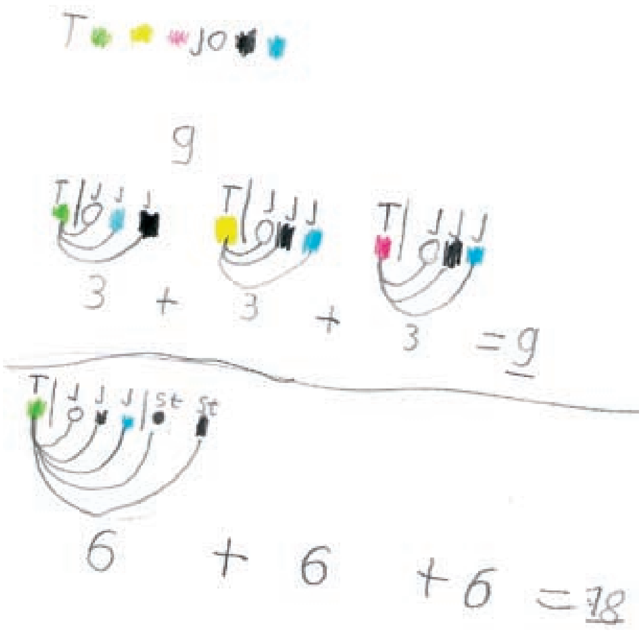
Anfang des 2. Schuljahres

**Bild 1**
Viele Schüler arbeiteten ähnlich wie Sebastian. Sie zeichneten die Möglichkeiten ungeordnet auf. Die meisten fanden trotzdem alle 9 Möglichkeiten, nur wenige Kinder fanden wie Sebastian weniger Möglichkeiten.

**Bild 2**
Finja ging strukturierter vor und kombinierte von oben nach unten die blaue Jeans mit allen möglichen T-Shirts, dann die weiße Jeans und zum Schluss die schwarze. Sie fand alle 9 Möglichkeiten. In der anschließenden Diskussion begründet sie ihr vorgehen damit, dass sie dann besser sieht, was sie schon hat.

**Bild 3**
Severin löste die Aufgabe sofort auf symbolischer Ebene. Mit minimalem zeichnerischen Aufwand arbeitete er sehr strukturiert und auffallend übersichtlich mit einer Art Baumdiagramm.

Beim Übertragen seines Verfahrens auf die Zusatzaufgabe zeichnete er nur noch eine Kombination und bildete rechnerisch die Analogie zum ersten Beispiel: „Wenn es hier 6 sind, dann sind es auch beim nächsten 6 und beim nächsten wieder …, also 6 + 6 + 6 und das sind …18 Möglichkeiten.“ Seine zeichnerische Darstellung hierzu ist sehr verkürzt und bietet eine gute Gelegenheit für ein gemeinsames Gespräch.




3. Schuljahr

Bei den Beispielen aus der 3. Jahrgangsstufe wird deutlich, dass die Schüler schon viel strukturierter an die Lösung der Aufgabe herangingen. Auch hier zeigte sich eine große Vielfalt an Lösungswegen. Es wurden unterschiedliche heuristische Hilfsmittel angewandt:

**Bild 4**
Viele Schüler nutzen die Tabelle.


**Bild 5**
Viele Schüler nutzen die Tabelle.

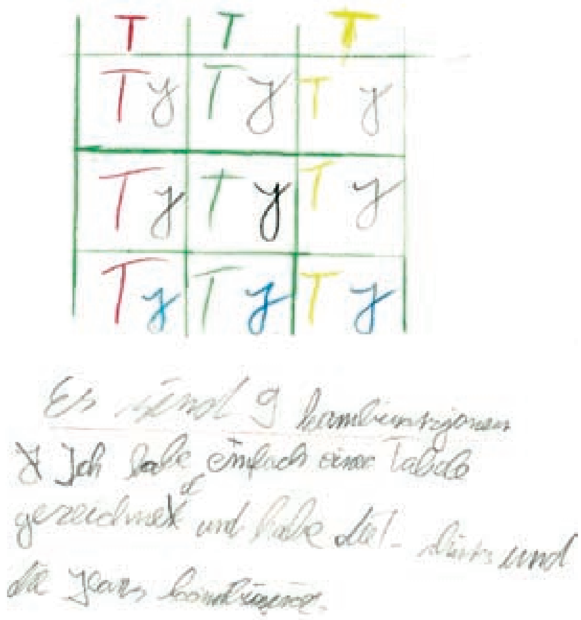


**Bild 6**
Andere machten Zeichnungen, die schon abstrakter ausfielen als in der 1. oder 2. Jahrgangsstufe.

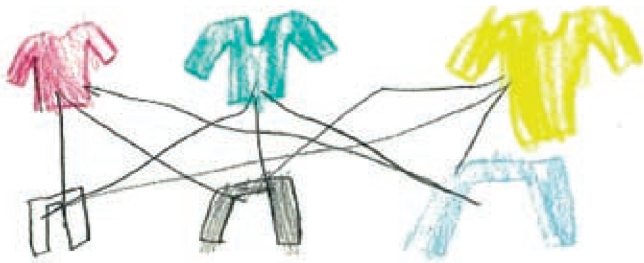


**Bild 7**
Hier sieht man eine sogenannte geordnete Aufstellung.

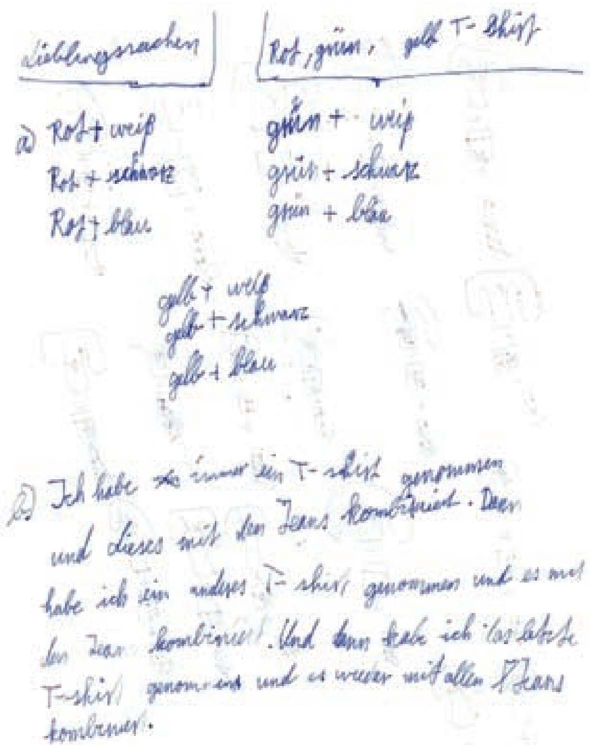



**Bild 8**
Für die erweiterte Aufgabe greift der Schüler dann wieder zur Zeichnung, die ihm mehr Übersicht vermittelt.

### Stolpersteine

– Wenn Schüler noch ungeübt sind, fällt es ihnen zunächst sehr schwer, ihren Lösungsweg zu reflektieren und in Worte zu fassen oder gar aufzuschreiben. Auch kurze Äußerungen und bescheidene Beiträge sind ein erster Erfolg. Mit Geduld, positiver Rückmeldung, Übung und Wiederholung lassen sich allmählich Fortschritte und immer detailliertere Beschreibungen der Lösungswege erzielen.

– Manche Kinder haben bei der Differenzierungsaufgabe mehr Möglichkeiten als erwartet gefunden. Das ergab sich aus der von der Lehrerin nicht bedachten Variante, dass Monika zwei verschiedene Strümpfe anziehen könnte. Daraus entspann sich eine interessante Diskussion über mathematische Möglichkeiten und der Alltagsrealität, in der die meisten Kinder gewöhnlich zwei gleichfarbige Strümpfe anziehen.

### Wie kann es weitergehen?

Es sollten sich Aufgaben mit ähnlicher Fragestellung anschließen, um den Schülern zu ermöglichen, ihren erprobten und reflektierten Lösungsweg an ähnlichen Aufgaben zu überprüfen. Einige Schüler erkennen schnell, dass die nächste Aufgabe (siehe unten) eine analoge mathematische Struktur hat und nur in einen unterschiedlichen Sachverhalt eingekleidet ist.

**Aufgabe „Farbige Türme“**
Du hast rote, gelbe und grüne Legosteine. Versuche, so viele unterschiedliche Türme wie möglich mit drei Etagen zu bauen. Jeder Turm soll aus den drei Farben bestehen. Jede Farbe muss einmal vorkommen.

**a** Welche verschiedenen Türme kannst du bauen?
**b** Beschreibe wie du vorgegangen bist.
**c** Wie viele Türme ergeben sich, wenn du auch blaue Bausteine zur Verfügung hast und die Türme vier Etagen haben?

**Aufgabe „Sattelschlepper“**
Du hast einen roten, einen blauen und einen gelben Sattelschlepper. Sie bestehen jeweils aus der Zugmaschine und einem Anhänger, beide haben die gleiche Farbe. Stelle nun Sattelschlepper in unterschiedlichen Farben zusammen.

**a** Welche und wie viele verschiedene Möglichkeiten hast du, um die Zugmaschinen mit jeweils einem der Anhänger zu kombinieren?
**b** Welche und wie viele Möglichkeiten ergeben sich, wenn du noch eine grüne Zugmaschine dazu bekommst?



### Literatur

Bruder, Regina.: Heureka-Problemlösen lernen. In: Mathematik lehren 115; Friedrich 2002

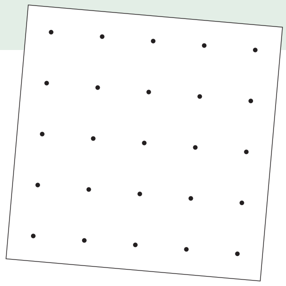
Büchter, Andreas/Leuders, Timo: Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen; Cornelsen-Scriptor 2005

Neubert, Bernd: Gute Aufgaben zur Kombinatorik in der Grundschule. In: S. Ruwitsch/A. Peter-Koop (Hrsg.), Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule. Offenburg; Mildenberger

# 2 Quadrate spannen

**1** Wie viele verschieden große Quadrate können auf einem Fünfer-Geobrett gespannt werden? Es darf nur gerade gespannt werden (nicht diagonal).

**2** Wie viele Quadrate kann man insgesamt auf dem Fünfer-Geobrett spannen? Zeichne alle auf.



**Worum geht es?**

Das Geobrett ist eine quadratische Platte, auf der in regelmäßigen Abständen Stifte angeordnet sind. Mit Gummiringen werden auf der Platte Muster und Figuren gespannt. Es gibt die Bretter in unterschiedlichen Größen, je nachdem ob drei, vier, fünf oder mehr Stifte pro Reihe angeordnet sind.

Die Arbeit mit dem Geobrett ermöglicht einen handlungsorientierten und experimentellen Geometrieunterricht. Das Spannen der Gummiringe bietet die Möglichkeit, Lösungsideen auszuprobieren, weiter zu entwickeln und eventuell wieder zu verwerfen. Durch späteres Aufzeichnen der für gut befundenen Lösungen auf ein Punktraster, das dem Geobrett entspricht, werden die enaktive und die ikonische Ebene miteinander verbunden.

Bei Aufgabe 1 geht es zunächst darum zu erkennen, dass es durch die vorgegebene Anzahl der Stifte auf dem Geobrett auch nur eine bestimmte Anzahl von verschieden großen Quadraten geben kann. Da beim Fünfer-Geobrett 25 Stifte vorhanden sind, um die man spannen kann, sind Quadrate mit folgenden Größen möglich: zwei mal zwei, drei mal drei, vier mal vier und fünf mal fünf. Da die Eigenschaften eines Quadrates vier rechte Winkel und vier gleich lange Seiten sind, können die entstehenden Quadrate jeweils auch nur über zwei, drei, vier oder fünf Stifte gespannt werden. Daraus ergibt sich ein Zusammenhang zur Arithmetik: Die Quadratzahlen werden durch die Anzahl der Stifte innerhalb der umspannten Fläche dargestellt.

Aufgabe 2 vertieft die Beobachtungen aus Aufgabe 1 und geht der Frage nach, auf wie viele unterschiedliche Arten ein Quadrat einer bestimmten Größe auf der gesamten Fläche gespannt werden kann. Durch Verschiebung der deckungsgleichen ebenen Figuren gibt es für das Quadrat der Seitenlänge zwei sechzehn Möglichkeiten, für das Quadrat der Seitenlänge drei neun Möglichkeiten, für das Quadrat der Seitenlänge vier vier Möglichkeiten und für das Quadrat der Seitenlänge fünf selbstverständlich nur eine Möglichkeit. Die mögliche Anzahl der Quadrate lässt sich auch rechnerisch ermitteln: Ein Quadrat der Seitenlänge zwei kann vier mal in einer Reihe gelegt werden. Es ist möglich, in vier unterschiedlichen Reihen mit dem Quadrat zu beginnen. Man hat also vier mal vier unterschiedliche Möglichkeiten, dieses Quadrat auf dem Geobrett zu spannen. Bei den Quadraten der Seitenlänge 3 gibt es je Reihe drei Möglichkeiten und es ist möglich, in drei unterschiedlichen Reihen zu beginnen. Man hat also drei mal drei

**Themenfeld**
Form und Veränderung

**Anforderung**
Erkennen und Beschreiben von Gesetzmäßigkeiten in geometrischen Mustern

**Allgemeine mathematische Kompetenz**
*Argumentieren:* mathematische Zusammenhänge erkennen und Vermutungen entwickeln

**Stufe**
1. bis 2. Klasse

**Zeitbedarf**
mindestens drei Unterrichtsstunden

**Material**
– Geobretter
– Gummiringe
– Kopiervorlage 2

gleich neun Möglichkeiten. Insgesamt lassen sich 30 Quadrate unterschiedlicher Größe an verschiedenen Stellen auf dem Fünfer-Geobrett spannen.

Wenn man die Quadrate systematisch von links nach rechts bzw. von oben nach unten verschiebt, erhält man eine entsprechend übersichtliche Ordnung der Anordnungsmöglichkeiten, die als Grundlage für weitere Beobachtungen dienen könnte. Selbstverständlich kann man nicht erwarten, dass ein so systematisches Vorgehen den Schülern vertraut ist. Aber das Vorstellen der unterschiedlichen Herangehensweisen bietet allen Schülern die Möglichkeit, von anderen zu lernen.

Neben den Überlegungen zur möglichen Anordnung der Quadrate werden auch die grundlegenden Eigenschaften des Quadrates systematisch erarbeitet (vier Seiten, vier Ecken, alle Seiten sind gleich lang, die gegenüberliegenden Seiten sind parallel zueinander, je zwei benachbarte Seiten bilden rechte Winkel) und eventuell die entsprechenden Fachbegriffe eingeführt. Die Verwendung der Fachbegriffe hilft den Schülern, sich miteinander zu verständigen und ihre Erfahrungen und Beobachtungen zu beschreiben. Auch zur Förderung der Kopfgeometrie und des räumlichen Vorstellungsvermögens sind die Fachbegriffe eine wichtige Orientierungshilfe.

Das abschließende Aufzeichnen dokumentiert die gefundenen Lösungen und sichert den Erkenntnisprozess. „Zeichnen ist einerseits eine handwerkliche Fertigkeit, die wie die meisten Fertigkeiten geübt werden muss. Darüber hinaus ist Zeichnen aber auch ein Mittel zum Erkenntnisgewinn. Zeichnungen legen Zusammenhänge offen, machen Problemlösungen möglich und schulen flexibles Denken." (Rudolf Kessler; Grundschule Mathematik 14/2007, S. 4)

### Wie kann man vorgehen?

Im Stuhlkreis werden den Schülern verschiedene Vierecke in unterschiedlichen Größen (z. B. Quadrat, Rechteck, Parallelogramm, Raute, Drachenviereck) präsentiert. Die verschiedenen Vierecke werden zunächst geordnet. Unterschiedliche Vorschläge bieten Anlass, über Ordnungskriterien zu reden und die Merkmale der unterschiedlichen Vierecke zu besprechen. Wie weit auf die unterschiedlichen Eigenschafen der Vierecke eingegangen wird, hängt vor allem vom Vorwissen der Schüler ab. Auf das Benennen folgender grundlegender Eigenschaften sollte nicht verzichtet werden: Jedes Viereck hat vier Seiten und vier Ecken. Beim Rechteck sind die gegenüberliegenden Seiten gleich lang und zueinander parallel, die benachbarten Seiten stehen senkrecht aufeinander und bilden rechte Winkel. Beim Quadrat sind alle vier Seiten gleich lang und die benachbarten Seiten bilden jeweils rechte Winkel. Nun werden die Quadrate herausgesucht und die anderen Vierecke beiseite gelegt. Die Eigenschaften werden noch einmal genannt und überprüft (z. B. Messen der Seiten, Parallelität durch Falten aufzeigen bzw. mit dem Geodreieck, rechte Winkel mit dem Faltwinkel bzw. dem Geodreieck überprüfen).

Danach wird die Arbeitsweise mit dem Geobrett besprochen und gezeigt, wie mit den Gummiringen auf dem Brett gearbeitet wird. Es ist wichtig, dass man nur einen Gummiring pro Figur nimmt, für weitere Figuren wählt man möglichst Gummiringe in unterschiedlichen Farben. Kinder, die noch nicht mit dem Geobrett vertraut sind, spannen als Vorübung eventuell zunächst unterschiedliche Vierecke und üben dabei den Umgang mit Gummiringen und Geobrett.

Aufgabe 1 wird in Einzelarbeit gelöst. Bei Aufgabe 2 kann mit einem Partner oder in der Gruppe gearbeitet werden. Gemeinsam werden mögliche Lösungsvarianten diskutiert. Das Spannen und Zeichnen kann abwechselnd durchgeführt werden. Nachdem alle gefundenen Möglichkeiten nicht nur gespannt sondern auch aufgezeichnet sind, können die einzelnen Vorlagen mit den eingezeichneten Quadraten ausgeschnitten werden. Im anschließenden Kreisgespräch werden die Vorgehensweisen besprochen, die gefundenen Möglichkeiten vorgestellt und die Ergebnisse verglichen. Die Frage nach der Unterscheidung identischer Lösungen bietet viel Gesprächsanlass. Es werden erste Vermutungen über die möglichen Anzahlen der unterschiedlichen Quadrate aufgestellt.

Im Anschluss werden die gefundenen Quadrate auf A3 Plakaten (jeweils ein Plakat für die Quadrate einer bestimmen Größe) gesammelt und versucht eine Ordnung zu finden, die einen schnellen Überblick über die tatsächliche Anzahl für jede Quadratgröße gibt.

## Erfahrungsbericht

Diese Aufgabe wurde im jahrgangsübergreifenden Lernen mit Schülern des 1. und 2. Lernjahres gemeinsam bearbeitet. Bei allen Schülern waren bereits Grundkenntnisse über die Merkmale von Vierecken vorhanden. Es mussten aber die entsprechenden Fachbegriffe eingeführt und ihr korrekter Gebrauch geübt werden. Bei der Partnerarbeit ließen sich drei unterschiedliche Herangehensweisen beobachten. Einige fingen wahllos an zu probieren und kontrollierten dann beim Aufzeichnen, ob dieses Quadrat vielleicht schon vorhanden sei. Andere begannen systematisch links oben mit den Quadraten der Seitenlänge zwei, drei, vier und fünf und rückten die Quadrate dann immer weiter nach rechts. Eine dritte Gruppe begann ebenfalls links oben, suchte aber erst alle möglichen Quadrate der Seitenlänge 2, danach alle Quadrate der Seitenlänge drei, vier und fünf.

Nachdem die aufgezeichneten Quadrate ausgeschnitten waren, wurden sie auf dafür vorbereitete A3 Plakate gelegt. Dabei entwickelten sich sehr interessante Gespräche über die Richtigkeit der gelegten Quadrate. Denn durch Drehung der ausgeschnittenen Teile veränderte sich auch die Lage der Quadrate. Nachdem die Kinder alle möglichen Quadrate gefunden hatten und geklärt war, wie viele es auf jedem Plakat sein müssten, wurden Expertengruppen von drei bis fünf Schülern gebildet. Sie kontrollierten und sortieren die Quadrate so, dass man auf einen Blick erkennen kann, ob alle Quadrate vorhanden sind. Diese Aufgabe bot einen guten Ausgangspunkt, um weitere Aufgabenstellungen mit anderen Geobrettmaßen unter diesem Gesichtspunkt zu erforschen und Zusammenhänge zu verdeutlichen. Zum Schluss erklärten die Expertengruppen, dass sie die gefundenen Quadrate für ihr Plakat systematisch nach ihrem jeweiligen Platz auf dem Geobrett geordnet hatten und so die richtige Anzahl bestimmen konnten. Dadurch wurden doppelte Lösungen identifiziert und fehlende ergänzt.

### Ergebnisse aus der Erprobung

**Bild 1**
Diese Schülergruppe hat die gefundenen Quadrate der Seitenlänge zwei auf dem Plakat ungeordnet platziert.

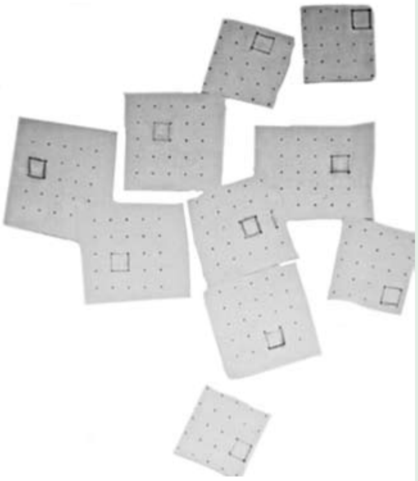


**Bild 2**
Die Gruppe hat die Quadrate der Seitenlänge drei systematisch geordnet und damit die tatsächliche Anzahl von Möglichkeiten bestimmt.

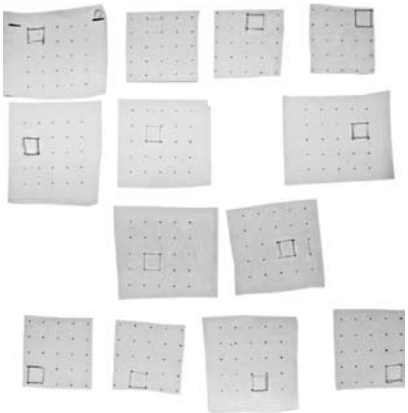
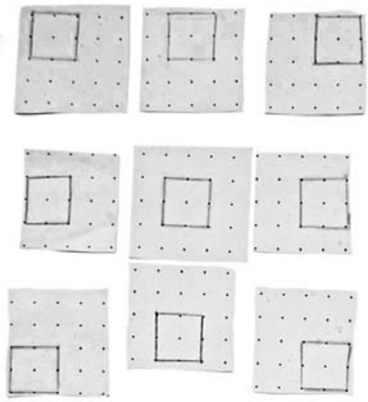


**Bild 3**
Ein erster Versuch, eine Ordnung in die Quadrate der Seitenlänge zwei zu bringen



### Fazit

Allen Schülern wurde einsichtig, dass man bei systematischer Vorgehensweise schneller zum Ziel gelangt und besser die Übersicht behält. Am Ende erkannten viele Kinder, dass man auch durch Rechnen auf die entsprechende Zahl der möglichen Quadrate kommen kann. Weiterhin übten sich die Schüler im richtigen und sauberen Zeichnen einer gespannten Figur auf einem Punktefeld. Das Suchen aller Möglichkeiten in Aufgabe 2 verlangte von den Schülern ein forschendes und entdeckendes Herangehen, sie waren mit Eifer von Anfang bis Ende dabei.

### Wie kann es weiter gehen?

- Aufgaben auf einem Geobrett mit anderer Größe (z. B. 6 mal 6); Ergebnisse mit den Kenntnissen vom 5 mal 5 Geobrett vergleichen
- Rechtecke anstelle der Quadrate auf dem 5 mal 5 Brett spannen
- andere vorgegebene Figuren spannen und abzeichnen
- ältere oder besonders interessierte Schüler können verschiedene Dreiecke untersuchen

### Literatur

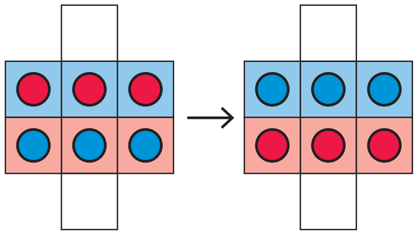
Senftleben, Hans-Günter: Welche Figur entsteht? In: Grundschule Mathematik 18/2008; Kallmeyer 2008

Glaser, Birgit/Wegener, Aysha: Die Reise über das Geobrett; In: Grundschulunterricht Mathematik 04/2008; Oldenbourg 2008

Senftleben, Hans-Günter: Aufgabensammlung für das große Geobrett; Ritter 2001

# 3 Schiebespiel

Verschiebe mit möglichst wenigen Zügen die roten Plättchen auf die roten Felder und die blauen Plättchen auf die blauen Felder. Du darfst nur senkrecht oder waagerecht schieben. Um- und Rückwege sind erlaubt, Überspringen von Plättchen ist verboten. Das Spiel ist beendet, wenn alle 6 Plättchen auf den Feldern ihrer eigenen Farbe liegen: Rot auf rot und blau auf blau.



## Worum geht es?

Dieses Spiel fordert zum Knobeln heraus: Es gibt kein eindeutiges Lösungsverfahren – viele Wege führen zum Ziel entsprechend den individuellen Möglichkeiten und Erfahrungen der Kinder. Über die Handlung des Verschiebens der Plättchen lassen sich die Wege korrigieren und neue Strategien entwickeln. Nach mehrmaligem Spielen werden die Antizipationen von Spielzügen bei den meisten Schülern sicherer: Sie verinnerlichen bereits erfolgreich beschrittene Wege und kombinieren sie mit anderen. Geschult wird dabei das Handeln in der Vorstellung: Spielzüge werden im Kopf durchgespielt und ihre Konsequenzen bedacht, bevor der Spielzug tatsächlich ausgeführt wird. Dies stellt eine wichtige Voraussetzung dar für alle kopfgeometrischen und kopfrechnerischen Übungen. Auch an das Gedächtnis werden Anforderungen gestellt. Es gilt, sich einen erfolgreichen Weg, der mehrere Spielzüge umfasst, zu merken, damit er jederzeit wiederholbar ist. Betont langsames Spielen kann das Bewusstwerden über alternative bzw. besonders geschickte Wege erhöhen und das Erinnerungsvermögen aktivieren.

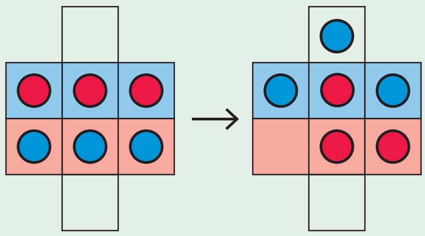
Der Spielplan besteht aus acht Feldern in drei unterschiedlichen Farben. Das Ziel besteht darin, dass am Ende alle roten und alle blauen Spielsteine die Plätze getauscht haben. Die drei roten Plättchen liegen dann auf den roten Feldern und die drei blauen Plättchen auf den blauen Feldern. Die weißen Felder (Parkfelder) dienen lediglich zum Rangieren der Steine während des Spiels. Hier darf jeweils nur ein Stein „geparkt“ werden. Die Anzahl der Spielzüge ist je nach Spielverlauf unterschiedlich, man braucht jedoch mindestens 16 Züge.

Eine Möglichkeit, die Aufgabe in 16 Zügen zu bewältigen, ist die folgende. Das mittlere rote Plättchen wird ins untere Parkfeld verschoben (1). Jetzt rückt das rechts liegende rote Plättchen in das mittlere blaue Feld (2), sodass die beiden blauen Plättchen rechts herum nachziehen können (3, 4). Nun ist der Weg für die beiden in der Mitte liegenden roten Plättchen frei: Sie werden jeweils um 2 Felder nach oben geschoben (5, 6, 7, 8). Das dritte rote Plättchen rückt nun in die mittlere Spalte (9), so dass jetzt alle roten Plättchen untereinander liegen. Nun wird das links oben liegende blaue Plättchen nach unten in die untere Reihe geschoben (10). Das in der Mitte liegende rote Plättchen wandert nach links (11) und das unten liegende rote Plättchen ein Feld nach oben (12). Nun können die beiden rechts liegenden blauen Plättchen rechts herum in die untere Reihe (13, 14) und

**Themenfeld**
Form und Veränderung

**Anforderung**
räumliche oder ebene Veränderungsprozesse ausführen und beschreiben

**Allgemeine mathematische Kompetenz**
*Problemlösen:* Lösungsstrategien entwickeln und nutzen



**Stufe**
1. bis 6. Klasse,
besonders geeignet für jahrgangsgemischte Lerngruppen

**Zeitbedarf**
1 bis 2 Unterrichtsstunden

**Material**
- Magnetplättchen
- Spielpläne
- Wendeplättchen
- Kopiervorlage 3

das rote Plättchen nach rechts (15) und das rote Plättchen aus dem oberen Parkfeld nach unten verschoben werden (16). Eine Grundstrategie von Schiebespielen ist es, Wege so zu öffnen, dass kreisförmige Spielzüge ermöglicht werden.

## Wie könnte man vorgehen?

Wird das Spiel in Klasse 5 oder 6 angeboten, können sich die Schüler durch Lesen der Spielanleitung selbst den Inhalt erschließen. In den Klassen 1 bis 4 bietet sich bei fehlender Vorerfahrung eine gemeinsame Einführung des Spiels an: Die Lehrerin hat hierzu den Plan an die Magnettafel gezeichnet. Zunächst gilt es, den Spielplan zu verstehen: Wie viele Quadrate gibt es? Wie sind sie angeordnet? Was könnten die unterschiedlichen Farben bedeuten? Nach dem Mitteilen des Spielzieles gibt es erste Schiebeversuche mit Magneten in entsprechender Farbe an der Tafel, bis die Schüler die Kernidee verstanden haben. Danach empfiehlt sich das Abzeichnen des Spielplans, das mit Hilfe einer Schablone (Pappe) oder auch aus der Hand erfolgen kann. Auch dies aktiviert das räumliche Denken und ist eine wichtige Orientierungsübung.

Dann haben alle Schüler ausreichend Gelegenheit, das Spiel allein oder mit einem Partner zu spielen. Die Schüler werden unterschiedlich viele Versuche benötigen, um das Spielziel zu erreichen. Für Schüler, die alle Plättchen erfolgreich verschoben haben, kann die nächste Aufgabenstellung formuliert werden: „Protokolliert die Anzahl der Züge. 16 Züge sind das beste Ergebnis." Diese Aufgabenstellung stellt eine erhöhte Anforderung dar, weil zu dem „Wege suchen und merken" noch das „Mitzählen" kommt. Alle Versuche werden protokolliert (d. h. die Anzahl der benötigten Züge wird aufgeschrieben), wer das Spiel mit 16 Zügen dreimal geschafft hat, demonstriert seine Fähigkeit einer Nachbarin oder der Lehrerin.

Eine abschließende Präsentation verschiedener individueller Wege an der Magnettafel eröffnet die Möglichkeit eines Klassengespräches und damit den Austausch über Effektivität und Schlauheit der Wege. Um in ein Gespräch über unterschiedliche Schiebestrategien zu kommen bietet es sich an, eine Spielsituation drei bis vier Züge vor Schluss zu unterbrechen und dann die Frage nach der Anzahl der noch notwendigen Züge zu stellen. Hier müssen sich die Schüler ihre gedachten Wege genau bewusst machen und sie anschließend an der Tafel demonstrieren.

## Dokumente aus der Erprobung

**Bild 1**
Paul merkt sich seinen Weg über das Aufzeichnen von Pfeilen und Zahlen. Die Pfeile bezeichnen die Richtung, in die das nächste Plättchen auf das freie Feld gezogen werden muss. Wenn ein blaues und ein rotes Plättchen gezogen werden könnten, markiert er die Schieberichtung durch einen Pfeil und schreibt zusätzlich die Farbe des Plättchens, das bewegt werden soll, auf.

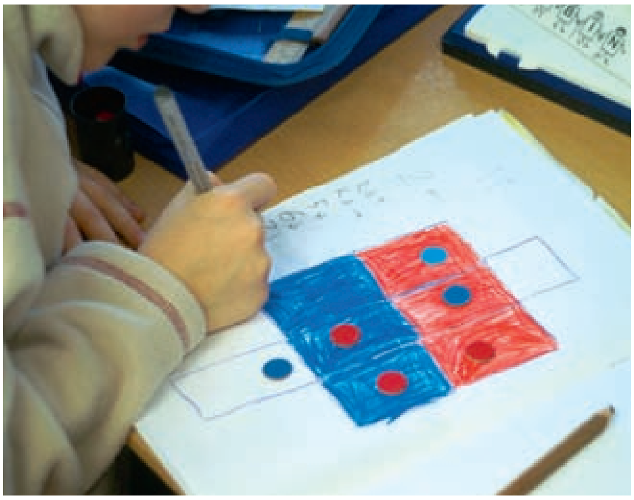
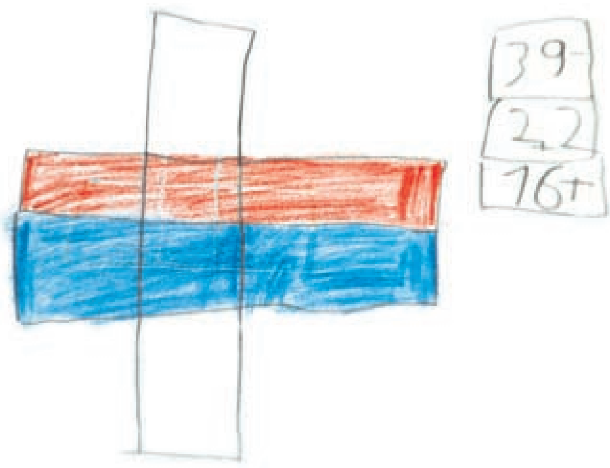


**Bild 2**
Kevin hat die Anzahl der benötigten Spielzüge protokolliert. Es wird deutlich, dass er gute Fortschritte gemacht hat. 16+ bedeutet, dass er zweimal mit 16 Zügen zum Ziel gekommen ist.




## Stolpersteine

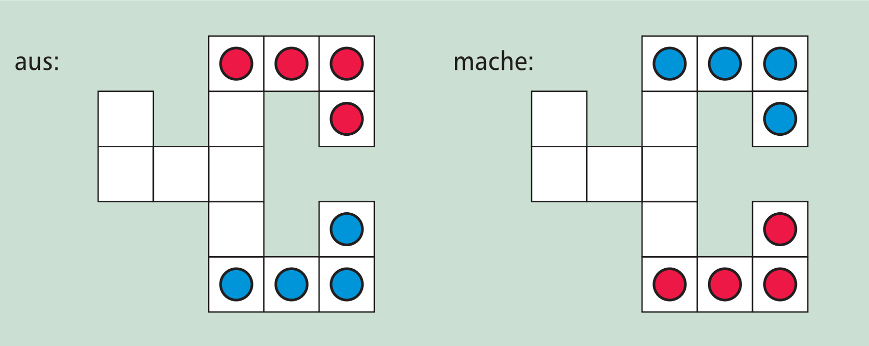
- Das Zeichnen des Spielfeldes ohne Schablone fällt machen Schülern schwer. Besondere Probleme kann die Anordnung der Quadrate im Spielfeld und auch die Abbildung in der entsprechenden Größe bereiten. Jedes Quadrat muss mindestens so groß sein, dass ein Plättchen hinein passt. Ein Gespräch über geschickte oder auch ganz einfache Vorgehensweisen beim Zeichnen hat diesen Kindern geholfen.
- Einige Kinder konnten sich aufgrund ihres schlechten räumlichen Gedächtnisses ihre Wege nur ansatzweise merken. Manchen Kindern half der Vorschlag, sich Notizen zu machen, um sich an den Weg erinnern.
- Das Beschreiben des eigenen Weges machte vielen Kindern Schwierigkeiten. Das Unterbrechen einer Spielsituation drei bis vier Züge vor Schluss und die Frage nach einer sinnvollen Schiebefolge zur Beendigung des Spiels, waren große Herausforderungen.

## Fazit

- Alle Schülerinnen und Schüler waren interessiert daran, zu einer Lösung zu kommen.
- Es entstanden lebendige Situationen, in denen die Schüler sich gegenseitig unterstützen und ihre Hilfen auch verbalisierten.
- Alle Kinder haben einen Weg gefunden – allerdings nicht immer den kürzesten.
- Manche Schüler waren stolz darauf, unterschiedliche Wege zu präsentieren.
- Viele Schüler haben sich Skizzen gemacht oder haben ihr Vorgehen schriftlich formuliert.
- In den folgenden Wochen wurden andere Schiebespiele eingesetzt. Es wurde deutlich, dass fast alle Kinder hier schon auf einem höheren Niveau beginnen konnte.

## Wie kann es weitergehen?

Eine Erweiterung und Vertiefung dieses Spiels besteht in der Veränderung der Spielpläne mit zunehmender Komplexität. Bei diesem Schiebespiel (Müller/ Wittmann: Das Zahlenbuch 1, Lehrerband) geht es hauptsächlich um das Entwickeln einer systematischen Abfolge von bestimmten Zugfolgen. Wer hier nicht planvoll vorgeht, kann kaum zum Ergebnis kommen. Wittmann beschreibt einen möglichen Schiebeprozess in seiner Anleitung für Lehrer folgendermaßen: „Drei blaue Steine wandern in den freien Haken. Die vier roten ziehen möglichst weit nach oben, so dass der Weg für die drei blauen in die Endposition frei wird. Jetzt ist noch der eingeklemmte blaue Stein zu befreien. Dazu ziehen drei der vier roten Steine in den freien Haken, der vierte rote zieht mit dem vierten blauen am freien Haken vorbei und gibt für die roten im Haken den Weg in die Endposition frei. Schließlich rückt der vierte blaue Stein in den Haken, so dass der vierte Rote nach oben ziehen kann, womit der Weg zur Endposition auch für den vierten blauen Stein offen ist."





**Literatur**

Wittmann, Erich Chr./Müller, Gerhard N.: Spielen und Überlegen. Die Denkschule Teil 1 und Teil 2; Klett

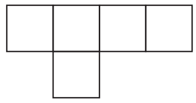
Wittmann, Erich Chr./Müller, Gerhard N.: Das Zahlenbuch 1. Lehrerband; Klett 1994


**Tipp**

Rush Hour – Das geniale Stauspiel; Think Fun 2006

# 4 Pentominos

Findet weitere Quadratfünflinge.
Zeichnet sie auf Karopapier und schneidet sie aus.
Wie viele unterschiedliche Pentominos gibt es?



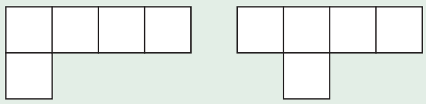
**Worum geht es?**

Die Pentominos gehören zur Familie der Polyominos. Ein Polyomino ist eine Figur aus identischen Quadraten, die aneinandergereiht sind und dabei jeweils mindestens eine Seite gemeinsam haben. Der Begriff Polyomino geht auf Solomon W. Golomb zurück, der ihn 1953 in Harvard bei einem Vortrag einführte. Polyominos sind in den letzten Jahrzehnten zu einem beliebten Thema der Unterhaltungsmathematik geworden.

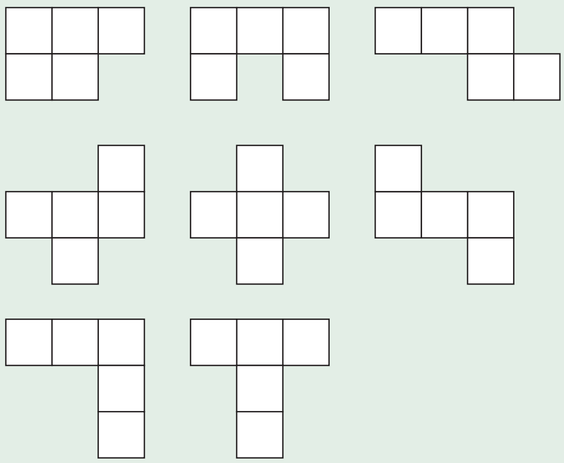
Pentominos sind Figuren aus 5 zusammenhängenden Quadraten. Die Quadrate müssen sich jeweils mit einer Seite berühren. Figuren, die sich durch drehen oder spiegeln ineinander überführen lassen, werden als identisch betrachtet. Es gibt keine allgemeine Formel, um die Anzahl verschiedener Polyominos aus n Quadraten zu bestimmen. Pentominos lassen sich insgesamt 12 unterschiedliche finden:

1. fünf Quadrate in einer Reihe:

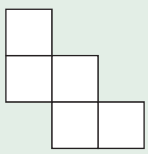
2. vier Quadrate in einer Reihe:



3. drei Quadrate in einer Reihe:



4. zwei Quadrate in einer Reihe:



**Themenfeld**
Form und Veränderung

**Anforderung**
arithmetrische Vorstellungen mit Hilfe von geometrischen Veranschaulichungen stützen und begründen

**Allgemeine mathematische Kompetenz**
*Argumentieren:* arithmetische und geometrische Muster selbst entwickeln, systematisch verändern und beschreiben

**Stufe**
3. bis 5. Klasse,
geeignet auch für jahrgangsgemischte Lerngruppen

**Zeitbedarf**
mindestens 5 Unterrichtsstunden

**Material**
– Scheren
– Kopiervorlage 4

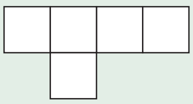
Alle anderen möglichen Anordnungen sind mit den hier vorgestellten identisch. Ob man alle Möglichkeiten gefunden hat, erschließt sich aus der Anschauung.

Für die Arbeit in der Schule bieten sich die Pentominos an, da ihre Anzahl für die Schüler überschaubar ist (Hexominos gibt es immerhin schon 35, Heptominos sogar schon 108) und dennoch groß genug für vielfältige Untersuchungen und Beobachtungen.

Aufgabenstellungen zu folgenden Schwerpunkten eignen sich als Einstieg in das Thema besonders:
- alle Pentominos finden
- Gesetzmäßigkeiten finden, nach denen sich die Pentominos anordnen oder sortieren lassen
- mit Pentominos Muster erfinden und legen
- vorgegebene Muster und geometrische Formen mit Pentominos auslegen

### Wie könnte man vorgehen?

Eines der Pentominos wird der Klasse als Beispiel aus Formenplättchen, Pappe oder Faltpapier auf dem Fußboden im Stuhlkreis oder an der Tafel präsentiert:



In Arbeitsgruppen wird die Aufgabe bearbeitet, weitere Aufgaben zu finden. Die Offenheit der Aufgabenstellung schafft Spielräume für unterschiedliche Herangehensweisen und Lösungswege. Es erscheint wenig hilfreich, die Anzahl der möglichen Pentominos schon von vornherein vorzugeben. Das Vorgeben von Karopapier, das auf eine Kantenlänge von 1,5 bis 2 cm vergrößert wurde, erleichtert den Schülern die Arbeit erheblich.

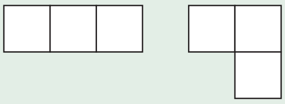
Im auswertenden Unterrichtsgespräch stellen die Gruppen ihre Ergebnisse vor. Spannend ist zunächst die Frage, wie viele Pentominos die Gruppen jeweils gefunden haben. Eine lebhafte Diskussion um die Fragen:
- Wann sind 2 Pentominos gleich?
- Gelten auch Pentominos, die sich nur in den Ecken berühren?
- Wie viele Pentominos gibt es überhaupt?
- Woher weiß man, ob man alle gefunden hat?

kann sich hier ergeben. Falls noch nicht alle 12 Möglichkeiten gefunden wurden, werden gemeinsam die noch fehlenden gesucht. Dabei lässt sich beobachten, welche Schüler bereits systematisch vorgehen und wer ungeordnet probiert.

Jede Arbeitsgruppe stellt danach alle Pentominos her. Auch hier sind Vergrößerungen von Karopapier mit zwei Zentimeter Kantenlänge auf festes Papier hilfreich. Die Gruppe versucht, eine Ordnungsstruktur für die Pentominos zu finden. Dies erfordert einen längeren Diskussionsprozess, da viele unterschiedliche Möglichkeiten der Anordnung und Klassifizierung denkbar sind. Die Suche nach verbindenden und auch unterscheidenden Strukturen ist ein wichtiger Prozess, bei dem die Schüler sich gegenseitig mit unterschiedlichen Sichtweisen und Ideen anregen können. Erst wenn eine Anordnung gefunden ist die alle überzeugt, werden die Pentominos geordnet auf ein Plakat geklebt und mit den entwickelten Ordnungskriterien kommentiert. Im auswertenden Unterrichtsgespräch erläutert und begründet jede Gruppe ihr Vorgehen.

Anstelle des Aufzeichnens und Ausschneidens können die Pentominos auch aus fertigen Quadraten (aus geviertelten Faltpapier oder Notizzetteln) gelegt werden.

Im 3. Schuljahr könnte man zunächst vorbereitend über Quadratdrillinge und Vierlinge sprechen.
Die Drillinge sind schnell gefunden:



Hieraus lassen sich die Vierlinge durch Anlegen eines weiteren Quadrats konstruieren.

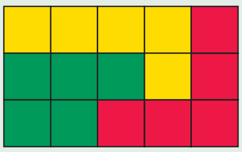
Zur Weiterarbeit bieten sich mit den Pentominos vielfältige Legeübungen an.
- Welche Formen lassen sich zu einem Rechteck zusammen legen?
- Kann man alle 12 Pentominos zu einem Rechteck zusammenlegen?

Nach einer längeren Phase des Ausprobierens lässt sich ein Zusammenhang zu unterschiedlichen Einmaleinsreihen entdecken. Da die Pentominos aus jeweils fünf Teilen bestehen, muss ein geschlossenes Rechteck aus einer durch fünf teilbaren Anzahl von Quadraten bestehen. Hier ergibt sich auch ein enger Zusammenhang zur Flächeninhaltsberechnung des Rechtecks.

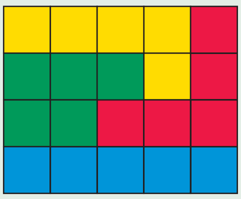
- Rechtecke zum Einmalfünf finden

Beispiellösungen:

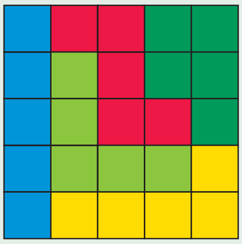
3 mal 5



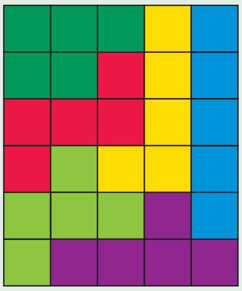
4 mal 5



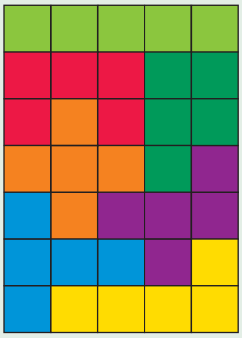
5 mal 5



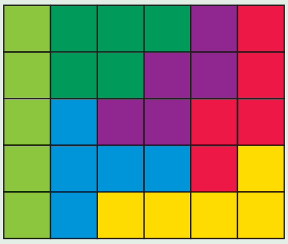
6 mal 5



7 mal 5

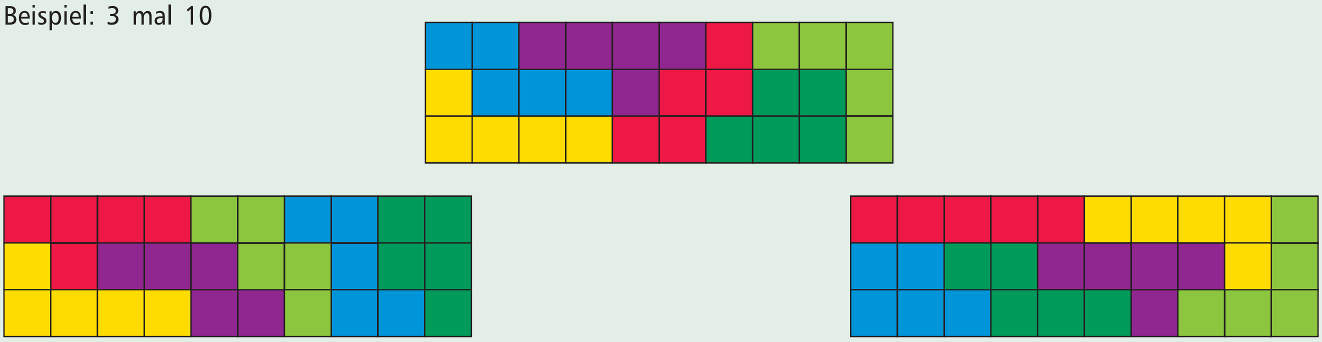


5 mal 6



– zu einer Malaufgabe möglichst viele Pentomino-Rechtecke finden

Beispiel: 3 mal 10



Ein 10 mal 6 Rechteck ist eine echte Herausforderung, so scheint es jedenfalls. Nur eine einzige Lösung zu finden, ist auch für Erwachsene nicht leicht. Wer hätte gedacht, dass es insgesamt 2339 verschiedene Lösungsmöglichkeiten für ein 10 mal 6 Rechteck gibt?

Weitere Aufgaben:
– mit allen 12 Formen ein Rechteck legen
– aus 9 Teilen ein großes Pentomino legen
– vorgegebene Figuren auslegen
– vorgegebene Figuren mit nur einem Typ der Pentominos auslegen (Parkettierungen)
– Welche der Pentominos ergeben durch Zusammenfalten eine offene Schachtel? (in Klasse 3 als Vorbereitung auf die Arbeit an Würfelnetzen)

Durch die vielen unterschiedlichen Fragestellungen sowie die Spielräume bei der Intensität der Beschäftigung mit einer Aufgabe ergibt sich ganz von allein eine natürliche Differenzierung.

## Dokumente aus der Erprobung

Die Unterrichtssequenz wurde in einer 4. Klasse zum Ende des Schuljahres erprobt. Die Aufgabenstellung war für alle Schüler interessant und motivierend.

Im ersten Unterrichtsgespräch zur Frage: „Was ist ein Pentomino?“ wurde herausgearbeitet, dass sich bei den Quadraten jeweils eine Seite berühren muss. In den Arbeitsgruppen wurden dann weitere Fünflinge gesucht (die Schüler erhielten dazu farbiges Papier, auf das große Karos kopiert waren), ohne dass deren genaue Anzahl bekannt war. Dies sorgte im Auswertungsgespräch für eine gute Diskussionsgrundlage: Wann sind Fünflinge gleich? Was ist mit spiegelsymmetrischen Fünflingen? Habt ihr alle möglichen Fünflinge gefunden?

Erstaunlich viele verschiedene Ideen entstanden beim Ordnen der Pentominos. Die Schülergruppen fanden ganz unterschiedliche Ordnungskriterien:

**Bild 1**
einige Fünflinge sehen aus wie Buchstaben:

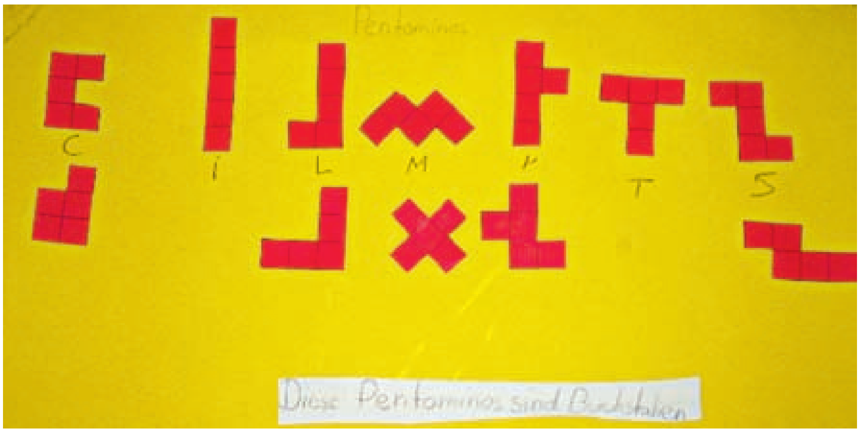



**Bild 2**
systematisch nach der Anzahl der Quadrate pro Reihe:

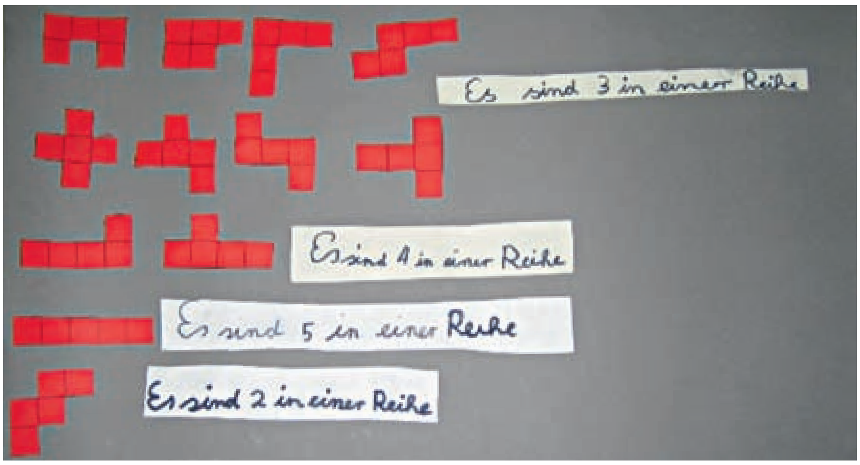
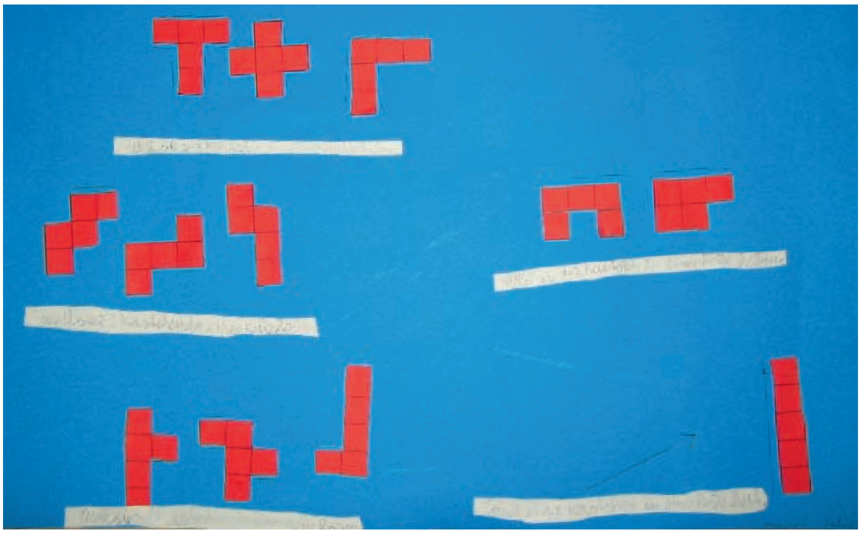
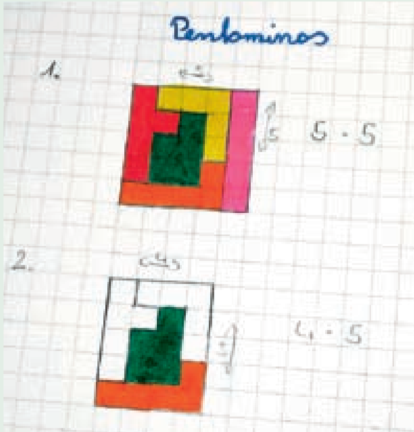


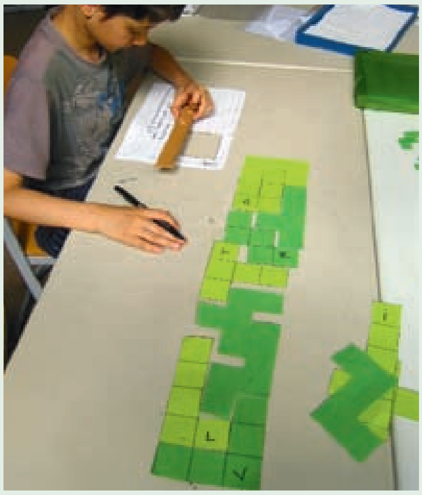
**Bild 3**
noch weiter ausdifferenziert
2 mal 3 und
1 mal 3 und
1 mal 2



Das Suchen und Aufzeichnen von Rechtecken erstreckte sich über die Mathematikstunden mehrerer Tage. Hierbei entdeckten einige Schüler, dass die Flächeninhalte der Rechtecke als Anzahl von Quadraten immer eine durch fünf teilbare Anzahl sein muss. Und so wurde bald versucht, zu jeder Einmaleins-Aufgabe der Fünferreihe ein Rechteck aus Pentominos zu finden. In den Schülergruppen wurde auffallend angeregt diskutiert und auch sehr liebevoll gezeichnet. Immer wieder wurden Erkenntnisse und Beobachtungen einzelner Gruppen im Klassengespräch aufgegriffen.




Zum Abschluss der Unterrichtseinheit wurde ein Buch zusammengestellt, in dem alle gefundenen Rechtecke zu Einmaleinsaufgaben abgebildet wurden. Je 2 Kinder waren für alle gefundenen Rechtecke zu jeweils einer 1 mal 5, 1 mal 10 oder 1 mal 15 Aufgabe verantwortlich. Sie mussten dazu immer wieder die gefundenen Rechtecke der anderen Kinder vergleichen und entscheiden, welche sie schon aufgezeichnet hatten oder auch nicht.



Alle Kinder bekamen am Ende der Unterrichtseinheit eine Miniaturversion des Buches im DIN-A-6-Format.

**Wie kann es weiter gehen?**

- mit Quadrat-Sechslingen
- mit Mehrlingen von gleichseitigen Dreiecken
- Flächenberechnung des Rechtecks durch Auslegen mit Einheitsquadraten



**Literatur**

Maria Koth/Notburga Grosser: Das Pentomino-Buch; Aulis 2004

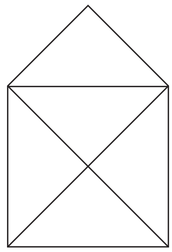
Hirt, Ueli/Wälti, Beat: Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte; Klett/Kallmeyer 2008

Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung / SINUS-Transfer Grundschule / Individuelle Stärken herausfordern – 11 Lernumgebungen für einen differenzierenden kompetenzorientierten Mathematikunterricht

# 5 Das Haus vom Nikolaus

**1** Versuche das Haus vom Nikolaus in einem Strich zu zeichnen.
Versuche es mehrmals. Wann gelingt es? Wann gelingt es nicht?

**2** Erfinde eigene Figuren, die sich in einem Strich zeichnen lassen!



### Worum geht es?

Das Durchlaufen von Netzen ist ein Thema der Topologie. In der mathematischen Fachsprache besteht das Haus vom Nikolaus aus fünf Knoten, die durch Kanten verbunden sind. Das Problem geht zurück auf das „Königsberger Brückenproblem" des Mathematikers Leonhard Euler. Euler hat erkannt, dass ein Rundweg vom Startpunkt aus und wieder zurück zum Ausgangspunkt nur möglich ist, wenn die Figur nur Knoten mit einer geraden Anzahl von Kanten besitzt. Dies leuchtet relativ leicht ein: Darf man keinen Weg mehrfach gehen, so benötigt man für jeden Weg, der zu einem Knoten führt auch wieder einen Weg, der von dem Knoten wegführt. Hat der Knoten eine ungerade Anzahl von Kanten, so gelangt man irgendwann wieder über den letzten Weg zu diesem Knoten, kann ihn aber nicht mehr verlassen. Hat sie nur gerade Knoten, ist ein Rundweg sicher. Besitzt sie ungerade Knoten, dann ist ein Rundweg nicht möglich.

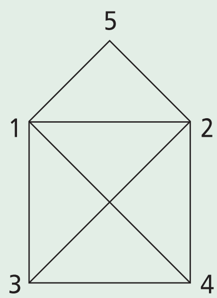
Beim Haus vom Nikolaus ist kein Rundweg gesucht, sondern die Möglichkeit, das Haus in einem Zug zu zeichnen. Es kann also einen Anfangs- und einen Endpunkt geben mit jeweils einer ungeraden Anzahl von Kanten. Hat die Figur nur Knoten mit geradzahligen Kanten oder aber genau zwei Knoten mit einer ungeraden Anzahl von Kanten, dann kann der Weg in einem Zug gezeichnet werden.

Das Zeichnen in einem Zug ohne Wege doppelt zu zeichnen gelingt jedoch nicht von allen Knoten aus. Die Frage ist, an welchen Stellen angefangen werden muss, damit sich das Haus vollständig in einem Zug zeichnen lässt. Folgende Überlegungen machen die Sache durchsichtig:
In den Ecken 1 und 2 treffen sich vier Linien.
In der Ecke 5 treffen sich zwei Linien.
In den Ecken 3 und 4 treffen sich 3 Linien.
Das bedeutet, dass die Ecken 1 und 2 beim Zeichnen zweimal durchlaufen werden müssen, die Ecke 5 aber nur einmal. Die Ecken 3 und 4 haben die Besonderheit, dass sie einmal vollständig durchlaufen werden und einmal einen Anfangs- oder Endpunkt bilden müssen. Deswegen muss entweder Punkt 3 oder Punkt 4 der Anfangspunkt der Zeichnung sein. Der jeweils andere Punkt ist dann der Endpunkt.

**Themenfeld**
Form und Veränderung

**Anforderung**
Handlungen nach mündlichen, schriftlichen und zeichnerischen Vorgaben ausführen

**Allgemeine mathematische Kompetenz**
*Argumentieren:* mathematische Zusammenhänge nutzen und Vermutungen entwickeln




**Stufe**
4. bis 6. Klasse

**Zeitbedarf**
3 bis 4 Unterrichtsstunden

**Material**
– Stifte
– Papier

Die Frage, wie viel Möglichkeiten es gibt, das Haus vom Nikolaus zu zeichnen, könnte über ein Baumdiagramm systematisch gelöst werden. Wenn man am Punkt 3 unten links startet, ergeben sich insgesamt 44 Möglichkeiten, das Haus in einem Zug zu vollenden. Natürlich gibt es dann (wegen der Symmetrie des Hauses) auch vom Punkt 4 unten rechts 44 Möglichkeiten. Das macht also insgesamt 88 Möglichkeiten, das Haus vom Nikolaus in einem Zug zu zeichnen.

**Wie kann man vorgehen?**

Den meisten Kindern ist die Fragestellung bekannt und viele Kinder kennen mindestens eine richtige Lösung. Es bietet sich an, dass ein Schüler zunächst das Haus vom Nikolaus in einem Strich vor den Augen der Kinder an die Tafel zeichnet. Anschließend versuchen alle Kinder für sich allein die Aufgabe zu lösen. Das Ausprobieren mit möglichst unterschiedlichen Anfangspunkten regt zum Nachdenken an und lässt Auffälligkeiten beobachten.

Hilfreich für die Schüler ist es, den jeweiligen Anfangspunkt zu markieren und das Haus nicht zu vollenden, wenn sie in einer Sackgasse gelandet sind. Die anschließende gemeinsame Sammlung einiger Schülerversuche an der Tafel wird Irrwege deutlich machen aber auch die Erkenntnis bringen, dass das vollständige Haus nur von den beiden Punkten unten aus konstruierbar ist. Das Reproduzieren an der Tafel fordert das visuelle Gedächtnis heraus. Viele Schüler vergessen auf dem Weg ihren Anfangspunkt oder erinnern den Streckenverlauf nicht mehr genau. Die Aufgabe stellt deshalb eine gute Übung zum Training der bewussten visuellen Erinnerung dar. Um ein Unterrichtsgespräch zu initiieren kann die Frage, was bestimmte Anfangspunkte von anderen unterscheidet und ob es möglich ist, dass Anfangs- und Endpunkt zusammen fallen, ein entscheidender Impuls sein.

In einem zweiten Schritt wird die Aufgabenstellung erweitert. Die Schüler sind aufgefordert eigene Figuren zu erfinden, die sich in einem Strich zeichnen lassen. Obwohl bei dieser Aufgabe der Fokus auf dem vollständigen Zeichnen der geplanten Figur liegt, machen die Schüler auch Erfahrungen mit dem Nichtgelingen. Dies wirft die Frage nach den Ursachen auf: Wie kann ich es vermeiden, eine Figur zu entwerfen die „nicht geht"?

Natürlich ist es für jedes Kind interessant, wenn andere Schüler ihre Eigenproduktionen zur Weiterarbeit nutzen. Als Möglichkeit der vertiefenden Arbeit bietet es sich an, einige interessante und unterschiedliche Schülerproduktionen auf einem Arbeitsblatt zusammenzustellen, die dann die Grundlage für Gespräche über gemeinsame oder auch trennende Erfahrungen darstellen können. Auch Figuren, die sich von keinem Punkt aus mit einem Strich zeichnen lassen, bieten wertvolle Gesprächsanlässe. Eine Rückkopplung mit dem Erfinder der Figur ist erwünscht.

Eine vertiefende Betrachtung der Ergebnisse im Stuhlkreis oder vor der Tafel bietet anschließend einen guten Anknüpfungspunkt für problemorientierte Gespräche und für ein tieferes Verständnis der Wegeproblematik. Bei leistungsstarken Schülern kann der Austausch von Begründungen auch in verallgemeinernde Aussagen münden. Leistungsschwächere Schüler bleiben eher auf der beschreibenden Ebene und stellen genau fest, von welchen einzelnen Anfangspunkten aus die vollständige Figur konstruierbar ist.

### Dokumente aus der Erprobung

**Bild 1**
Tina entwirft parallele klassische Formen.
Die linke Spalte ist den Figuren zuzuordnen, die sich nicht in einem Strich zeichnen lassen.
Die rechte Spalte zeigt Figuren mit jeweils zwei Kreuzungen, in denen sich drei Linien treffen.
Sie sind damit in einem Strich konstruierbar.

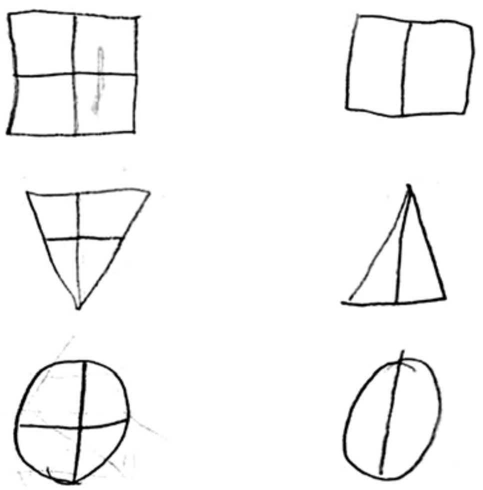


**Bild 2**
Justin erfindet anspruchsvolle Formen, die nur aus Quadraten bestehen. Genau wie beim Haus vom Nikolaus haben sie jeweils genau zwei Kreuzungen, in denen sich drei Linien treffen.

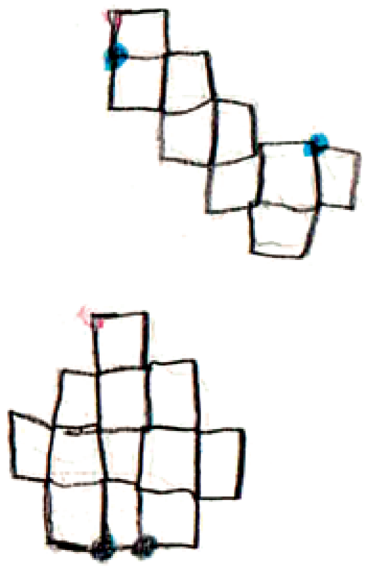
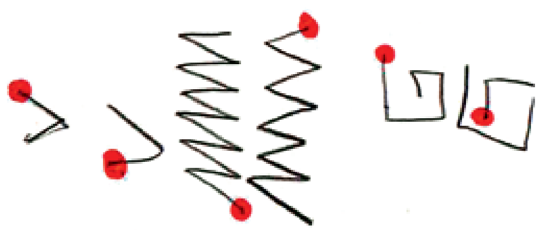


**Bild 3**
Amani erfindet schlichte offene Figuren, die nur von zwei Punkten aus in einem Strich gezeichnet werden können und markiert die möglichen Anfangspunkte.



Interessant sind die Versuche der Schüler, ihre Beobachtungen zu verallgemeinern und Begründungen zu finden.

**Bild 4**
Denise begründet, wann sich Figuren von der Art des Hauses vom Nikolaus in einem Strich zeichnen lassen.

Es geht nur an Stelen wo 3 Striche aufeinander trefen und wen man anfenkt wo 2 Strechen aufeinander trefen geht es nich.

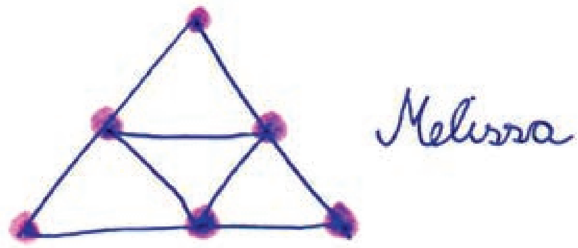
**Bild 5**
Sina formuliert dies präziser. Sie hat erkannt, dass die Menge der sich an den Kreuzungen treffenden Linien entscheidend ist für die Durchlaufbarkeit des Netzes und vermerkt sich die Anzahl der sich an den Kreuzungen treffenden Linien.

Man kann an allen 3er-kreuzung anfangen aber en-wenn es nicht mehr als 2 Kreuzungen

**Bild 6**
Tim, ein häufig leistungsschwächerer Schüler, beschreibt eindeutig seine Überlegungen.

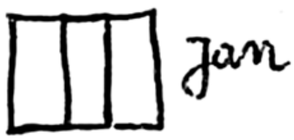
Ein Schranke kam man nur von zwei punkten malen. Anders geht es nicht.

**Bild 7**
Moritz hat herausgefunden, unter welchen Bedingungen das Netz von allen Punkten aus durchlaufen werden kann.




Das von Melissa geht von allen seiten weil es nur 2 und 4 Kreutzungen hat

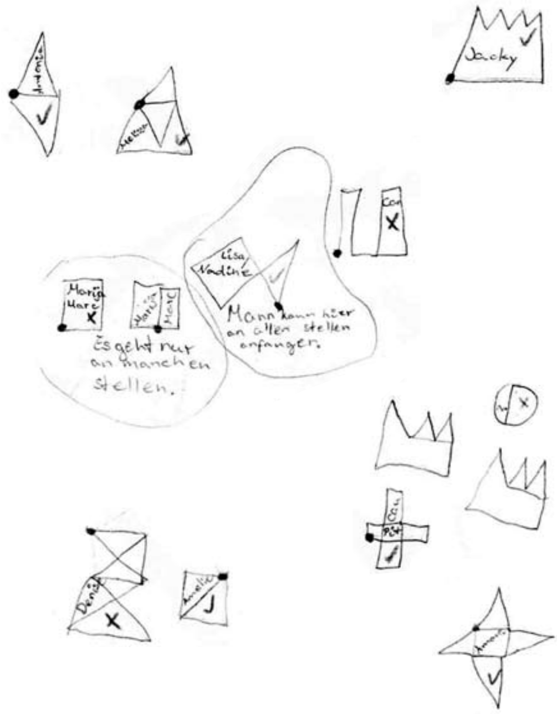
**Bild 8**
Warum ist die Figur von Jan nicht in einem Strich konstruierbar?




Hier einige schlichtere Begründungen:
Lisa: Es geht nicht, weil immer eine Seite offen bleibt.
Tina: Dieses Muster geht bei mir nicht weil, wenn ich irgendwo bin geht es nicht mehr vor und zurück.
Marc: Es geht nicht, weil ich nicht von einer Ecke wegkomme.
Diren: Es geht nicht, weil ich in einer Sackgasse gelandet bin.
Amani: Es geht nicht, weil die Striche sich nicht treffen.
Nils: Es geht nicht, weil man den letzten Strich nicht vollenden kann.

Eine anspruchsvollere Erklärung hat sich Nadine überlegt: „Dieses Muster geht nicht, weil es 4 ungerade Kreuzungen gibt.“ Sie betont damit verallgemeinernd, dass die Figur insgesamt 4 Knoten mit jeweils 3 Wegen aufweist und damit nicht in einem Strich konstruierbar ist.

**Bild 9**
Lisa übernimmt einige Figuren ihrer Mitschüler und markiert die, die sich nicht in einem Strich zeichnen lassen, mit einem Kreuz und solche, die sich von vielen Punkten aus zeichnen lassen, mit einem Häkchen. Die besonderen Figuren mit zwei Dreier-Kreuzungen umrandet sie.




## Fazit

- Alle Schüler waren mit Eifer dabei und präsentierten gern ihre Ergebnisse.
- Besonderes Interesse fand die Bearbeitung der Eigenproduktionen der anderen Schüler. In den Begründungen wurde immer wieder namentlich Bezug genommen.
- Die Kommunikation in den Arbeitsgruppen über Wege die „gingen“ bzw. „nicht gingen“ und das genaue Zusehen beim Zeichnen waren besonders fruchtbare Bestandteile des Unterrichts.
- Im Unterrichtsgespräch mit allen entstanden lebendige Diskussionen über mögliche Bedingungen für das erfolgreiche Lösen der vorliegenden Wegeprobleme.
- Als effektive Hilfe für Schüler, die sich nicht mehr an ihren einmal gezeichneten Weg erinnern konnten, erwies sich das farbige Markieren des Anfangspunktes.

– Auch bei Figuren mit ausschließlich gerader Anzahl von Kreuzungen geschah es, dass Schüler Wege fanden, die nicht zum Ausgangspunkt zurück führten. Dies erschien zunächst als ein Widerspruch zur erarbeiteten Regel. Richtig ist: Man findet mindestens einen Weg, aber nicht jeder Weg führt ans Ziel.
– Das Aufschreiben von Begründungen fiel vielen Kindern schwer. Erst die von der Lehrerin eingebrachte Hilfe, dass die Anzahl der sich in den Ecken treffenden Linien zu beachten sei, erleichterte die Aufgabenstellung für viele Schülerinnen.

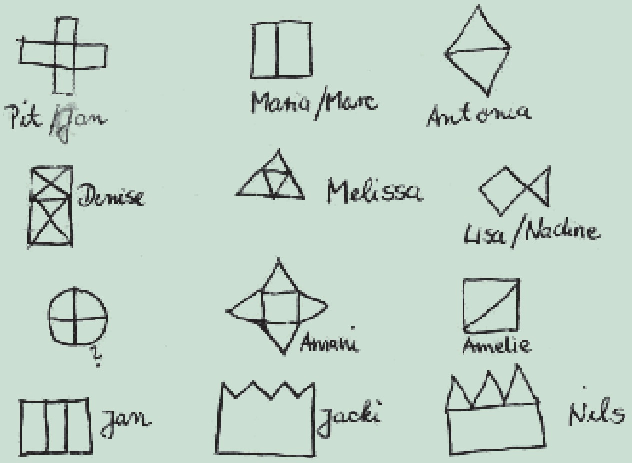
Aufgabenlösungen mit erhöhtem Schwierigkeitsgrad
– zeichnen sich durch schlüssige und begründende Aussagen aus.
– lassen Ordnungsstrukturen erkennen.

Einfache Aufgabenlösungen
– sind eher beschreibend als begründend formuliert.
– verwenden in der Begründung anschauliche Vergleiche.
– finden nur ein oder zwei Lösungswege.

**Wie kann es weiter gehen?**

Eine weiterführende Aufgabe ist die Weiterarbeit mit den selbst erfundenen Figuren der Mitschüler.

Hier sind 12 von euch erfundene Figuren:
– Zeichne die Figuren nach.
– Kennzeichne Figuren, die man nicht in einem Strich nachzeichnen kann.
– Kennzeichne Figuren, die nur von bestimmten Punkten ausgezeichnet werden können.
– Kennzeichne Figuren, die von allen Kreuzungen aus gezeichnet werden können.
– Woran liegt das?
Schreibe deine Vermutungen auf!




Das Auffinden aller Möglichkeiten, den Streckenzug vom Haus vom Nikolaus zu zeichnen, ist eine anspruchsvolle Aufgabe, die sich beispielsweise mit einem Baumdiagramm lösen lässt.

Die Beschäftigung mit Leonard Euler und dem Königsberger Brückenproblem führt in einen auch für Grundschulkinder interessanten Abschnitt der Ge-schichtliche der Mathematik.



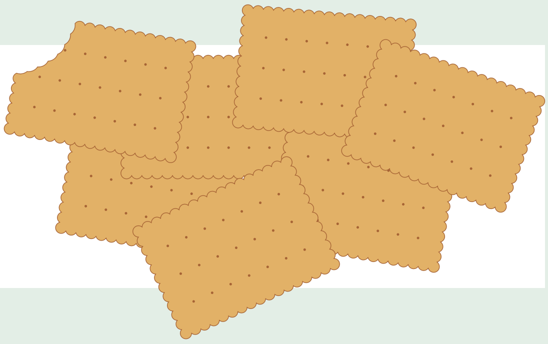
**Literatur**

Dahl, Kristin/Nordquist, Sven: Zahlen, Spiralen und magische Quadrate; Oetinger 1996

Käpnick, Friedhelm: Mathe für kleine Asse 3/4; Volk und Wissen 2006

# 6 Butterkekse

Was hat eine Packung Butterkekse mit Mathematik zu tun?



**Worum geht es?**

Im Allgemeinen versteht man unter dem Begriff „Sachrechnen" das Bearbeiten von Aufgaben, die sich auf das Berechnen von Sachen beziehen. Es werden verschiedene Typen von Sachaufgaben unterschieden: Sachbilder, eingekleidete Aufgaben, Text- und Denkaufgaben, Rechengeschichten, etc.. Noch viel zu häufig folgt das Sachrechnen dem traditionellen Muster von eingekleideten Aufgaben, die nach dem Schema „Frage – Rechnung – Antwort" bearbeitet werden und den Schülern wenig Spielräume für das Finden von Lösungswegen lassen.

Für Spiegel/Selter gilt Sachrechnen als „Oberbegriff für die Auseinandersetzung mit Aufgaben, die einen Bezug zur Wirklichkeit aufweisen. Ziel des Sachrechnens ist es, die Erfahrungswelt der Kinder zu erhellen, zu diskutieren, zu strukturieren und mit mathematischen Mitteln zu analysieren." (vgl. Spiegel/Selter, 2006. S. 74)

Bei der vorliegenden Aufgabe handelt es sich um ein echtes Sachproblem. Im Vordergrund steht eine Sache, die aus dem Erfahrungsbereich der Schüler stammt. Butterkekse, ein beliebter Snack bei Wandertagen oder in der Pause, sind eine Sache, zu der alle Kinder einen Bezug haben. Die Frage „Was hat eine Packung Butterkekse mit Mathematik zu tun?" bietet einen Anlass, die Schüler neugierig darauf zu machen, sich mit mathematischen Inhalten auseinander zu setzen.

Anders als bei herkömmlichen Textaufgaben, werden die Schüler aufgefordert, Aufgabenstellungen selbst zu entwickeln, was eine ungewohnte Herausforderung darstellt. Diese werden auf Vergleiche der Preise, der Anzahl, des Gewichts, der Kantenlänge, der Flächen und des Volumens hinauslaufen. Die Fragestellung ist bewusst so offen gehalten, um die Schüler zu sensibilisieren und ihren Blick für Mathematik zu schärfen: „Mathematik ist überall". Die Einstellung, Mathematik nur mit Zahlen und arithmetischen Aufgaben zu assoziieren, soll aufgebrochen werden. Unser alltägliches Leben ist umgeben von mathematischen Situationen, die auch Größen und Messen, Klassifizieren, Sortieren und Geometrie umfassen.

Die Schüler müssen bereits im Vorfeld Überlegungen anstellen und Entscheidungen treffen: Was interessiert mich an dem Thema? Was will ich wissen? Welche Informationen brauche ich? Wie finde ich die Lösung?

**Themenfeld**
Größen und Messen

**Anforderung**
zu einer Sachsituation mathematische Fragen entwickeln

**Allgemeine mathematische Kompetenz**
*Modellieren:* Darstellungen der Lebenswirklichkeit relevante Informationen entnehmen; Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen

**Stufe**
3. bis 4. Klasse

**Zeitbedarf**
4 bis 5 Unterrichtsstunden

**Material**
- Kekse und Verpackungen
- Waage
- Maßband

Da möglicherweise nicht alle benötigten Daten zur Verfügung stehen, ist es unter Umständen notwendig, Angaben durch vertrautes Alltagswissen oder durch Recherchen einzubringen. Manche Aufgaben werden Fermi-Aufgaben sein, die dadurch charakterisiert sind, dass es keine exakten Lösungen gibt, die durch Messen oder Zählen gefunden werden können, sondern dass es nur Näherungslösungen gibt, die durch begründetes Schätzen oder durch Überschlagsrechnung gewonnen werden können. Bei der Bearbeitung der Aufgabe lernen die Schüler sachbezogene Fragestellungen zu entwickeln, Alltagwissen zu benutzen, flexibles Rechnen und sie vertiefen ihre Fähigkeit im Umgang mit Größen.

**Wie kann man vorgehen?**

Zu Beginn der Unterrichtssequenz wird den Schülern die Frage gestellt: „Was hat eine Packung Butterkekse mit Mathe zu tun?" Dies könnte beispielsweise im Rahmen der Freiarbeit oder Wochenplanarbeit geschehen. Wichtig ist vor allem, dass alle Schüler Zeit und Ruhe haben, zunächst allein über diese Frage nachzudenken und eigene Überlegungen anzustellen. Die Ideen dazu werden schriftlich festgehalten.

Im Anschluss daran nimmt das Unterrichtsgespräch eine wichtige Rolle ein: Die Ideensammlungen werden im Gesprächskreis vorgestellt. Die Schüler vergleichen ihre Ideen miteinander, stellen Gemeinsamkeiten fest und nehmen neue Vorschläge auf. Das Finden von Aufgaben wird durch Konkretisierung des Arbeitsauftrages erleichtert: „Findet Aufgaben, die interessant sind und die ihr lösen könnt!" Es ist damit zu rechnen, dass auch Aufgaben formuliert werden, die auf mathematischem Wege nicht zu lösen sind.

Beim Finden von Aufgaben müssen die Schüler
- Informationen unterscheiden (Sind das Aufgaben, die mathematisch zu lösen sind oder brauche ich andere Informationsquellen?)
- sich einen Überblick verschaffen (Welche Information enthält die Verpackung, hilft diese beim Lösen der Aufgabe?)
- Aufgaben bewerten (Sind sie leicht oder schwer zu lösen?) und darüber kommunizieren.

Hierfür ist das Arbeiten in Gruppen günstig, denn der Arbeitsauftrag bietet zahlreiche Anlässe für Gespräche zwischen den Schülern. Gemeinsam entwickeln sie konkrete Fragestellungen und schreiben diese auf. Diese Arbeitsphase braucht ausreichend Zeit, da es den Schülern häufig schwer fällt, Fragen zu formulieren und die Diskussion innerhalb der Arbeitsgruppe über die Fragestellungen kein einfacher Prozess ist. Jede Frage wird an der Tafel öffentlich gemacht, um eine Vielfalt von Aufgaben zu sichern und die Schüler zum Entwickeln weiterer Ideen anzuregen.

Es ist sinnvoll, die Aufgaben in einem nächsten Arbeitsschritt auf korrekte Schreibweise zu überarbeiten und sie zu vergrößern, sodass für die weitere Arbeit eine Sammlung von Aufgaben an der Tafel hängt. Nun entscheidet jeder Schüler selbst, mit welcher Fragestellung er sich beschäftigen will.

Den Schülern stehen einzelne Kekse, Keksverpackungen, Messinstrumente (Waage, Maßband) und Rechengeld zur Verfügung. Die Bearbeitung der Aufgaben in Einzelarbeit hat den Vorteil, dass jeder von seinen Interessen ausgeht und auf seinem Lernniveau arbeitet. Die Arbeit in Gruppen erleichtert die Bearbeitung komplexer Fragestellung wie beispielsweise Fermiaufgaben und eröffnet häufig neue Ideen für Lösungsmöglichkeiten.

Zum Abschluss der Arbeitsphase schließt sich die Präsentation der Arbeitsergebnisse an. Alle Schüler erhalten die Gelegenheit sich gegenseitig zu zeigen, an welchen Fragestellungen sie gearbeitet haben und wie sie die Fragen gelöst haben. Dabei werden die Denk- und Lösungswege von anderen nachvollzogen und diskutiert. Das schult unter anderem auch die Fähigkeit zur Kommunikation und Argumentation.

**Erprobungen zeigten:**

– Die Aufgabenstellung war für alle Schüler gut verständlich, das Sachthema machte ihnen Freude.
– Eigene Fragestellungen zu entwickeln war motivierend und regte die Fantasie an.
– Bereits vor dem Lösen der Aufgaben fand ein reger Austausch über mögliche Lösungswege statt.
– Gemeinsames Arbeiten und eigenständiges Arbeiten standen in einem ausgewogenen Verhältnis.
– Eine besondere Schwierigkeit beim Rechnen mit Größen ist die Notwendigkeit, die Angabe der Einheiten zu beachten und gegebenenfalls entsprechend umzurechen. Das fiel den Schülern in diesem Zusammenhang auffallend leicht.
– Lösungswege wurden präsentiert und lebhaft diskutiert.

Die Aufgaben lassen natürliche Differenzierung zu, da Fragestellungen und verschiedene Lösungswege auf ganz unterschiedlichen Schwierigkeitsniveaus möglich sind.
Schüler mit einfachen Lösungen
– formulieren einfache Fragen, die für sie überschaubar sind.
– lösen ihre Aufgaben handelnd durch Messen und Wiegen oder mit Hilfe von Zeichnungen.
– wählen einfache Fragestellungen mit einfachen Berechnungen.

Schüler mit anspruchsvollen Lösungen
– stellen komplexere Fragen, für deren Beantwortung mehrschrittige Berechnungen ausgeführt werden müssen.
– bewegen sich in größeren Zahlenräumen.
– können Informationen sortieren und entsprechend nutzen.
– beschäftigen sich auch mit Fragestellungen, bei denen ihnen noch nötige Kenntnisse und Informationen zur Bearbeitung fehlen.

**Dokumente aus der Erprobung**

in einer 4. Klasse

Schon bei der Sammlung der Ideen zeigt sich die ganze Spannbreite der Heterogenität in dieser Lerngruppe. Während Emma ganz einfache Fragen formulierte, die sich ganz wörtlich genommen auf die „Packung“ beziehen, zeigte Baker ein weitergehendes Verständnis von Mathematik. Felix mischte Fragen zur Geometrie von Keks und Verpackung mit Fragen zum Thema Größen und Messen.

**Baker**

Weil man mit Butterkeksen rechnen kann
wie teuer das ist!
wie süß es ist.
wie viel zucker drin ist.
Aub es gesund ist.
wie viel Kekse drin sind!
Was auf der verpackung drauf steht.
wie viel man davon essen kann.

**Emma**

man macht wiegroß
wie lang
wiebreit
ein fach nur messen
und auf schreiben.

Folgende Aufgaben wurden in der Klasse gesammelt:
- Wie viel wiegt ein Keks?
- Mein Vater fotografiert 10 Bilder von der Packung. 100mal wird jedes Bild gedruckt. Wie viele Bilder sind es am Ende?
- Wie viele Kekse sind in einer Packung?
- Wie viel Butter ist in einem Keks?
- Wie viele Fabriken gibt es?
- Wie viele Kekspackungen sind so schwer wie ein Löwe? ein Elefant? die Erde?
- Wie lang und breit ist die Packung?
- Wie viele Kekse kann man davon essen?
- Welche Form hat ein Keks? Wie lang, wie breit ist er?
- Wie viel kosten zwei Packungen?
- Wie schwer sind 12 Packungen?
- Wie viel Hohlmaß (Rauminhalt) hat eine Packung?
- Wie viele Wellen (Zähnchen) hat ein Keks?
- Schätzaufgabe: Wie viel Kekse sind in einer Packung?
- Wie teuer ist eine Packung?
- Wie viel Zucker ist in einer Packung?
- Ein Zuckerwürfel wiegt etwa 4 g. Wie viele Zuckerwürfel stecken in einer Packung?
- Wie viele Zutaten braucht man um einen Butterkeks herzustellen?
- Wie viele essen Butterkekse?
- Wie viele Kalorien sind in einem Keks/in einer Packung?
- Wie lange muss man joggen, um die Kalorien von 20 Packungen los zu werden?
- Wie viel wiegt die ganze Packung?

**Felix**

Die Kekse sind Quadratisch
und mann kan die Ecken zehlen.
Wie viele Zutaten drin sind.
und wie viele ind der Pakung
drin ist. Wie viel es wigt.
Wie viele cm der Keks hat.
Bis zu welchen Datum geht der
Keks.

**Anahita**

Anahita hat sich eine einfache Frage ausgesucht und wendet zur Berechnung das Malkreuz an.

wie schwer sind 12 Packungen?

200g · 12 = 2400g

| · | 10 | 2 |
|---|---|---|
| 200 | 2000 | 400 |

**Antonia**

Antonia arbeitet sich schrittweise an die Lösung heran, um den Überblick nicht zu verlieren. Nach der Berechnung von 10 Packungen erkennt sie einen Zusammenhang und löst dann die Aufgaben mit Stufenzahlen.

Wie viele Kekse wiegen so viel wie ein Löwe?

1 Löwe = 200 kg
1 Packung Kekse = 200g
2 Packung Kekse = 400g
3 Packung Kekse = 600g
4 Packung Kekse = 800g
5 Packung Kekse = 1Kg
6 Packung Kekse 1200
7 Packung Kekse 1400
8 Packung Kekse 1600
9 Packung Kekse 1800
10 Packung Kekse = 2kg
10 · 10 = 100 Packung
2kg · 10 = 20 kg
20kg · 10 = 200kg
100 Pa. · 10 = 1000 packung

**Lena**

Lena macht sich einen Plan zur Berechnung der Frage, wie viele Kekse so schwer wie ein Kilogramm sind. Sie sucht sich die notwendigen Informationen zielgerichtet heraus und geht ihren eigenen Lösungsweg.

Wie viele Kekse sind 1kg? 200 Kekse sind 1kg.

200 g wiegt eine Packung
1000g = 1Kg
ich weiß wie viele Kekse in einer Packung sind
40 Kekse sind in einer Packung: 40 Kekse = 200g
~~2 · 200g~~ 80 Kekse = 400g
~~3 · 200~~ 120 Kekse = 600g
160 Kekse = 800g
~~4 · 200~~ 200 Kekse = 1000g

**Marcel**

Marcel hat sich eine weitere Frage überlegt. Er versucht rechnerisch eine Lösung zu finden, hat aber Probleme mit der Dezimalzahl. Mit Hilfe eines Maßbandes stellt er fest, dass 8 Kekse aneinander gelegt ca. 50 cm lang sind, also 16 Kekse 1 m entsprechen. Die weitere Rechnung führt er halbschriftlich fort.

Wie viele Kekse brauche ich für 100 m?

Ich weiß: 1 keks ≙ 6,2cm

63 /2 = 10 kekse
63cm ≙ 10 kekse

1

16 kekse = 1m

16 · 100 =
10 · 100 = 1000
6 · 100 = 600
1600 kekse

Es sind 1600 kekse

**Wie könnte es weitergehen?**

- Rechengeschichten zu anderen Themen aus dem Bereich „Größen“
- Fermi-Aufgaben

**Literatur**


Scherer, Petra/Böning, Dagmar (Hrsg.): Mathematik für Kinder – Mathematik von Kindern; Grundschulverband 117

Selter, Christoph/Spiegel, Hartmut: Kinder & Mathematik; Kallmeyer 2003

Peter-Koop, Andrea/Ruwisch, Silke (Hrsg.): Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule; Mildenberger 2003

# 7 Weihnachtspäckchen

Wir wollen Rechenpakete mit den Zahlen aus dem Adventskalender packen. Die Ergebniszahlen sollen 5,10,15, 20, 30, 40, 50 oder 100 sein. Alle Rechenoperationen (+, –, ·, :) können benutzt werden.

### Worum geht es?

Die Schüler trainieren bei dieser Aufgabe ihre Rechenfertigkeiten im Umgang mit den ihnen vertrauten Rechenoperationen. Im Gegensatz zu vorgegebenen Aufgaben wird hier von den Schülern das Finden von Aufgaben zu einer vorgegebenen Zahl verlangt. Das Erkennen, Entdecken und Nutzen von Zahlbeziehungen (Tauschaufgaben, Partnerzahlen) wird angeregt. Vorteilhaftes und effektives Herangehen an das Finden von Aufgaben zu den vorgegebenen Ergebniszahlen verlangt vielfältiges Wissen über Zahlen und Zahlbeziehungen sowie über Verknüpfungsmöglichkeiten in Verbindung mit den Rechengesetzen. Jeder Schüler kann mit unterschiedlichen Strategien an die Aufgabe herangehen und auch von ihm bisher noch nicht genutzte Zahlbereiche erkunden. Durch die Vielfältigkeit der entstehenden Aufgaben bieten sich zahlreiche Möglichkeiten, um Muster und Strukturen in den Lösungen zu entdecken.

**Themenfeld**
Zahlen und Operationen

**Anforderung**
die Vorgehensweise bei der Addition und Subtraktion verstehen

**Allgemeine mathematische Kompetenz**
*Kommunizieren:* eigene Vorgehensweisen beschreiben, Lösungswege anderer verstehen und gemeinsam darüber reflektieren

Mögliche Entdeckungen:

Schöne Päckchen:
$40 = 19 + 11$
$40 = 18 + 12$
$40 = 17 + 13$

Partnerzahlen:
$10 = 10 + 0$
$10 = 9 + 1$
$10 = 8 + 2$

Verknüpfen verschiedener Rechenoperationen:
$30 = 24 + 24 - 18$
$30 = 2 \cdot 10 + 10$

Tauschaufgaben:
$20 = 19 + 1$ oder $20 = 1 + 19$

Nutzen von mehr als zwei Zahlen:
$50 = 24 + 23 + 3$
$50 = 12 + 24 + 16$

Zahlenketten:
$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$

Je nach Leistungsvermögen erhöhen die Kinder die Anzahl der Operatoren und/oder sie verändern Ergebniszahlen. Mit den Zahlen von 1 bis 24 Lösungen zur Ergebniszahl 100 zu finden, ist für manche Kinder sicher eine große Herausforderung. Die Verwendung mehrerer Zahlen für eine Lösung oder eine Erweiterung der Ergebniszahlen bieten weitere Differenzierungsmöglichkeiten.

### Wie könnte man vorgehen?

An der Tafel findet sich ein Weihnachtsbaum mit 24 leeren Feldern. Die Schüler tragen die Zahlen von 1 bis 24 ein. Natürlich darf jede Zahl nur einmal vorkommen. Im Anschluss formuliert der Lehrer die Aufgabe und es werden Beispiele gemeinsam an der Tafel gesammelt. Komplexere Lösungen werden lobend hervorgehoben. Danach erhält jeder Schüler ein vorbereitetes



**Stufe**
1. bis 3. Klasse,
besonders geeignet für jahrgangsgemischte Lerngruppen

**Zeitbedarf**
3 bis 4 Unterrichtsstunden

**Material**
- Wendeplättchen
- Kopiervorlage 7

Arbeitsblatt mit einem Weihnachtsbaum und bearbeitet Päckchen mit selbst gewählten Ergebniszahlen. Der Vorteil dieser Einzelarbeitsphase besteht darin, dass durch die unterschiedliche Herangehensweise der Schüler viele unterschiedliche Aufgaben zu den Ergebniszahlen entstehen, an denen sich im anschließenden Gespräch Zusammenhänge verdeutlichen lassen. Die Lösung dieser Aufgabe beansprucht ungefähr 30 Minuten.

Im Anschluss an diese Arbeit stellen die Schüler je ein Paket mit ihren Lösungen im Stuhlkreis vor. Die Aufgaben werden in ein großes Weihnachtspaket mit der entsprechenden Ergebniszahl eingetragen. Dadurch erhalten alle Schüler die Gelegenheit schnell zu vergleichen, ob sie auch diese Aufgabe gerechnet haben oder ob sie andere Möglichkeiten gefunden haben. Für die Schüler wird deutlich, dass zu einer vorgegebenen Ergebniszahl verschiedenste Aufgaben und Rechenoperationen möglich sind. Im weiteren Verlauf haben die Schüler die Möglichkeit, ihre noch nicht im großen Weihnachtspaket vorhandenen Aufgaben einzutragen bzw. noch weitere Aufgaben zu finden. Die letzte Arbeitsphase ist dem Finden von Mustern und Strukturen gewidmet. Die Schüler bilden Gruppen mit dem Ziel, Gemeinsamkeiten, Ordnungsmöglichkeiten und Aufgabenzusammenhänge herauszufinden. Die Rechenteams schreiben ihre Erkenntnisse und Einsichten auf und stellen sie später der gesamten Lerngruppe vor.

## Erfahrungsbericht

Beim Einsatz der Aufgabe im jahrgangsgemischten Unterricht des ersten und zweiten Lernjahres waren die Möglichkeiten der Differenzierung besonders wichtig. Durch die offene Formulierung und die breite Spanne an vorgegebenen Päckchen (jedes Päckchen enthielt eine andere Ergebniszahl) hatte jeder Schüler je nach seinen individuellen Fähigkeiten die Möglichkeit, Lösungen zu finden. Die Schüler erkannten sehr schnell, dass der gezeichnete Weihnachtsbaum mit den leeren Feldern ein Adventskalender sein könnte und formulierten, dass man nun noch die Zahlen von 1 bis 24 eintragen muss. Im Gespräch wurden gemeinsam Ideen zusammen getragen:

Man könnte
- die Zahlen ordnen,
- mit den Zahlen rechnen,
- zusammenzählen, wie groß das Ergebnis aller Zahlen ist,
- Zahlen vergleichen,
- zu jeder Zahl ein Bild malen.

Bei der Erarbeitung der ersten gemeinsamen Beispiele kamen schnell viele Rechenaufgaben mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad zusammen. Komplexe Lösungen bestanden aus mehreren Rechenoperationen, höheren Ergebniszahlen und Aufgaben mit mehr als zwei Operatoren.

Nach einer Zwischenbesprechung konnten die Schüler selbständig fortfahren, die Lehrerin hatte Zeit, sich einzelnen Schülern zuwenden und sich Lösungsstrategien erklären zu lassen. Auf vorbereiteten Plakaten wurden die Lösungsmöglichkeiten der Schüler gesammelt und verglichen In der letzten

Unterrichtsphase sollten Muster und Strukturen gefunden werden. In Gruppenarbeit wurden nun die einzelnen Aufgaben zu den Ergebniszahlen genauer unter die Lupe genommen. Im Vordergrund stand die Frage, welche Aufgaben zusammengehören und wie man sie nach bestimmten Gesichtpunkten ordnen könnte.

Die Aufgaben wurden von den Kindern nach Rechenoperationen und der Anzahl der Operatoren geordnet. Tauschaufgaben wurden gesammelt und „Schöne Päckchen" zusammen gestellt. Im Anschluss präsentierten die Gruppen ihre Ergebnisse den Mitschülern.

### Dokumente aus der Erprobung

**Bild 1**
Der strukturierte Einsatz von Wendeplättchen ist für jüngere und leistungsschwächere Kinder selbstverständlich.

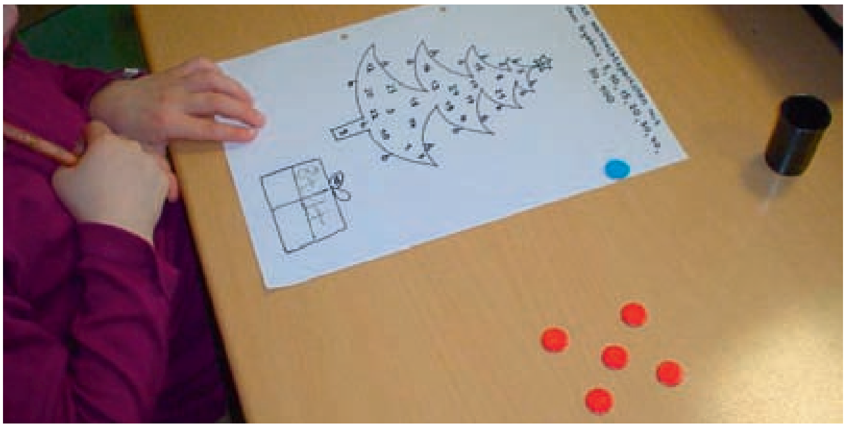


**Bild 2**
Ansätze für systematisches Herangehen sind bei Sandra erkennbar.

### Wie kann es weiter gehen?

**Variationen**

- Packe Päckchen, in denen du nur mit geraden Zahlen rechnest.
- Packe Päckchen, in denen du nur mit ungeraden Zahlen rechnest.
- Packe Päckchen, in denen eine Zahl von 1 bis 24 die Ergebniszahl ist.
- Packe Päckchen, in denen du addierst und subtrahierst.
- Packe Päckchen, in denen du alle Rechenoperationen nutzt.
- Suche dir selbst Ergebniszahlen und finde Aufgaben dazu.
- Wie viele Aufgaben kann man insgesamt für die Ergebniszahl finden?

**Vertiefende Aufgaben**

mit Anreiz für leistungsstarke oder ältere Schüler, die über die anfängliche Aufgabe hinausgehen:
- Finde zu den Aufgaben die Tauschaufgaben.
- Finde zu den Aufgaben Umkehraufgaben.
- Finde Aufgabenfamilien.
- Kannst du „Schöne Päckchen" für eine Ergebniszahl zusammenstellen?
- Finde möglichst viele verschiedene Aufgaben für deine Ergebniszahl.


**Literatur**

Walther, Gerd u. a. (Hrsg.): Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret; Cornelsen 2008

Wittmann, Erich Chr./Müller, Gerhard N.: Handbuch produktiver Rechenübungen Band 1. Vom Einspluseins zum Einmaleins; Klett 1994

Wittmann, Erich Chr./Müller, Gerhard N.: Das Zahlenbuch 1 bis 3. Lehrerband 2000; Klett 1994

# 8 Opa Piepenbrink

Auf dem Bauernhof von Opa Piepenbrink sind Hühner und Kaninchen.
Zusammen sind es 20 Beine.

**a** Wie viele Hühner und Kaninchen könnte Opa Piepenbrink haben?
**b** Gibt es noch andere Möglichkeiten?
**c** Findest du sie alle?
Wie viele Möglichkeiten gibt es?
**d** Beschreibe deinen Lösungsweg.

**Worum geht es?**

Problemlösen ist eine der geforderten allgemeinen Kompetenzen in den Bildungsstandards Mathematik am Ende der Jahrgangsstufe 4. Problemlösen besteht aus den Komponenten mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung von problemhaltigen Aufgaben anwenden sowie Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisch probieren) und Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen.

Die Schülerinnen und Schüler lernen Probleme zu lösen, wenn sie häufig problemhaltige Aufgaben angeboten bekommen. Problemhaltige Aufgaben sind Aufgaben, für die es kein eindeutig erlernbares Rechenschema gibt oder zumindest keins, das in der Grundschule nicht zur Verfügung steht. Hilfreich ist es deshalb für die Schüler, über eine Vielzahl von Strategien und Hilfsmitteln zu verfügen. Unsere Aufgabe ist es, die Schüler dabei zu unterstützen, Strategien und heuristische Hilfsmittel zu entwickeln und ausreichend zu üben, damit sie lernen, problemhaltige Aufgaben zielgerichtet zu bearbeiten.

Eine der einfachsten und natürlichsten Lösungsstrategien in der Grundschule ist das „Probieren“. Man beginnt mit einer vermuteten Lösung und probiert dann, ob die Vermutung stimmt. Hat man noch nicht das richtige Ergebnis, verbessert man den Versuch und nähert sich so dem Ergebnis immer mehr an. Diese Strategie wird häufig noch sehr ungeordnet sein, sollte aber nach und nach planvoller und systematischer erfolgen. Durch die Möglichkeit des Probierens als Lösungsweg wird für die Schüler die Einstiegshürde gegenüber problemhaltigen Aufgaben niedriger. Sie werden von dem Erwartungsdruck einer sofortigen richtigen Antwort, der ja bei Kindern mathematischen Fragestellungen gegenüber häufig zu beobachten ist, befreit.

Ein weiteres wichtiges Hilfsmittel beim Lösen von problemhaltigen Aufgaben ist die Zeichnung. Oft kann aus einer geschickt erstellten Zeichnung oder Skizze schon eine Lösungsidee abgelesen werden. Für Schülerinnen und Schüler der unteren Klassen ersetzt die Zeichnung das konkrete Material

**Themenfeld**
Zahlen und Operationen

**Anforderung**
Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übertragen und dabei Gleichungen bzw. Ungleichungen bilden und sachbezogen lösen

**Allgemeine mathematische Kompetenz**
*Problemlösen:* Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisch probieren)

**Stufe**
1. bis 3. Klasse,
geeignet auch für jahrgangsgemischte Lerngruppen

**Zeitbedarf**
1 bis 2 Unterrichtsstunden

**Material**
– Knobelheft
– Kopiervorlage 8 (1)
– Kopiervorlage 8 (2)
– Kopiervorlage 8 (3)

beim Erarbeiten und Überprüfen ihrer Lösungsmöglichkeiten. Auch das Anfertigen einer Zeichnung ist für die Kinder keine selbstverständliche Lösungsstrategie und muss gefördert werden.

Die vorliegende Aufgabe wurde ausgewählt, weil sie eine natürliche Differenzierung zulässt. Neben dem Einsatz in einer jahrgangsheterogenen Klasse eignet sie sich auch gut für die Arbeit in jahrgangsgemischten Gruppen. Die erste Teilaufgabe ist von allen Kindern zu bewältigen, weil sie zeichnerisch zu lösen ist und mehrere Lösungen zulässt. Jedes Kind kann mindestens eine Lösung finden. Sie bietet zusätzlich aber genügend Potential, um auch für besonders begabte Schüler Anreize und Herausforderungen zu bieten. Ähnliches gilt für den Einsatz in einer jahrgangsgemischten Gruppen. Da der Zahlbereich, der zum Bewältigen der Aufgabe benötigt wird, nur bis zur 20 reicht, können durchaus auch Schulfanfänger schon Lösungen für diese Aufgabe finden. Ältere Schüler finden mehrere oder alle Lösungen.

Das Finden aller möglichen Lösungen ist schon eine Herausforderung. Insgesamt gibt es vier richtige Lösungen: 2 Hühner, 4 Kaninchen – 4 Hühner, 3 Kaninchen – 6 Hühner, 2 Kaninchen – 8 Hühner, 1 Kaninchen. Aus der Aufgabenstellung geht hervor, dass sich sowohl Hühner als auch Kaninchen im Stall befinden, so dass 10 Hühner, 0 Kaninchen und 0 Hühner, 5 Kaninchen keine richtigen Lösungen sind.

| Hühner | Kaninchen |
|---|---|
| 2 | 4 |
| 4 | 3 |
| 6 | 2 |
| 8 | 1 |

**Wie könnte man vorgehen?**

Je nach Alter wird die Aufgabe von den Schülern gelesen oder vom Lehrer vorgelesen. Im anschließenden Gespräch äußern sich die Schüler spontan und entwickeln erste Lösungsideen. Der Lehrer kommentiert die Ideen der Kinder nicht. Gemeinsam wird geklärt, worum es in dieser Aufgabe geht und wie Kaninchen und Hühner aussehen (Anzahl der Füße!). Dann können die Schüler mit ihren Lösungsstrategien beginnen. Vorteilhaft ist das Führen eines Knobelhefts, in das die Aufgabe eingeklebt wird.

In der Erarbeitungsphase kann sich der Lehrer ein Bild vom Vorgehen der einzelnen Schüler machen und dann beim Vorstellen der Ergebnisse darauf achten, dass Schüler beginnen, die nur eine Lösung gefunden haben. Die leistungsstärkeren Schüler, die alle Lösungsmöglichkeiten gefunden haben, stellen ihre Ergebnisse zum Schluss vor. Das Vortragen, Darstellen und Verstehen der Lösungswege wird dadurch erleichtert, dass die Vortragenden ihre Überlegungen bereits im Heft formuliert haben.

Mit dieser Aufgabe können die allgemeinen mathematischen Kompetenzen Problemlösen, Kommunizieren, Argumentieren und Darstellen besonders gefördert werden. Durch die aktive Auseinandersetzung mit der Problemstellung werden Vermutungen angestellt, Lösungsstrategien entwickelt und genutzt. Es werden Zusammenhänge erkannt, die später auf ähnliche Aufgaben übertragbar sind. Um sich Strategien und Hilfsmittel dauerhaft zu Eigen zu machen ist es ausgesprochen wichtig, dass die Schülerinnen und Schüler ihre Lösungswege reflektieren. Aufgaben, bei denen verschiedene Lösungen und verschiedene Lösungswege zu erwarten sind, eignen sich dazu besonders. In der Diskussion beschreiben sie ihre eigene Vorgehensweise und lernen die Lösungswege anderer kennen. Sie diskutieren ihre unterschiedlichen Darstellungsformen und vergleichen und bewerten die Lösungswege nach ihrer Effektivität. Die Zeichnungen oder die schriftliche Darstellung des Lösungsweges helfen den Schülern, ihr Vorgehen zu rekonstruieren und zu erklären. So früh wie möglich formulieren die Schüler ihre Lösungswege und schreiben sie auf.



## Erfahrungsbericht

Die Aufgabe wurde in unterschiedlichen Klassenstufen eingesetzt. Alle Schüler fanden einen Zugang zu der Problemstellung der Aufgabe. Je nach Alter und Leistungsniveau waren die Lösungsstrategien und Hilfsmittel in ihrer Bandbreite erstaunlich und zeigten eine große Heterogenität sowohl innerhalb einer Klasse als auch in einer jahrgangsgemischten Gruppe. Severin (ein Lernanfänger) fragte gleich zu Beginn, ob er schreiben dürfe. Er überlegte kurze Zeit und lieferte dann eine außerordentlich strukturierte Aufstellung aller Möglichkeiten (Bild 3).

Da die Vorgehensweise nicht vorgegeben war, begannen alle Schüler je nach Leistungsniveau unterschiedliche Lösungsstrategien auszuprobieren. Lernanfänger oder leistungsschwächere Schüler begannen zunächst damit die ersten Kaninchen und Hühner zu zeichnen und deren Beine zu zählen (Bild 1 und 2). Viele gingen eher unsystematisch vor. Sie zeichneten abwechselnd Hühner und Kaninchen und näherten sich so der Lösung an. Ältere oder leistungsstärkere Kinder näherten sich durch „Probieren“ und „Überprüfen“ der Lösung durch Rechnen an (Bild 4–6).

Auch bei den Zeichnungen wurden Unterschiede festgestellt. Einige Kinder zeichneten sehr detailgetreu, andere erleichterten sich die Aufgabe durch alleiniges Zeichnen der Füße. Nach einiger Zeit hatten alle Kinder mindestens eine Lösung gefunden.

Erstaunt erkannten sie, dass nicht alle die gleiche Möglichkeit gefunden hatten und es wurde an den Tischgruppen darüber gesprochen, ob alle richtig seien. Es entstand eine rege Diskussion mit Argumenten und Gegenargumenten und nachdem gemeinsam geklärt war, dass es offensichtlich mehrere Lösungen gibt, waren einige hochmotiviert noch weitere Möglichkeiten zu finden. Andere waren mit einer Lösung zufrieden und zeichneten noch einen entsprechenden Stall.

## Dokumente aus der Erprobung

**Bild 1**

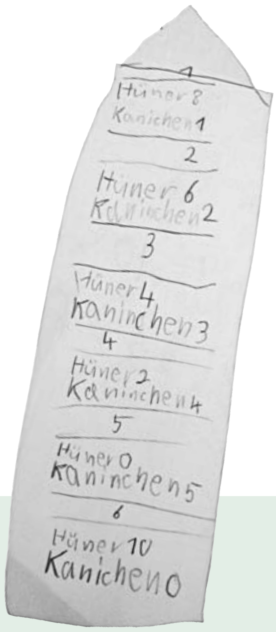
Sara hat durch Zeichnen und Zählen der Beine eine Möglichkeit gefunden. Sie hat immer abwechselnd je ein Kaninchen und ein Huhn gezeichnet und fortlaufend die Beine gezählt. So kam sie auf 3 Kaninchen und 4 Hühner.


**Bild 2**

Auch Lea hat durch Zeichnen und Zählen der Beine eine Lösung gefunden. Sie hatte aber gleich die Idee, dass es noch weitere Lösungen geben muss und fand zeichnerisch eine zweite.


**Bild 3**

Severin (Schulanfänger) überlegte kurz und löste das Problem gleich auf der symbolischen Ebene. Glück oder mathematischer Instinkt hatten ihn gleich zur ersten Lösung geführt: 8 Hühner und 1 Kaninchen.
Er überlegte und probierte dann 6 Hühner und 2 Kaninchen aus. An dieser Stelle rief er: „Ich hab' den Trick!" und schrieb alle Möglichkeiten strukturiert auf. Er war von seiner Systematik so fasziniert, dass er vergaß, dass mindestens 1 Huhn und 1 Kaninchen im Stall sein sollten. Kein Problem: Severin veränderte daraufhin die Aufgabenstellung.




Auch bei den Schülern der dritten Jahrgangsstufe wurden verschiedene Darstellungsformen gewählt. Einige nutzten die Tabellenform noch ungeordnet (Bild 4) oder die Textdarstellung (Bild 5 und 6). Meist wurde durch Probieren eine Lösung gefunden, durch Zusammenrechnen der Beine überprüft und dann entsprechend weitergearbeitet.

Die Beschreibung des Lösungswegs fällt noch einfach aus.

**Bild 4**

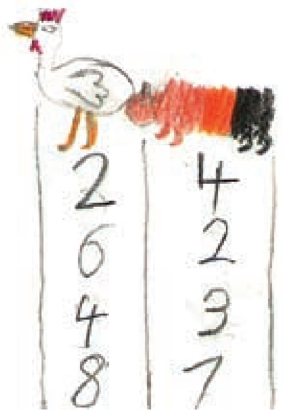



**Bild 5**

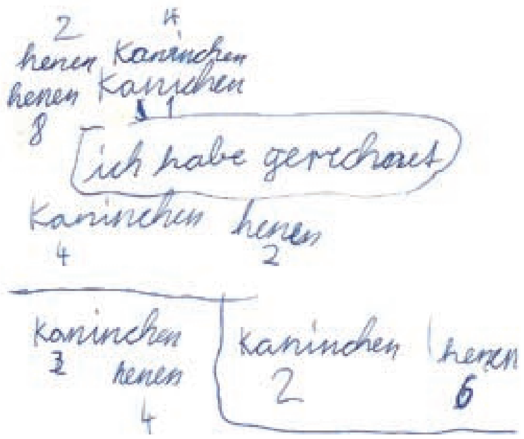
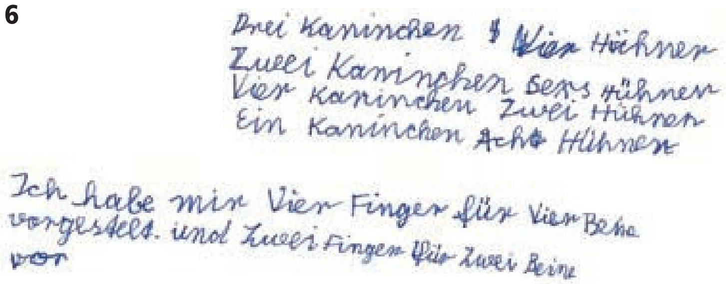



**Bild 6**




## Stolpersteine

Für manche Kinder stand die zeichnerische Qualität ihrer Kaninchen und Hühner im Vordergrund. Es war ihnen teilweise so wichtig ihre Tiere detailgetreu zu zeichnen, dass dabei die eigentliche Aufgabe in Vergessenheit geriet. Hier lohnt es sich, die Besonderheiten einer Skizze zu besprechen: Wichtig ist der mathematische Inhalt und nicht die perfekte Abbildung eines Huhns. Auch der Hinweis, dass nach dem Lösen der Aufgabe noch Zeit für das Zeichnen bleibt, kann hilfreich sein.

Manche Schüler zeichneten die Kaninchen wie Osterhasen stehend und zählten dann nur zwei Beine, weil es durch diese Darstellung zu zwei Beinen und zwei Armen kommt. Hier hilft nur gemeinsam zu überlegen, wie ein Kaninchen sich fortbewegt und dass Vorder- und Hinterläufe Beine sind.

Wenn Schüler noch ungeübt sind, fällt es ihnen häufig schwer, ihren Lösungsweg zu reflektieren, in Worte zu fassen und aufzuschreiben. Kleine Ansätze positiv zu verstärken und gemeinsam an weiteren Formulierungen zu arbeiten unterstützt die Kinder in ihrem Bemühen. „Ich habe gerechnet." (Bild 5) ist ein Anfang. Durch eine Nachfrage z. B. „Was hast du genau gerechnet?" kann man etwas genauere Angaben anregen. Wenn der Schüler mündlich eine Erklärung gibt (das fällt den Schülern im Allgemeinen leichter) kann man ihn bitten, das eben Gesagte aufzuschreiben.

## Fazit

- Alle Schülerinnen und Schüler waren hoch motiviert.
- Jeder fand mindestens eine Lösung. Schnelle und leistungsstarke Schüler hatten eine Herausforderung, indem sie nach weiteren Lösungsmöglichkeiten suchten.
- Die ganze Bandbreite der Leistungsfähigkeit zeigte sich in den Ergebnissen: Von der einzelnen zeichnerischen Lösung bis zur strukturierten Aufstellung aller Lösungsmöglichkeiten.
- Heuristische Lösungsstrategien wie Probieren, geordnete Aufstellung und Skizze wurden verwendet und geübt. Es gab unterschiedliche Lösungsstrategien.

## Wie kann es weitergehen?

Um allen Schülern die Möglichkeit zu geben, ihren erprobten und reflektierten Lösungsweg an ähnlichen Aufgaben zu überprüfen, sollten sich weitere Aufgaben mit ähnlichem Aufbau anschließen. Gerade schwächere Schüler sind erleichtert, weil sie die gleiche Strategie anwenden können, die sie entweder schon einmal erfolgreich angewendet haben oder die sie abgeschaut haben. Fast alle erkennen irgendwann die Strukturgleichheit, aber zu unterschiedlichen Zeitpunkten und in unterschiedlichen Ausprägungen.

Folgende Aufgaben könnten sich anschließen:

**Auf dem Spielplatz**
Auf einem Spielplatz stehen Fahrräder mit zwei Rädern und Puppenwagen mit vier Rädern. Es sind insgesamt 24 Räder.

**a** Wie viele Fahrräder und wie viele Puppenwagen könnten es sein?
**b** Gibt es noch andere Möglichkeiten?
**c** Findest du sie alle?
Wie viele Möglichkeiten gibt es?
**d** Beschreibe deinen Lösungsweg.

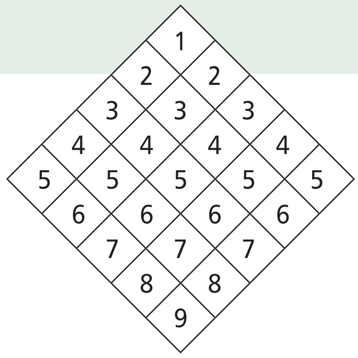
Eine größere Herauforderung sind Aufgaben, bei denen es eine zusätzliche Bedingung gibt und die nur eine Lösung zulassen:

**Hasen und Tauben**
Im Hasengehege eines Zoos befinden sich außer den Hasen auch Tauben. Zählt man die Köpfe und die Füße aller Tiere im Gehege kommt man zu folgenden Zahlen: Es sind 22 Köpfe und 60 Füße.
Wie viele Hasen und Tauben sind im Gehege?

# 9 Zahlenfeld

**1** Erkunde das Zahlenfeld. Was fällt dir auf?

**2** Arbeite mit einem Partner.
Findet schlaue Wege, um alle Zahlen zu addieren.
Begründet euren Rechenweg.




**Worum geht es?**

Diese Aufgabe stellt eine Forscheraufgabe im besten Sinne dar. Die Schüler setzen sich mit gegebenen Zahlenmustern auseinander. Sie versuchen, geometrische und arithmetische Strukturen zu identifizieren und anhand dieser geeignete Strategien zur Berechnung der Summe zu finden. Dabei kommt der Kommunikation über geschickte Vorgehensweisen und deren Darstellung eine wichtige Rolle zu.

Im Zentrum der Aufgabe steht die Durchdringung der Struktur des oben abgebildeten Zahlenfeldes. Es besteht aus 25 systematisch angeordneten Zahlen von 1 bis 9, die unterschiedlich häufig vorkommen. Weitere Entdeckungen:

- In einer Reihe findet man ausschließlich gleiche Zahlen.
- In jeder Spalte findet man andere Zahlen.
- Die Ergebnisse der ersten 5 Reihen sind Quadratzahlen: 2 mal 2, 3 mal 3 …
- Die 5 ist die häufigste Zahl und kommt fünfmal vor. Nach der 5 nimmt die Anzahl der einzelnen Zahlen wieder ab.
- In den Diagonalen sind die Zahlen fortlaufend angeordnet (2, 3, 4, 5, 6 oder 4, 5, 6, 7, 8).
- Am Rand des Zahlenfeldes findet man fortlaufend die Zahlen 1 bis 9, sowohl auf der rechten, als auch auf der linken Seite.
- Untereinander stehen (Spalten) immer entweder gerade oder ungerade Zahlen.
- Addiert man jeweils die fünf Zahlen einer Diagonale, so stellt man fest, dass die Summen immer um 5 wachsen.
- Addiert man die Zahlen einer Spalte, ergibt sich das Gleiche.
- Halbiert man das Zahlenfeld senkrecht, so erkennt man, dass die Zahlen rechts und links von der mittleren Zahlenreihe symmetrisch angeordnet sind und dadurch gleiche Summen bilden.
- Wenn man in den Senkrechten jeweils zwei Zahlen addiert, so dass die Summe 10 ergibt, so erhält man 10 mal 10 = 100.

Die Wahrnehmung dieser Regelmäßigkeiten ist Voraussetzung für das Finden geschickter Möglichkeiten zur Berechnung der Summe der 25 Zahlen, die 125 ergibt.

**Themenfeld**
Zahlen und Operationen

**Anforderung**
mehrere Rechenoperationen miteinander verknüpfen

**Allgemeine mathematische Kompetenz**
*Kommunizieren:* eigene Vorgehensweisen beschreiben, Lösungswege anderer verstehen und gemeinsam darüber reflektieren

**Stufe**
3. bis 4. Klasse,
besonders geeignet für jahrgangsgemischte Lerngruppen

**Zeitbedarf**
1 bis 2 Unterrichtsstunden

**Material**
- Kopiervorlage 9 (1)
- Kopiervorlage 9 (2)

Ein geschicktes Verfahren hierzu wäre beispielsweise das Bilden von Pärchen, die jeweils 10 ergeben: $1 + 9$, $2 + 8$ usw. Man erhält 10 solcher Pärchen ($= 100$) und müsste dann noch die 5 mal 5 ($= 25$) aus der mittleren Reihe addieren. Eine andere Möglichkeit könnte das Errechnen der Zeilensummen sein, die sich dann auch wieder zu leicht zu rechnenden Summen zusammenfassen lassen ($1 + 9$, $4 + 16$, $9 + 21$, $16 + 24$, $+ 25$).

### Wie kann man vorgehen?

Zunächst erhalten alle Schüler die Gelegenheit, sich intensiv mit der Struktur des Zahlenfeldes vertraut zu machen. Hierzu wird allen Schülern eine Kopie des Zahlenfeldes zur Verfügung gestellt, die sie in ihr Heft einkleben und dort ihre Beobachtungen zu Aufgabe 1 notieren. Eine Einführung im Klassenrahmen, in der zunächst Entdeckungen gesammelt werden, würde die mathematische Aktivität des einzelnen Schülers einschränken, zumal die rein rechnerischen Anforderungen für Schüler einer 3. oder 4. Klasse leicht zu bewältigen sind.

Die Aufgabenstellung zu Aufgabe 2 fördert den Austausch über Entdeckungen und Lösungsmöglichkeiten nahe: Welche Rechenvorteile kann ich erkennen, welches ist für mich der „schlaueste" Weg? Die Aufgabenstellung für die Partnerarbeit lautet dementsprechend: „Erkundet das Zahlenfeld. Findet schlaue Wege, um alle Zahlen zu addieren und begründet euren Rechenweg schriftlich."

Im Anschluss an die Partnerarbeit kommt dem gemeinsamen Unterrichtsgespräch über die gefundenen Lösungswege eine außerordentlich wichtige Bedeutung zu. Um die Breite und Individualität der gefundenen Rechenwege zu dokumentieren und den Austausch im Klassenverband zu erleichtern, stellen einige Arbeitsgruppen ihre Ergebnisse an der Tafel vor. Ein an der Tafel vorgegebenes Zahlenfeld erleichtert es den Schülern, durch farbige oder andere Markierungen ihren Weg für alle gut nachvollziehbar zu erläutern.

Die Präsentation erfordert eine Hervorhebung der jeweils wahrgenommenen Struktur und eine Begründung für die Auswahl dieses besonderen Weges. Dies ist der Lerngewinn der darstellenden Gruppe. Die Zuhörer erweitern in der Zeit ihren Blick auf das Zahlenfeld oder sehen ihre Erkenntnisse bestätigt. Die Kommunikation im Klassenverband wird durch das zuvor entstandene Tafelbild erleichtert. Im Anschluss daran dokumentiert jedes Kind in seinem Heft ausführlich den Rechenweg, den es nach der Vorstellung der unterschiedlichen Rechenwege persönlich bevorzugt. Dies kann auch ein anderer sein, als der, den es anfangs in der Partnerarbeit entworfen hatte. Die Darstellung der Rechenwege im Heft erlangt durch die vorhergehende gründliche Diskussion im Klassenverband größere Klarheit. Die Möglichkeit der Entscheidung auch für einen anderen als den ursprünglich gewählten Weg bewirkt eine gründliche Auseinandersetzung mit alternativen Vorgehensweisen.

## Dokumente aus der Erprobung

Ein Sortieren der Schülerarbeiten nach einfachen oder anspruchvolleren Ausführungen fällt schwer. Die einfachste Form, nämlich die fortlaufende Addition aller Zahlen, wurde von keiner Gruppe gewählt. Allerdings sind deutliche qualitative Unterschiede bei der geschickten Gruppierung der Zahlen zu erkennen.

**Bild 1**
Sharif und Marcel addierten die Zahlen in unterschiedlichen Diagonalen ohne einen Rechenvorteil zu erkennen und addierten dann die Zwischenergebnisse schriftlich.

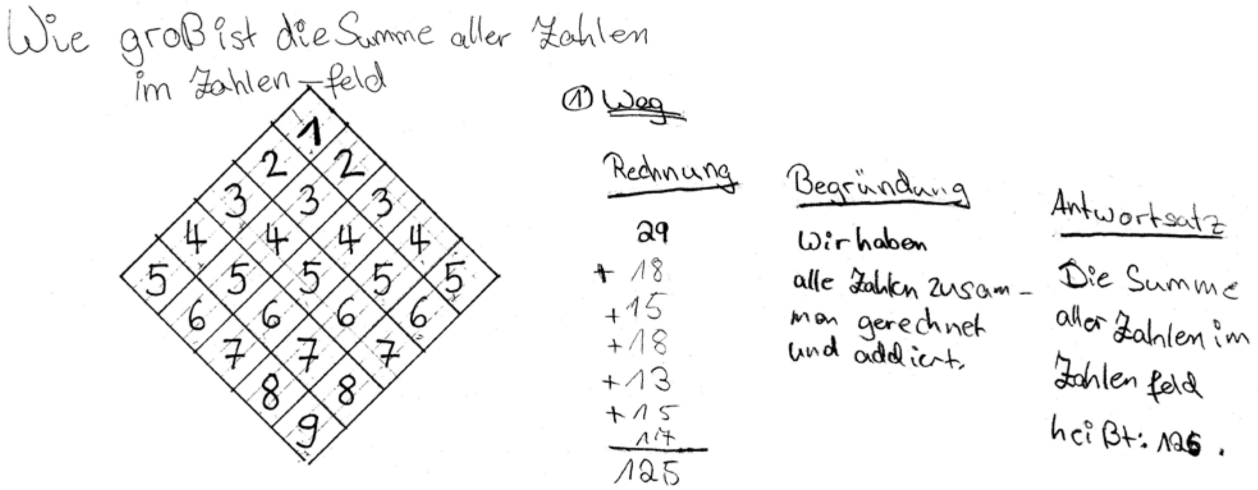



**Bild 2**
Vicky und Aylin erkannten den Rechenvorteil, dass die Summen der Zahlen in den Diagonalen jeweils um 5 anwachsen und nutzten dies für die abschließende Summenbildung. Durch farbige Markierungen und Nummerierung der Zeilen unterstützen sie die Nachvollziehbarkeit ihrer Überlegungen. Der beschreibende Text blieb allerdings etwas holprig.

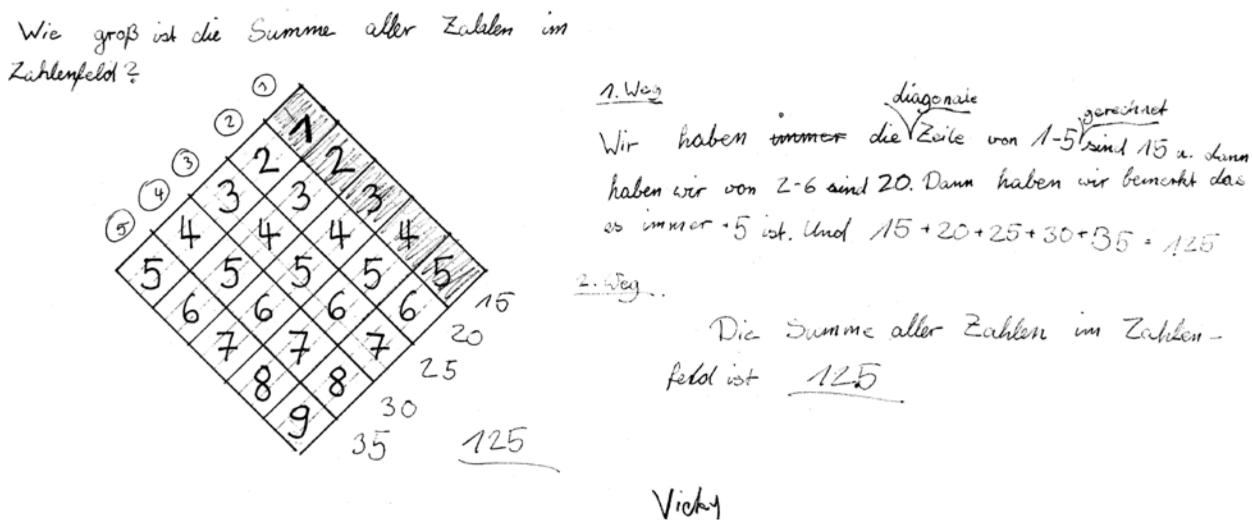
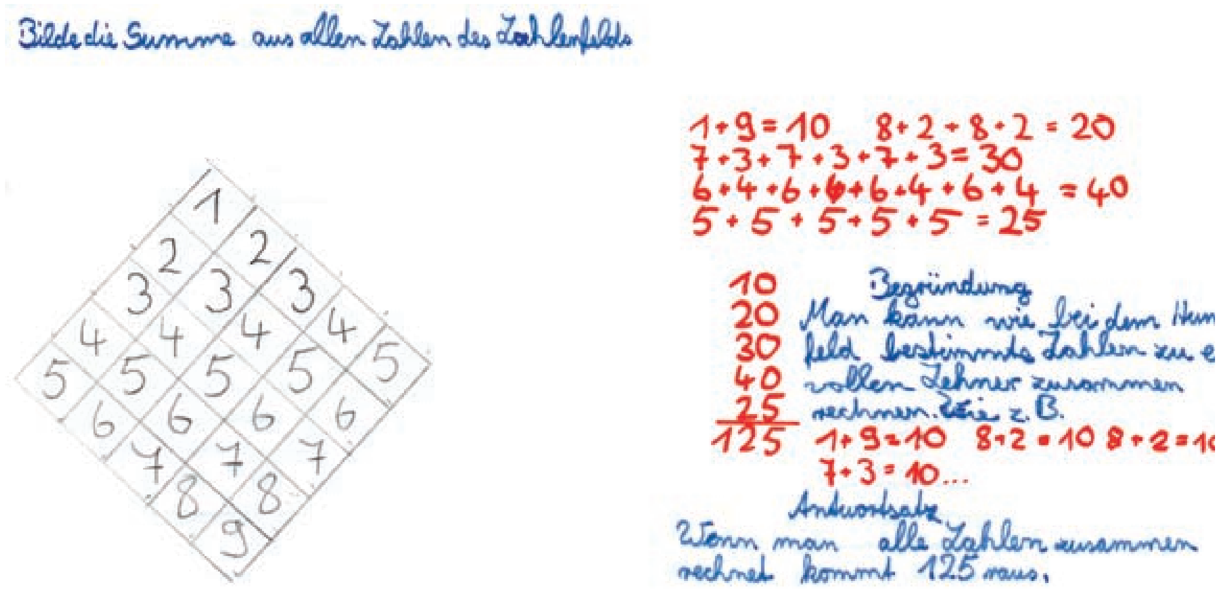


**Bild 3**
Sophie und Pia erkannten die Möglichkeit, senkrecht jeweils 2 Zahlen zu einem vollen Zehner zu addieren und fassten außerdem alle passenden Möglichkeiten in jeweils einer Aufgabe zusammen
(7 + 3 + 7 + 3 + 7 + 3 = 30).




## Stolpersteine

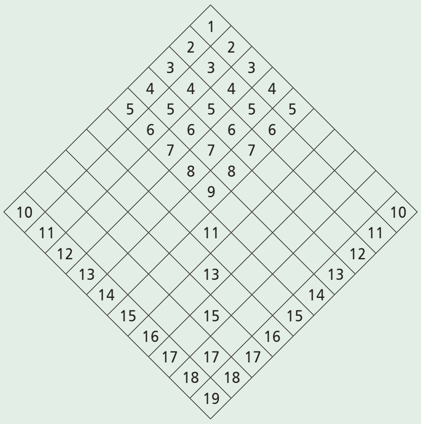
- Bei einigen Gruppen präsentierte nur ein Schüler den Lösungsweg. Eine vorhergehende Absprache über gewählte Schwerpunkte erleichtert die Präsentation als gemeinsame Arbeit. Eine Gliederungshilfe für die Präsentation könnte es sein zu beschreiben, was die Gruppe als erstes überlegt hat und wie sie dann weiter vorgegangen ist.
- Wenn Schülern zunächst nichts einfällt, ist es sinnvoll, ihren Blick mit gezielten Fragen auf das Entdecken von Auffälligkeiten und Beschreibung zu lenken. Was siehst du? Was fällt dir auf?
- Für einige Schüler ist es nicht leicht, ihre richtigen Überlegungen schriftlich in Worte zu fassen. Wenn Fachbegriffe wie Diagonale, Summe oder Produkt noch nicht präsent sind, gilt es, mit eigenen Worten den Zusammenhang darzustellen. Die Verwendung mathematischer Fachsprache erleichtert die Verständigung untereinander sehr.

## Fazit

- Alle Gruppen haben die Aufgabe verstanden und sie mit dem Schwerpunkt „geschicktes Rechnen" zielgerichtet bearbeitet.
- Es gab unterschiedlich anspruchsvolle Lösungswege – wobei auch die Art der Darstellung stark variierte.
- Die Motivation, das erweiterte Zahlenfeld zu bearbeiten, war groß. Die Gruppen verknüpften die Erkenntnisse aus der Berechnung des kleinen Zahlenfeldes mit der neuen Aufgabe.

– Bei der abschließenden Auswertung beteiligten sich alle Schüler und brachten ihre Vorgehensweisen ein.
– Beim Formulieren und schriftlichen Festhalten ihrer Rechenwege haben die Schüler auch den Gebrauch von mathematischen Fachtermini geübt.

## Wie kann es weiter gehen?



Zur anspruchsvolleren Fortsetzung der Arbeit bietet sich die Erweiterung des identisch aufgebauten Zahlenfeldes an. Diese Erweiterung bietet die Möglichkeit, erkannte Strukturierungsmöglichkeiten auf höherem Niveau anzuwenden und ihre Anwendung zu festigen. Aus der symmetrischen Struktur des Zahlenfeldes ergibt sich, dass das rechte und das linke Teilquadrat die gleichen Summen besitzen.

Überträgt man die Erkenntnis aus dem kleineren Zahlenfeld, dass die Summen der Zahlen in den Diagonalen der Quadrate immer um 5 größer werden, so ergibt sich für das linke und natürlich auch für das rechte Teilquadrat folgende Rechnung: $40 + 45 + 50 + 55 + 60 = 250$. Die Summe des rechten und des linken Zahlenquadrates ist also jeweils 250. Addiert man das obere Zahlenfeld (Summe 125), das rechte und das linke (Summe jeweils 250) und das untere (Summe 375) so erhält man das Ergebnis 1000.

**Bild 4**
Ben und Lara haben das Zahlenfeld in 4 Teilfelder unterteilt. Die Schüler haben hier erkannt, dass das rechte und linke Quadrat jeweils die Summe 250 hat und dass das untere Zahlenfeld genau um 25 mal $10 = 250$ größer sein muss als das obere, weil jede Zahl genau um 10 größer ist als die entsprechende Zahl im oberen Teilquadrat.

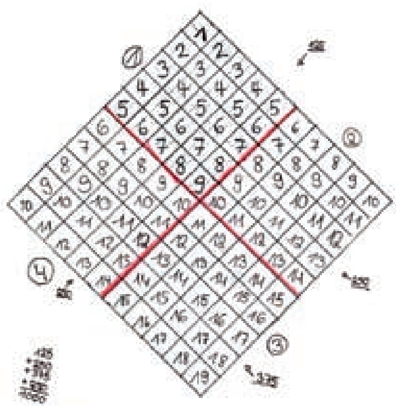
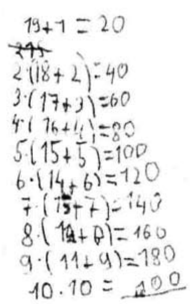


**Bild 5**
Alina hat es nicht als notwendig erachtet, das Zahlenfeld vollständig auszufüllen, weil sie das Aufbauprinzip verinnerlicht hat. Die Addition der Ergebnisse der folgenden Aufgaben ergibt 1000:

1 mal $19 + 1 = 20$
2 mal $18 + 2 = 40$
3 mal $17 + 3 = 60$
4 mal $16 + 4 = 80$
…



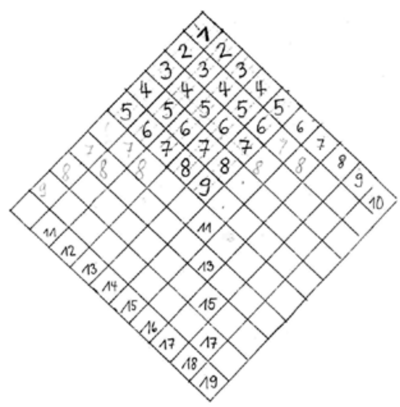
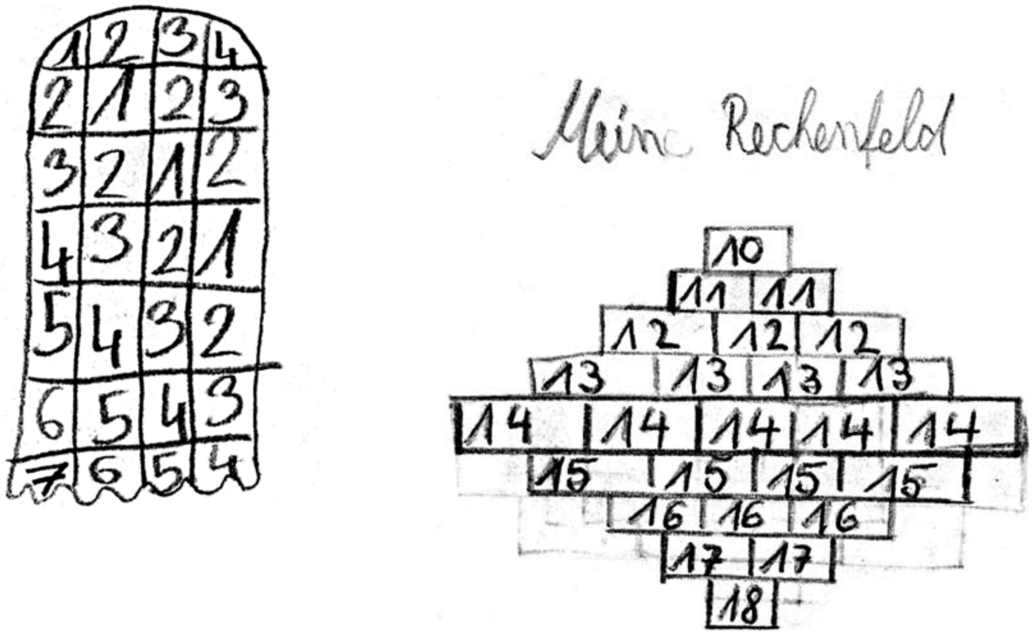



**Bild 6**
Eine weitere Möglichkeit, das Thema Zahlenfeld zu erweitern ist es, die Schüler selbst Zahlenfelder entwerfen zu lassen, die dann wiederum von anderen Kindern bearbeit werden können.



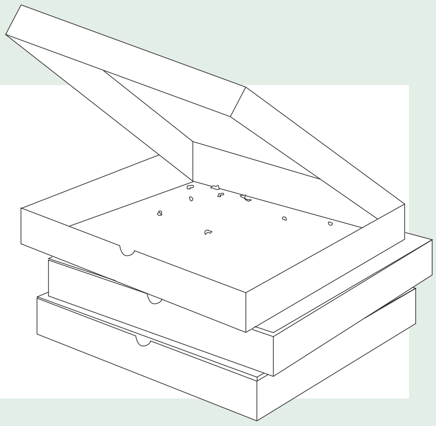
Die Analogie zur sogenannten Gauß-Aufgabe (Addition aller Zahlen von 1 bis 100) legt nahe, im Umfeld von Zahlenfeldern auch ein wenig Geschichte der Mathematik zu betreiben. Das Interesse der Schüler an der Begegnung mit bedeutenden Persönlichkeiten ist hoch und Carl Friedrich Gauß als einer der größten Mathematiker aller Zeiten ein lohnenswertes Thema. Der andere Aufbau des dort verwendeten Zahlenfeldes bietet die Möglichkeit der Übertragung der in der hier vorgestellten Aufgabe gewonnen Lösungsstrategien auf einen anderen Zusammenhang. Weitere Anregungen zur Unterrichtsgestaltung finden sich bei Müller/Wittmann: Das Zahlenbuch 4, Lehrerband S. 202 ff.

**Literatur**

Nührenbörger, Marcus/Verboom, Lilo: Modul G 8: Eigenständig lernen – Gemeinsam lernen; IPN 2005

Wittmann, Erich Chr./Müller, Gerhard N.: Das Zahlenbuch 4. Lehrerband 2000; Klett 1994

# 10 Pizza-Aufgabe



**1** Vier Kinder teilen sich gerecht drei Pizzen.
Wie viel bekommt jedes Kind?
Male ein Rechenbild und schreibe auf, was du dir überlegt hast, um die Aufgabe zu lösen.

**2** Jetzt kannst du entscheiden!
Wie viele Pizzen sollen an die vier Kinder verteilt werden?
Finde dann heraus, wie viel Pizza jedes Kind bekommt.

## Worum geht es?

Die Bearbeitung der Aufgabe bietet sich als Standortbestimmung vor der unterrichtlichen Erarbeitung der Bruchrechnung an. In der Umwelt der Kinder gibt es genügend Anlässe für den konkreten Umgang mit Brüchen. Im Zusammenhang mit Längen, Gewichten, Zeiteinheiten im Alltag, bei sportlichen Veranstaltungen oder auch beim Kochen sind Bruchtermini vielen Kindern geläufig. Hieran knüpft die Aufgabe an und thematisiert ein grundlegendes Verständnis von Brüchen. Die Bildung von Bruchvorstellungen auf elementarem Niveau soll angebahnt werden. Der Schwerpunkt der Aufgabe liegt darauf, grundlegende Brüche wie ein Halb, ein Viertel und drei Viertel für die Kinder mit Sinn zu füllen. Der Begriff gerecht weist darauf hin, dass die Größe beim Aufteilen nicht beliebig ist, sondern jedes Kind bekommt gleich viel.

Rechnerisch handelt es sich bei der Pizzaaufgabe um eine Divisionsaufgabe. Vier Pizzen sollen an drei Kinder verteilt werden. Damit das Verteilen möglich ist, müssen die Pizzen zunächst aufgeteilt werden. Dazu gibt es unterschiedliche Möglichkeiten:

**A** Man stellt sich vor, dass zunächst drei Kinder je eine Pizza bekommen. Nun wird von jeder der drei Pizzen ein Viertel abgeschnitten. Das vierte Kind bekommt dann dreimal ein Viertel Pizza. Jetzt hat jedes Kind drei Viertel Pizza.
**B** Jedes Kind bekommt zunächst eine halbe Pizza. Jetzt sind zwei der Pizzen verteilt. Die dritte Pizza wird in vier gleich große Teile zerlegt, also geviertelt. Jedes Kind bekommt nun noch eine viertel Pizza. Jetzt hat jedes Kind eine halbe und eine viertel Pizza, zusammen also drei Viertel Pizza.
**C** Alle drei Pizzen werden in je vier Stücke aufgeteilt. Anschließend werden die entstandenen zwölf Viertel an die vier Kinder verteilt. Jedes Kind bekommt dreimal ein Viertel Pizza, also insgesamt drei Viertel Pizza.

Bei dieser Aufgabenstellung wird sowohl addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert. Bei Weg A wird zunächst subtrahiert ($1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$) und anschließend addiert $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ oder multipliziert 3 mal $\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. Bei Weg B wird zunächst dividiert: $2:4=\frac{1}{2}$. Jedes Kind bekommt also eine Hälfte. Anschließend wird wieder dividiert: $1:4=\frac{1}{4}$ und am Schluss dann addiert: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

**Themenfeld**
Zahlen und Operationen

**Anforderung**
Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übertragen und dabei Gleichungen bilden und sachbezogen lösen

**Allgemeine mathematische Kompetenz**
*Modellieren:* Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen

**Stufe**
3. bis 5. Klasse

**Zeitbedarf**
3 bis 4 Unterrichtsstunden

**Material**
– farbiges Faltpapier
– Klebstoff
– Scheren
– Kopiervorlage 10

In den Überlegungen werden Grundoperationen der Bruchrechnung angewendet, ohne dass die Kinder in die Regeln der Bruchrechnung eingeführt worden sind.

Konkrete Vorstellungen der Kinder können bei dieser Aufgabe durchaus im Widerspruch zur mathematischen Gleichheit stehen. Wenn die Pizzen in der Vorstellung der Kinder unterschiedlich belegt sind, führen die unterschiedlichen Wege der Aufteilung praktisch zu unterschiedlichen Ergebnissen.

Der Kreis ist als Grundvorstellung für die Arbeit mit elementaren Brüchen nicht optimal. Die Zerlegung in Halbe und Viertel kann jedoch mit dem Kreis sehr anschaulich mit Augenmaß erfolgen kann.

Bei der Pizza-Aufgabe wird ein Alltagsproblem mit Hilfe mathematischer Überlegungen gelöst. Es handelt sich deshalb um eine typische Modellierungsaufgabe.

**Wie kann man vorgehen?**

Die Aufgabe stellt eine reale Situation des täglichen Lebens vor. Sie provoziert eine pragmatische Lösung, die aber auf mathematischem Niveau reflektiert werden kann. Realistische Fragestellungen können aufgeworfen werden: Welche Arten von Pizzen essen einzelne Kinder gern, wie sind die Pizzen belegt? Welche Teile der Pizzen muss man nach dem Aufteilen außerdem noch essen? Es könnte sich die Frage stellen, was denn eigentlich Gerechtigkeit bedeutet. Wenn der Vater mit am Tisch säße, sollte er dann nicht gerechterweise mehr als ein Kind essen dürfen? Es ist sinnvoll, im Unterrichtsgespräch Zeit zur Klärung solcher Fragen einzuplanen. Wichtig ist dabei jedoch, dass kein Lösungsweg vorweggenommen wird.

Jedes Kind benötigt Zeit, in Ruhe über die Aufgabe nachzudenken und sich die Problemstellung bewusst zu machen. Kinder, die sich die Aufteilungssituation nicht vorstellen können, können durch Material unterstützt werden. Buntes kreisförmiges Faltpapier, Klebstoff und Scheren helfen, die Situation nachzuvollziehen und eine Lösung für das Problem zu finden.

Die Schüler sind aufgefordert, das Auf- und Verteilen in einem Rechenbild festzuhalten, damit der Lösungsprozess für alle nachvollziehbar wird. Sie verfassen einen kleinen Text, in dem sie ihr Vorgehen beschreiben und bestenfalls auch begründen. Die unterschiedlichen Herangehensweisen werden gut sichtbar und jedes Kind macht sich beim Aufschreiben seinen Lösungsprozess noch einmal bewusst.

Die Frage der richtigen Notation von Brüchen spielt bei dieser Aufgabe keine entscheidende Rolle. Es ist durchaus angemessen, wenn die Kinder eine persönliche Schreibweise finden (siehe Titelfoto). Wenn die Schüler es wünschen, bietet sich hier aber auch eine Gelegenheit, die korrekte Bruchschreibweise einzuführen.

Die fertigen Rechenbilder werden beispielsweise an die Magnettafel geheftet. Einige Schüler stellen der Klasse ihren Lösungsweg vor. Es werden die unterschiedlichen individuellen Wege besprochen und auf Effektivität, Klarheit und Verständlichkeit der Formulierungen hin untersucht. Die Möglichkeit einer Überarbeitung des Textes könnte für mache Kinder sinnvoll sein. Dazu wird gemeinsam über treffende und sachlich stimmige Formulierungen und Fachtermini nachgedacht (Was bedeutet halbieren, was bedeutet vierteln?).



## Beispiele aus der Erprobung

**Bild 1**
Mike hat das Angebot der Lehrerin angenommen und hat aus 3 farbigen Papierscheiben jeweils ein Viertel herausgeschnitten, um diese an das 4. Kind zu verteilen. Das Vorgehen von Mike entspricht dem Weg A.

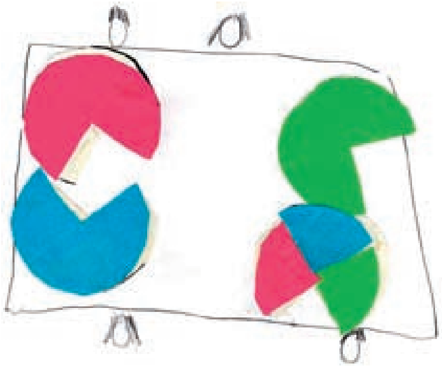


**Bild 2**
Melissa bildet in der Zeichnung sehr übersichtlich sowohl das Ergebnis der Aufteilung als auch das Ergebnis des Verteilens ab. Der Text beschreibt gut nachvollziehbar das, was das Bild schon ausgedrückt hat. Ihr Vorgehen entspricht dem Weg B.

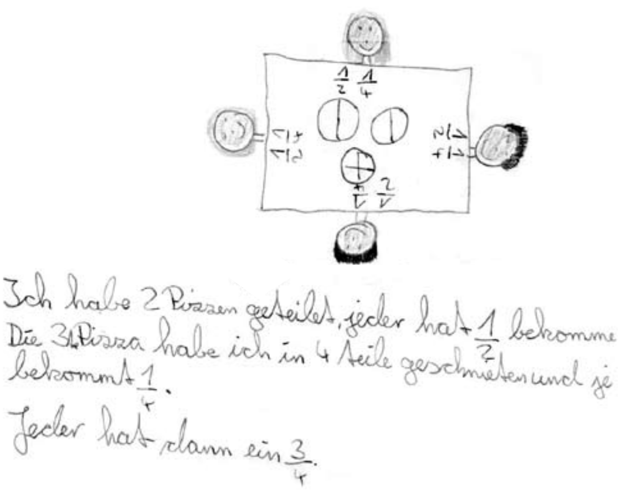



**Bild 3**
Moritz verzichtet ganz auf eine Zeichnung. Der Text betont besonders die in der Aufgabe hervorgehobene gerechte Verteilung und den Bezug dazu, dass alle Teile gleich groß sein müssen. Moritz hat den Weg C gewählt.

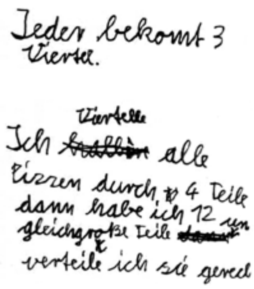



**Bild 4**
Sophie beantwortet die gestellt Frage nicht in Form eines Textes oder eines Antwortsatzes. Sie probiert die unterschiedlichen Möglichkeiten des Aufteilens der Pizzen in Viertel, Halbe, Drittel und Achtel. Dies macht sie in zeichnerisch. In der Mitte sieht man die drei Pizzen. Die Sprechblasen der Kinder enthalten die Möglichkeit der gerechten Verteilung. Den beiden Kindern links unten und oben geht ein Licht auf, weil sie eine sinnvolle Lösung gefunden haben. Die Gedanken der beiden Kinder rechts werden von Sophie mit einem f versehen, weil bei einer Drittelung oder Halbierung keine gerechte Verteilung möglich wird. An Sophies Zeichnung wird deutlich, dass sie ein grundlegendes Verständnis von Brüchen besitzt.

Aufgabe 2 dient der vertreifenden Beschäftigung mit der Fragestellung. Sie kann dazu führen, mit einer systematischen Erhöhung der Zahl der Pizzen eine zugrunde liegende Struktur zu entdecken. Mit jeder weiteren Pizza, die durch vier geteilt wird, erhöht sich der Anteil jeden Kindes um ein Viertel. Natürlich lässt sich dies auch rückwärts denken: Wie viel bekommt jedes Kind, wenn nur zwei oder sogar nur eine Pizza zur Verfügung stehen? Hypothetisch lässt sich nach Erkennen der Struktur auch die Frage nach beispielsweise 19 Pizzen lösen: Bei 20 Pizzen bekäme jedes Kind fünf Pizzen. Bei 19 bekommt jeder ein Viertel weniger, also vier $\frac{3}{4}$ Pizzen. Als Strukturierungshilfe könnten die selbst gewählten Pizza-Anzahlen und Verteilungsergebnisse aller Kinder in einer Tabelle gesammelt werden.

**Bild 5**
Marc wählte eine hohe Anzahl (19) an Pizzen. Die Rechnung erfolgte ausschließlich im Kopf über die Zerlegung des Dividenden und der anschließenden Addition der Teilergebnisse.

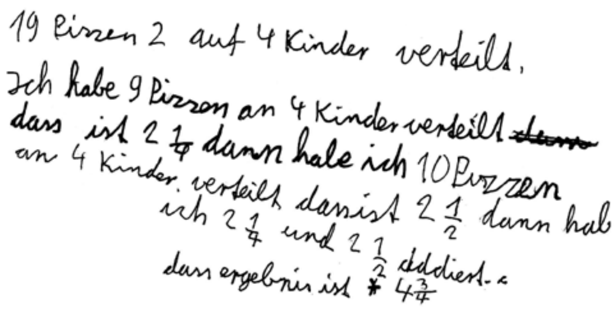
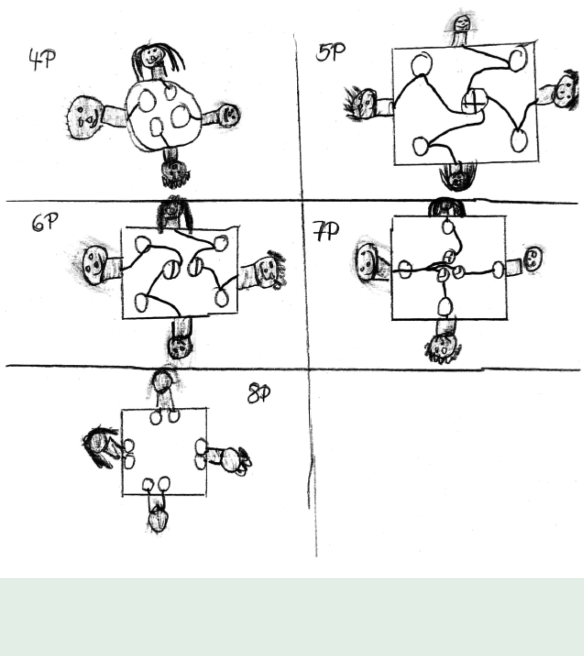



**Bild 6**
Valentina beschreibt ausführlich ihren Denkprozess. Die Zeichnung entspricht dem Text und beinhaltet die wesentlichen Informationen. Die Zeichnung erwies sich als anschauliche Hilfe, um die Verteilung von jetzt fünf Pizzen zu verstehen. Erst danach hat Valentina ihre Überlegungen aufgeschrieben.


**Bild 7**
Pit untersucht systematisch, wie viel Pizzen die vier Kinder bekommen, je nachdem ob 4, 5, 6 oder 7 Pizzen auf dem Tisch stehen. Die Darstellung spricht für sich und besticht durch ihre Klarheit. Verbindungslinien machen den Prozess deutlich.



## Erprobungen haben gezeigt

- dass die Anfänge der Bruchrechnung auch schon bei 9- bis 10-jährigen Schülern thematisiert und bearbeitet werden können. Die Erstellung von Rechenbildern unterstützt den Denkprozess.
- dass ein problemorientierter Zugang, der an die Alltagserfahrungen anknüpft, das Verständnis auch bei höherem Schwierigkeitsgrad erleichtert.
- dass die erste Aufgabe von allen Schülern gelöst werden konnte, allerdings auf unterschiedlichem Abstraktionsniveau.
- dass handlungsbetonte Unterstützung manchmal hilfreich ist. Einige Schüler konnten sich den Aufteilungsprozess erst mit Hilfe des Zerschneidens von farbigen Papierkreisen veranschaulichen.
- dass viele Schüler informative Texte schrieben. Schülern, die beim Verfassen des Textes unsicher waren, half der Hinweis auf die Erinnerung an die Reihenfolge der Handlungen (Zuerst habe ich … Anschließend …).
- dass durch Reflexion der Texte im Klassenverband und anschließende Überarbeitung die Qualität und Verständlichkeit der Schülertexte spürbar verbessert werden konnten.
- dass die Schüler etwa zu gleichen Teilen die drei unterschiedlichen mathematischen Vorgehensweisen zur Lösung der Aufgabe wählten.
- dass die Lösungsansätze der zweiten Aufgabe vielfältig waren und besonders viel Spielräume für die unterschiedlichen Leistungsniveaus schafften: Manche Schüler wählten auch hohe Anzahlen von Pizzen, andere blieben im realistischen Zahlenraum. Die Darstellung wurde insgesamt zunehmend abstrakter.
- dass die Aufgabe insgesamt einen großen natürlichen Differenzierungsspielraum bot.

## Aufgabenlösungen mit erhöhtem Schwierigkeitsgrad

- verdeutlichten den Aufgabenlösungsprozess durch treffende prozessorientierte Zeichnungen.
- erfolgten teilweise rein rechnerisch.
- reflektierten verschiedene Möglichkeiten des Aufteilens.
- brachten auch sprachlich entscheidende Gesichtspunkte zum Ausdruck.

## Einfache Aufgabenlösungen

- erfolgten unter Rückgriff auf das bereit gestellte Material.
- legten den Schwerpunkt auf das genaue Zeichnen.
- blieben ohne das Erkennen struktureller Zusammenhänge.

## Wie kann es weiter gehen?

- Bruchteile mit der Zeichenuhr systematisch herstellen und neue Brüche erzeugen
- andere Brüche aus der Lebensumwelt der Schüler vertiefend bearbeiten



## Literatur

Ruf, Urs/Gallin, Peter: Ich mache das so! Sprache und Mathematik. 5–6; Lehrmittelverlag des Kantons Zürich 1999

Wittmann, Erich Chr./Müller, Gerhard N.: Das Zahlenbuch 4. Lehrerband, Schülerband und ergänzende Materialien aus dem Programm Mathe 2000; Klett 1994

Wieland, Gregor u. a.: Das Mathematikbuch Lernumgebungen 5; Klett 2008

# 11 Das Pascal'sche Dreieck

**1** Wie geht es weiter?
Trage die fehlenden Zahlen ein.

**2** Welche Muster kannst du entdecken?
Male bunt und beschreibe. (Findest du mehrere?)

**3** Addiere in jeder Zeile des Dreiecks die Zahlen.
Was fällt dir bei den Ergebnissen auf?

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

## Worum geht es?

Das Pascal'sche Dreieck ist eigentlich ein Zahlenturm, der schon im alten China bekannt war. Der französische Mathematiker und Philosoph Blaise Pascal (1623–1662) beschäftigte sich intensiv mit dem Dreieck, daher ist das Dreieck heute unter seinem Namen bekannt. Im Mathematikunterricht wird es häufig in der Sekundarstufe I behandelt. Durch seinen einfachen Aufbau bietet es aber durchaus auch Grundschülern eine Fülle von Aktivitäten zum Aufspüren, Beschreiben und Erklären von Zahlenmustern, Strukturen und arithmetischen Beziehungen.

Die Faszination für Muster und Strukturen erfasst jeden lernbereiten und neugierigen Geist, vor allem weil dass Denken eine strukturierende, ordnende Tätigkeit ist. Strukturen werden im Austausch mit der Umwelt entdeckt, aufgebaut und erworben. Sie sind nötig, um sich neue Kontexte schnell zu erschließen und zu nutzen. Sie gehören zu den Schlüsselqualifikationen um Kreativität, Problemlöse- oder Kommunikationskompetenz zu ermöglichen. Die Suche nach Mustern und Strukturen bedarf weder einer besonderen Begabung für Mathematik noch irgendwelcher Vorkenntnisse. Voraussetzung ist einzig, dass im Mathematikunterricht genügend Raum für individuelles Suchen und Entdecken gewährt wird. Er muss für die unterschiedlichen Zugänge und Wege offen sein.

Diese Aufgabe eignet sich sehr gut für eine didaktisch, inhaltliche Öffnung des Unterrichts. Sie ermöglicht sowohl eigenständiges Denken als auch Lernen in Sinnzusammenhängen. Die argumentative Auseinandersetzung mit anderen Sicht- und Vorgehensweisen wird besonders gefördert. Die individuellen Entdeckungen schaffen Diskussionsbedarf.

Der Aufbau des Pascal'schen Dreiecks ist einfach. Es beginnt oben mit einer Eins. Darunter stehen zwei weitere Einsen. Aus dieser 2. Zeile ergibt sich dann die dritte Zeile: 1 2 1. An der Seite stehen jeweils Einsen und die inneren Zahlen ergeben sich durch Addition der beiden darüber liegenden Zahlen der vorherigen Zeile. Dieses Muster kann beliebig nach unten verlängert werden. Es entsteht eine mathematische Struktur, in der es für Grundschüler einiges zu entdecken gibt:

**Themenfeld**
Zahlen und Operationen

**Anforderung**
Muster und Strukturen in Zahlenfolgen erkennen und beschreiben

**Allgemeine mathematische Kompetenz**
*Argumentieren:* mathematische Zusammenhänge erkennen, Vermutungen entwickeln, Begründungen suchen und nachvollziehen



**Stufe**
3. bis 6. Klasse,
besonders geeignet für jahrgangsgemischte Lerngruppen

**Zeitbedarf**
mindestens 2 Unterrichtsstunden

**Material**
- Kopiervorlage 11 (1)
- Kopiervorlage 11 (2)
- Kopiervorlage 11 (3)
- Kopiervorlage 11 (4)

- Betrachtet man beispielweise die diagonalen Reihen, so finden sich in der 1. Reihe die natürlichen Zahlen. In der 2. Reihe ergeben sich die Dreieckszahlen, in der 3. Reihe die Tetraederzahlen.
- In der Summe der Diagonalen finden sich die Fibonacci-Zahlen.
- Alle Zahlen in einer Zeile mit einer Primzahl als Zeilennummer sind durch diese teilbar.
- Auch jede schräge Spalte ergibt sich als Summe der Zahlen der vorherigen Spalte.
- Die Summe jeder Zeile ist das Doppelte der vorherigen Zeilensumme.
- In jeder Zeile zeigen sich die Binomialkoeffizienten zeigen.

Durch die Arbeit am Pascal'schen Dreieck werden unterschiedliche allgemeine mathematische Kompetenzen besonders gefördert, besonders das Problemlösen (Es müssen Zahlenzusammenhänge erkannt und genutzt werden.), das Kommunizieren (Auffälligkeiten werden beschrieben, Auffälligkeiten anderer müssen verstanden und reflektiert werden und mathematische Fachbegriffe verwendet) und das Argumentieren (Es werden mathematische Zusammenhänge erkannt, Vermutungen entwickelt und Begründungen gesucht.).

Die Aufgaben bieten ein gemeinsames Lernangebot, das von allen Kindern nach ihren individuellen Möglichkeiten und Interessen wahrgenommen werden kann. Für leistungsstärkere Schüler sind sogenannte „Rampen" vorhanden, die eine vertiefende Beschäftigung mit den Lerninhalten ermöglichen. Nicht zuletzt bietet diese Aufgabe so ganz nebenbei viel Anlass zum Kopfrechnentraining.

## Wie könnte man vorgehen?

Der obere Teil des Pascal'schen Dreiecks wird den Schülern auf einer OHP-Folie präsentiert. Die Darstellung endet mit einer leeren Reihe. Die Schüler vermuten, wie es weitergehen könnte. Anschließend bekommt jedes Kind den entsprechenden Arbeitsbogen und trägt die fehlenden Zahlen ein. In der Aufgabe 2 hat jeder Schüler die Möglichkeit, selbständig Muster und Auffälligkeiten zu entdecken. So finden auch leistungsschwächere Schüler einen guten Einstieg in die Aufgabe. In einer anschließenden Reflexion stellen die Schüler mithilfe einer einzufärbenden OHP-Folie ihre Muster vor und suchen nach Begründungen. Der Austausch der Schüler und das Vorstellen ihrer Arbeitsergebnisse sind ein wichtiger Anstoß für die selbständige Weiterarbeit an den Forscheraufgaben auf dem Arbeitsbogen.

## Erfahrungsbericht

Schnell entdeckten die Schüler einer vierten Klasse die Regel zum Ausfüllen des Dreiecks und berechneten die fehlenden Zahlen. Sie fanden bereits in dieser Phase die ersten Gesetzmäßigkeiten. Es sprach sich schnell herum, dass man immer nur bis zur Hälfte einer Zeile rechnen muss, da sich die Zahlen in umgekehrter Reihenfolge wiederholen.

Nachdem sichergestellt war, dass alle Schüler das Dreieck richtig ausgefüllt hatten, wurden im Klassengespräch verschiedenste Muster und Auffälligkeiten des Dreiecks vorgestellt und diskutiert:

- Es sind immer Einsen am Rand.
- In einer Schräge sind die Zahlen 1, 2, 3 ... zu sehen, auf der anderen Seite in die andere Richtung.
- Das Dreieck hat rechts und links die gleichen Zahlen.
- Manchmal sind zwei gleiche Zahlen in der Mitte und manchmal nicht – immer abwechselnd.
- Einige Schüler entdeckten die Folge der Dreieckszahlen 1, 3, 6, 10 ... als Muster.

Bei der Forscheraufgabe 2: „Welche Muster kannst du entdecken?“ ergaben sich Antworten auf allen Leistungsniveaus:

- Im oberen Schenkel stehen nur Einsen. (Bild 1)
- Bei jeder 2. Reihe kommt jede Zahl doppelt. (Bild 1)
- Es gibt drei Reihen, die aussehen wie ein Wigwam.
- Im darunter liegenden Schenkel stehen die Zahlen von 2–10.
- Im darunter liegenden Schenkel ist die nächste Zahl plus 4, dann plus 5, plus 6 u. s. w.
- Zweiter innerer Schenkel angefangen + 4, dann + (4 + 1) weitergehend, dann + (4 + 2), + (4 + 3)...
- Das Muster ist in jeder Reihe individuell.
- Es ist ein Dreiecksmuster mit Punkten.
- Es ist genauso wie ein Muster (Dreieck) und es sieht cool aus.
- Ich sehe ein Dreieck in einem Dreieck

## Dokumente aus der Erprobung

Arbeiten aus einer 4. Klasse

**Bild 1**
Jedes Kind findet individuelle Muster und erklärt deren Struktur.

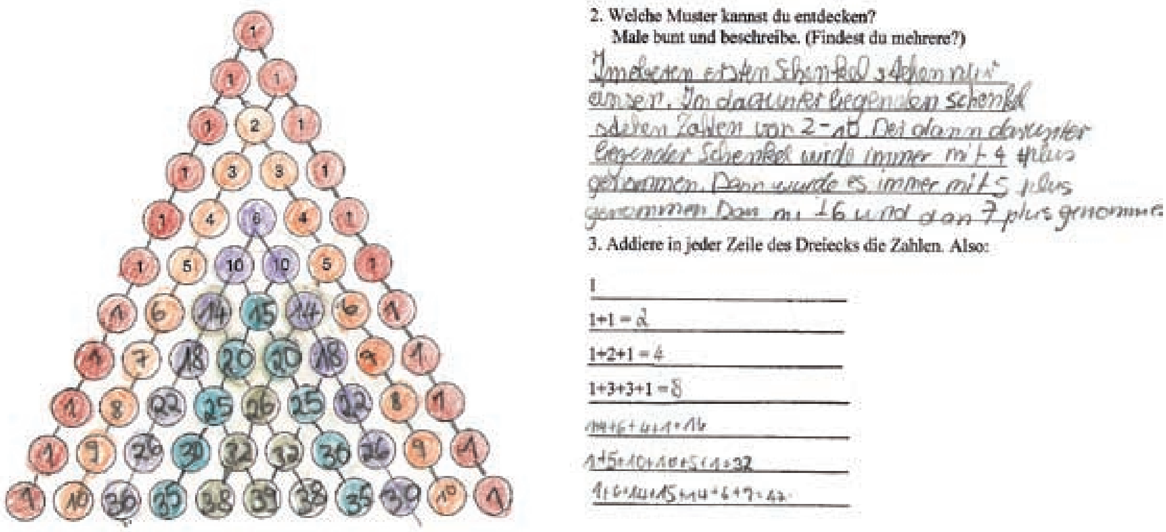
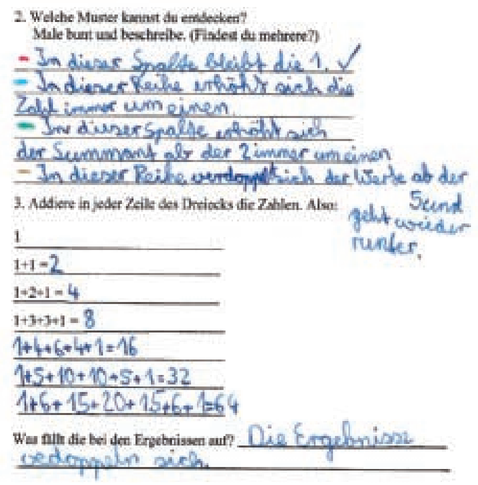


**Bild 2**

Marcel findet viele verschiedene Muster. Er benutzt mathematische Fachbegriffe um seine Entdeckungen zu erklären. In der Forscheraufgabe 3 erkennt er sehr schnell das wesentliche: Die Ergebnisse verdoppeln sich.




**Wie könnte es weitergehen?**

Das 2er-Dreieck bietet eine Variation des Pascal'schen Dreiecks. Auch hier wurden die fehlenden Zahlen von den Schülern ergänzt und danach Muster und andere Auffälligkeiten notiert.


Besonders motivierend war die Möglichkeit, ein eigenes Dreieck zu entwerfen.


Das Pascal'sche Dreieck ließe sich auch bereits in unteren Klassen einsetzen, wenn man weniger Reihen nimmt und die Kinder daran Muster entdecken lässt. Die Aufgabe eignet sich dadurch besonders zum Einsatz in jahrgangsgemischten Klassen. Die Schüler entwickeln ein Bewusstsein dafür, dass Mathematik nicht nur mit „Rechnen" zu tun hat, sondern dass es in der Mathematik viele interessante Muster, Strukturen und Beziehungen zu entdecken gibt.

**Literatur**

Büchter, Andreas/Leuders, Timo: Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen; Cornelsen-Scriptor 2005

Gerdiken, Katrin: Das Pascal'sche Dreieck. Eine reichhaltige Zahlenstruktur In: Die Grundschulzeitschrift 133/2000; Friedrich 2000

Hengartner, Elmar/Hirt, Ueli/Wälti, Beat: Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht; Klett 2006

# Kopiervorlagen

Die Nummerierung der Kopiervorlagen orientiert sich zur besseren Übersicht an der Nummerierung der Lernumgebungen. Allerdings weicht die Reihenfolge aus Platzgründen hin und wieder davon ab. In der folgenden Liste finden Sie die Kopiervorlagen in der Reihenfolge ihres Erscheinens:

**1 Jeans und T-Shirts**

**3 Schiebespiel**

**2 Quadrate spannen**

**4 Pentominos**

**7 Weihnachtspäckchen**

**8** (1) **Opa Piepenbrink**
(2) **Auf dem Spielplatz**
(3) **Hasen und Tauben**

**10 Pizza-Aufgabe**

**9** (1) **Zahlenfeld**
(2) **Zahlenfeld**

**11** (1) **Das Pascal’sche Dreieck**
(2) **Muster im Pascal’sche Dreieck**
(3) **Das 2er Dreieck**
(4) **Das … Dreieck**

**1 Jeans und T-Shirts**
Monika trägt am liebsten T-Shirts und Jeans. Drei ihrer T-Shirts zieht sie besonders gern an. Sie sind rot, grün und gelb. Dazu hat sie 3 Jeans.
Diese sind weiß, schwarz und blau. Monika möchte mit einer Hose und einem T-Shirt trotzdem jeden Tag anders aussehen.

**a** Finde verschiedene Kombinationen, die Monika mit ihren Lieblingsstücken zusammenstellen kann.
**b** Wie viele Möglichkeiten gibt es? Findest du alle?
**c** Beschreibe deinen Lösungsweg.
**d** Monika hat auch noch zwei Paar Strümpfe. Ein Paar ist gestreift, das andere ist gepunktet. Wie viele Möglichkeiten hat sie jetzt?

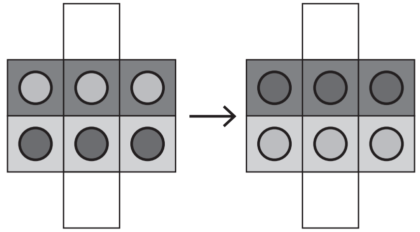
**1 Jeans und T-Shirts**
Monika trägt am liebsten T-Shirts und Jeans. Drei ihrer T-Shirts zieht sie besonders gern an. Sie sind rot, grün und gelb. Dazu hat sie 3 Jeans.
Diese sind weiß, schwarz und blau. Monika möchte mit einer Hose und einem T-Shirt trotzdem jeden Tag anders aussehen.

**a** Finde verschiedene Kombinationen, die Monika mit ihren Lieblingsstücken zusammenstellen kann.
**b** Wie viele Möglichkeiten gibt es? Findest du alle?
**c** Beschreibe deinen Lösungsweg.
**d** Monika hat auch noch zwei Paar Strümpfe. Ein Paar ist gestreift, das andere ist gepunktet. Wie viele Möglichkeiten hat sie jetzt?

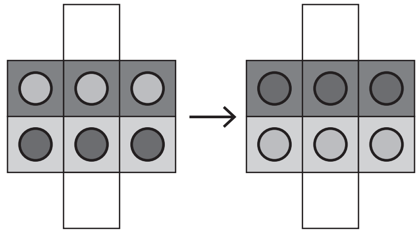
**1 Jeans und T-Shirts**
Monika trägt am liebsten T-Shirts und Jeans. Drei ihrer T-Shirts zieht sie besonders gern an. Sie sind rot, grün und gelb. Dazu hat sie 3 Jeans.
Diese sind weiß, schwarz und blau. Monika möchte mit einer Hose und einem T-Shirt trotzdem jeden Tag anders aussehen.

**a** Finde verschiedene Kombinationen, die Monika mit ihren Lieblingsstücken zusammenstellen kann.
**b** Wie viele Möglichkeiten gibt es? Findest du alle?
**c** Beschreibe deinen Lösungsweg.
**d** Monika hat auch noch zwei Paar Strümpfe. Ein Paar ist gestreift, das andere ist gepunktet. Wie viele Möglichkeiten hat sie jetzt?

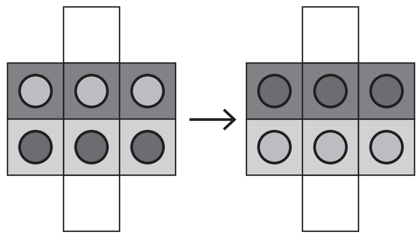
**3 Schiebespiel**
Verschiebe mit möglichst wenigen Zügen die roten Plättchen auf die roten Felder und die blauen Plättchen auf die blauen Felder. Du darfst nur senkrecht oder waagerecht schieben. Um- und Rückwege sind erlaubt, Überspringen von Plättchen ist verboten.
Das Spiel ist beendet, wenn alle 6 Plättchen auf den Feldern ihrer eigenen Farbe liegen: Rot auf rot und blau auf blau.



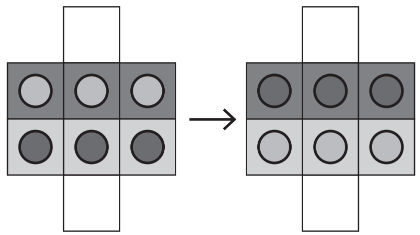
**3 Schiebespiel**
Verschiebe mit möglichst wenigen Zügen die roten Plättchen auf die roten Felder und die blauen Plättchen auf die blauen Felder. Du darfst nur senkrecht oder waagerecht schieben. Um- und Rückwege sind erlaubt, Überspringen von Plättchen ist verboten.
Das Spiel ist beendet, wenn alle 6 Plättchen auf den Feldern ihrer eigenen Farbe liegen: Rot auf rot und blau auf blau.



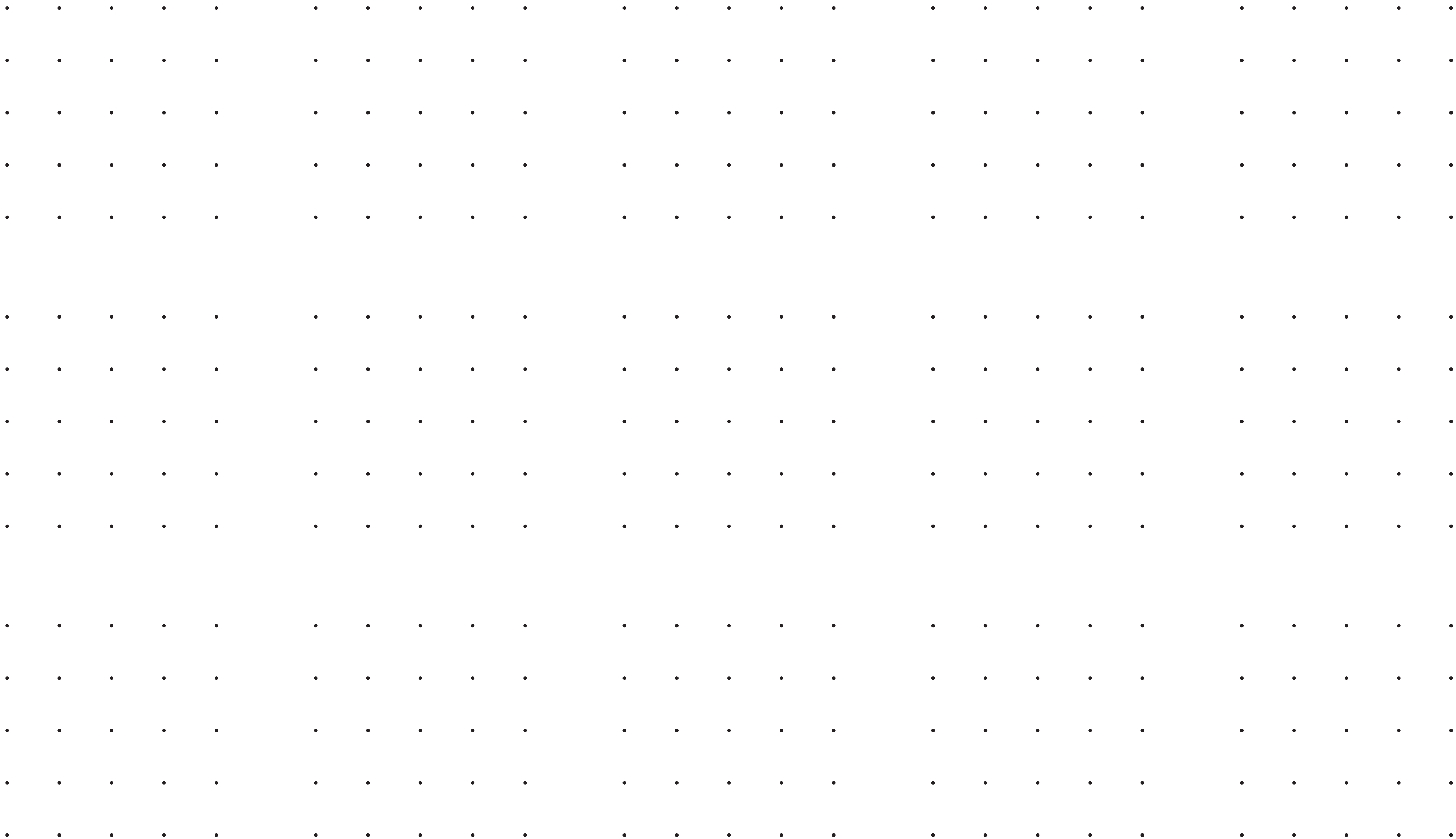
**3 Schiebespiel**
Verschiebe mit möglichst wenigen Zügen die roten Plättchen auf die roten Felder und die blauen Plättchen auf die blauen Felder. Du darfst nur senkrecht oder waagerecht schieben. Um- und Rückwege sind erlaubt, Überspringen von Plättchen ist verboten.
Das Spiel ist beendet, wenn alle 6 Plättchen auf den Feldern ihrer eigenen Farbe liegen: Rot auf rot und blau auf blau.



**3 Schiebespiel**
Verschiebe mit möglichst wenigen Zügen die roten Plättchen auf die roten Felder und die blauen Plättchen auf die blauen Felder. Du darfst nur senkrecht oder waagerecht schieben. Um- und Rückwege sind erlaubt, Überspringen von Plättchen ist verboten.
Das Spiel ist beendet, wenn alle 6 Plättchen auf den Feldern ihrer eigenen Farbe liegen: Rot auf rot und blau auf blau.



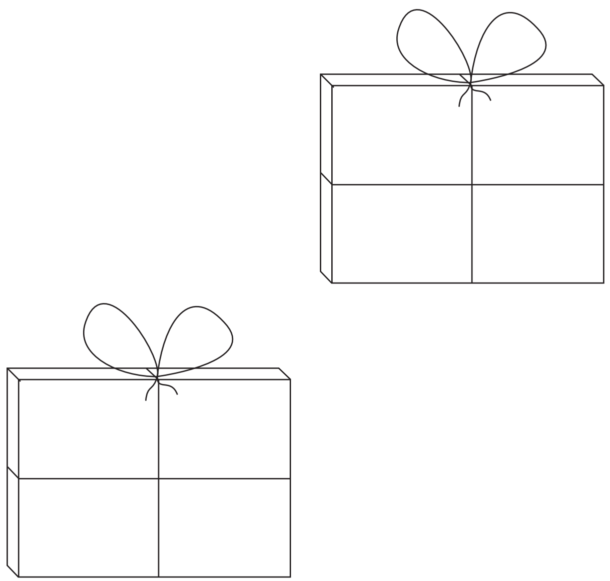
## 2 Quadrate spannen

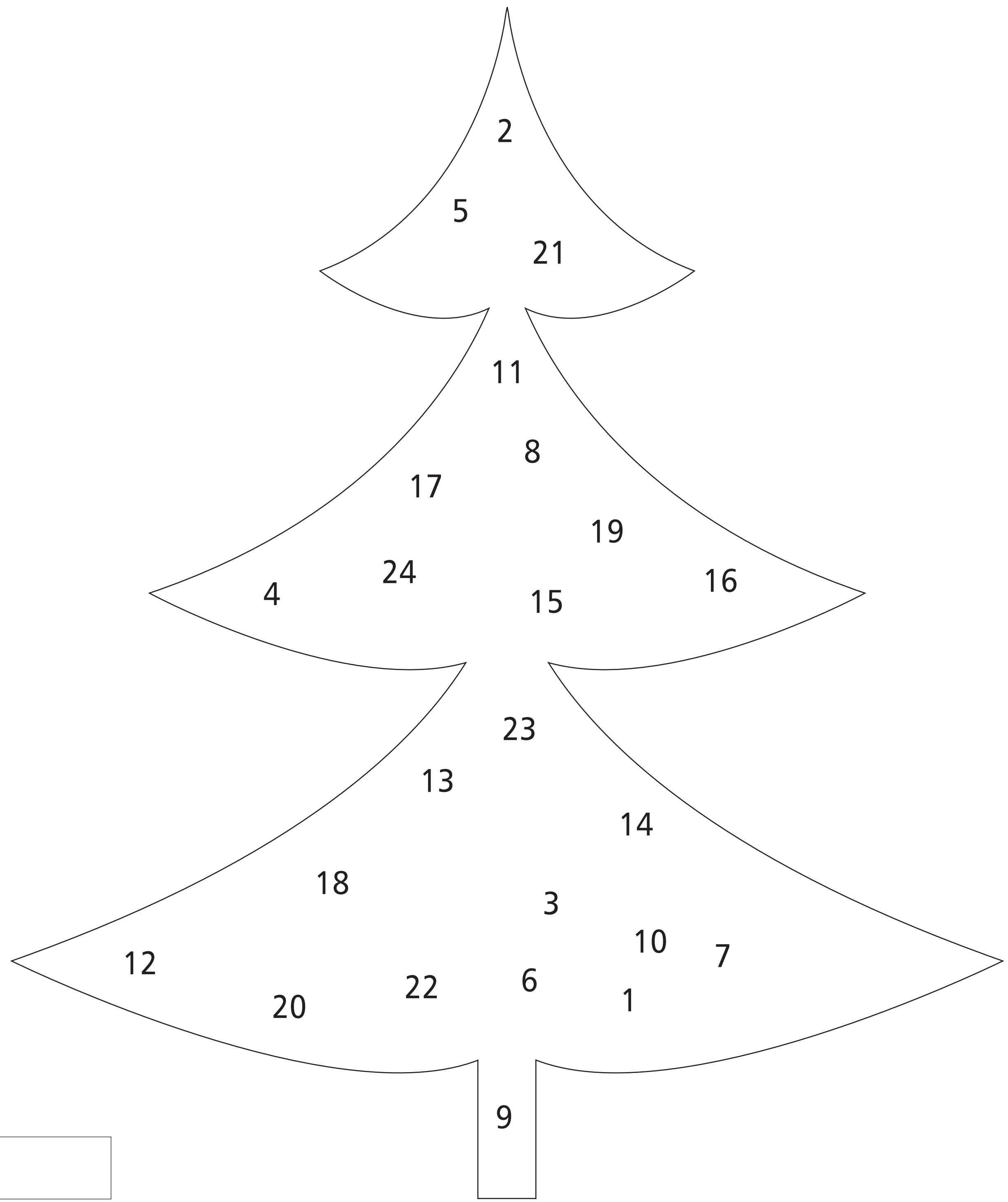


Name

Datum

## 7 Weihnachtspäckchen






Name

Datum

**8** (1) **Opa Piepenbrink**

Auf dem Bauernhof von Opa Piepenbrink sind Hühner und Kaninchen.
Zusammen sind es 20 Beine.

**a** Wie viele Hühner und Kaninchen könnte Opa Piepenbrink haben?
**b** Gibt es noch andere Möglichkeiten?
**c** Findest du sie alle? Wie viele Möglichkeiten gibt es?
**d** Beschreibe deinen Lösungsweg.

**8** (2) **Auf dem Spielplatz**

Auf einem Spielplatz stehen Fahrräder mit zwei Rädern und Puppenwagen mit vier Rädern.
Es sind insgesamt 24 Räder.

**a** Wie viele Fahrräder und wie viele Puppenwagen könnten es sein?
**b** Gibt es noch andere Möglichkeiten?
**c** Findest du sie alle? Wie viele Möglichkeiten gibt es?
**d** Beschreibe deinen Lösungsweg.

**8** (1) **Opa Piepenbrink**

Auf dem Bauernhof von Opa Piepenbrink sind Hühner und Kaninchen.
Zusammen sind es 20 Beine.

**a** Wie viele Hühner und Kaninchen könnte Opa Piepenbrink haben?
**b** Gibt es noch andere Möglichkeiten?
**c** Findest du sie alle? Wie viele Möglichkeiten gibt es?
**d** Beschreibe deinen Lösungsweg.

**8** (2) **Auf dem Spielplatz**

Auf einem Spielplatz stehen Fahrräder mit zwei Rädern und Puppenwagen mit vier Rädern.
Es sind insgesamt 24 Räder.

**a** Wie viele Fahrräder und wie viele Puppenwagen könnten es sein?
**b** Gibt es noch andere Möglichkeiten?
**c** Findest du sie alle? Wie viele Möglichkeiten gibt es?
**d** Beschreibe deinen Lösungsweg.

**8** (1) **Opa Piepenbrink**

Auf dem Bauernhof von Opa Piepenbrink sind Hühner und Kaninchen.
Zusammen sind es 20 Beine.

**a** Wie viele Hühner und Kaninchen könnte Opa Piepenbrink haben?
**b** Gibt es noch andere Möglichkeiten?
**c** Findest du sie alle? Wie viele Möglichkeiten gibt es?
**d** Beschreibe deinen Lösungsweg.

**8** (2) **Auf dem Spielplatz**

Auf einem Spielplatz stehen Fahrräder mit zwei Rädern und Puppenwagen mit vier Rädern.
Es sind insgesamt 24 Räder.

**a** Wie viele Fahrräder und wie viele Puppenwagen könnten es sein?
**b** Gibt es noch andere Möglichkeiten?
**c** Findest du sie alle? Wie viele Möglichkeiten gibt es?
**d** Beschreibe deinen Lösungsweg.

**8** (1) **Opa Piepenbrink**

Auf dem Bauernhof von Opa Piepenbrink sind Hühner und Kaninchen.
Zusammen sind es 20 Beine.

**a** Wie viele Hühner und Kaninchen könnte Opa Piepenbrink haben?
**b** Gibt es noch andere Möglichkeiten?
**c** Findest du sie alle? Wie viele Möglichkeiten gibt es?
**d** Beschreibe deinen Lösungsweg.

**8** (2) **Auf dem Spielplatz**

Auf einem Spielplatz stehen Fahrräder mit zwei Rädern und Puppenwagen mit vier Rädern.
Es sind insgesamt 24 Räder.

**a** Wie viele Fahrräder und wie viele Puppenwagen könnten es sein?
**b** Gibt es noch andere Möglichkeiten?
**c** Findest du sie alle? Wie viele Möglichkeiten gibt es?
**d** Beschreibe deinen Lösungsweg.

**8** (3) **Hasen und Tauben**

Im Hasengehege eines Zoos befinden sich außer den Hasen auch Tauben.
Zählt man die Köpfe und die Füße aller Tiere im Gehege kommt man zu folgenden Zahlen:
Es sind 22 Köpfe und 60 Füße.
Wie viele Hasen und Tauben sind im Gehege?

**10 Pizza-Aufgabe**

**1** Vier Kinder teilen sich gerecht drei Pizzen.
Wie viel bekommt jedes Kind?
Male ein Rechenbild und schreibe auf, was du dir überlegt hast, um die Aufgabe zu lösen.

**2** Jetzt kannst du entscheiden!
Wie viele Pizzen sollen an die vier Kinder verteilt werden?
Finde dann heraus, wie viel Pizza jedes Kind bekommt.

**8** (3) **Hasen und Tauben**

Im Hasengehege eines Zoos befinden sich außer den Hasen auch Tauben.
Zählt man die Köpfe und die Füße aller Tiere im Gehege kommt man zu folgenden Zahlen:
Es sind 22 Köpfe und 60 Füße.
Wie viele Hasen und Tauben sind im Gehege?

**10 Pizza-Aufgabe**

**1** Vier Kinder teilen sich gerecht drei Pizzen.
Wie viel bekommt jedes Kind?
Male ein Rechenbild und schreibe auf, was du dir überlegt hast, um die Aufgabe zu lösen.

**2** Jetzt kannst du entscheiden!
Wie viele Pizzen sollen an die vier Kinder verteilt werden?
Finde dann heraus, wie viel Pizza jedes Kind bekommt.

**8** (3) **Hasen und Tauben**

Im Hasengehege eines Zoos befinden sich außer den Hasen auch Tauben.
Zählt man die Köpfe und die Füße aller Tiere im Gehege kommt man zu folgenden Zahlen:
Es sind 22 Köpfe und 60 Füße.
Wie viele Hasen und Tauben sind im Gehege?

**10 Pizza-Aufgabe**

**1** Vier Kinder teilen sich gerecht drei Pizzen.
Wie viel bekommt jedes Kind?
Male ein Rechenbild und schreibe auf, was du dir überlegt hast, um die Aufgabe zu lösen.

**2** Jetzt kannst du entscheiden!
Wie viele Pizzen sollen an die vier Kinder verteilt werden?
Finde dann heraus, wie viel Pizza jedes Kind bekommt.

**8** (3) **Hasen und Tauben**

Im Hasengehege eines Zoos befinden sich außer den Hasen auch Tauben.
Zählt man die Köpfe und die Füße aller Tiere im Gehege kommt man zu folgenden Zahlen:
Es sind 22 Köpfe und 60 Füße.
Wie viele Hasen und Tauben sind im Gehege?

**10 Pizza-Aufgabe**

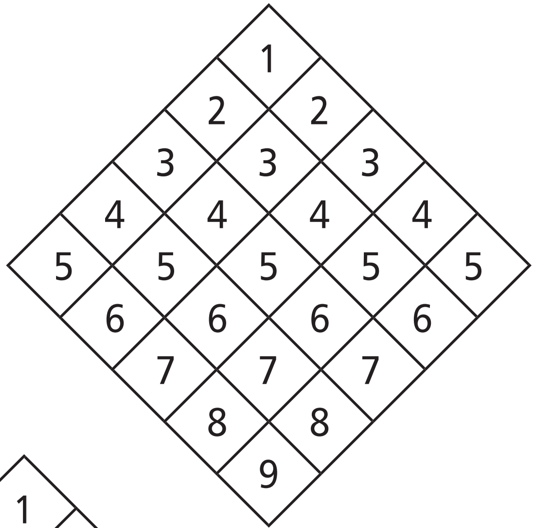
**1** Vier Kinder teilen sich gerecht drei Pizzen.
Wie viel bekommt jedes Kind?
Male ein Rechenbild und schreibe auf, was du dir überlegt hast, um die Aufgabe zu lösen.

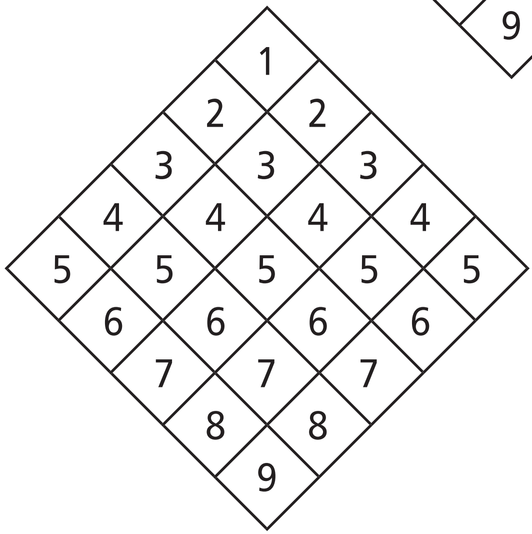
**2** Jetzt kannst du entscheiden!
Wie viele Pizzen sollen an die vier Kinder verteilt werden?
Finde dann heraus, wie viel Pizza jedes Kind bekommt.

**9** (1) **Zahlenfeld**

**1** Erkunde das Zahlenfeld. Was fällt dir auf?

**2** Arbeite mit einem Partner.
Findet schlaue Wege, um alle Zahlen zu addieren.
Begründet euren Rechenweg.

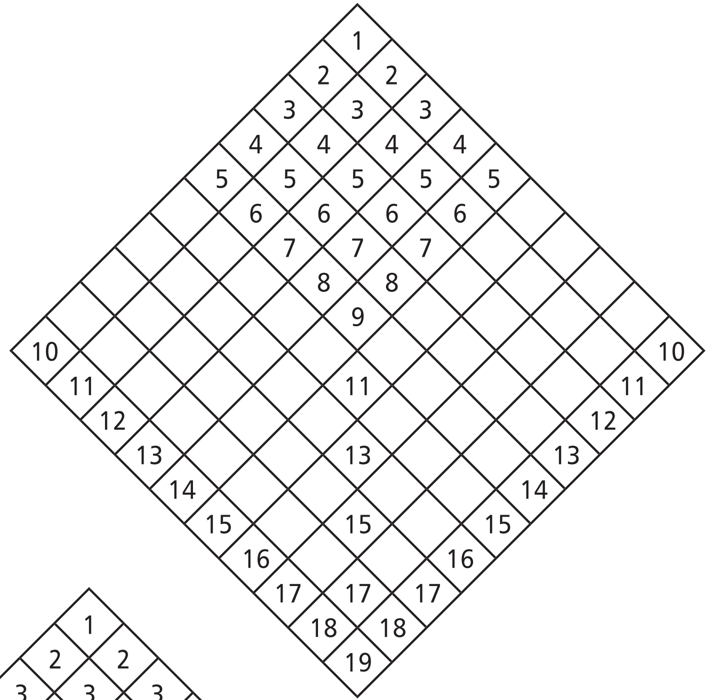


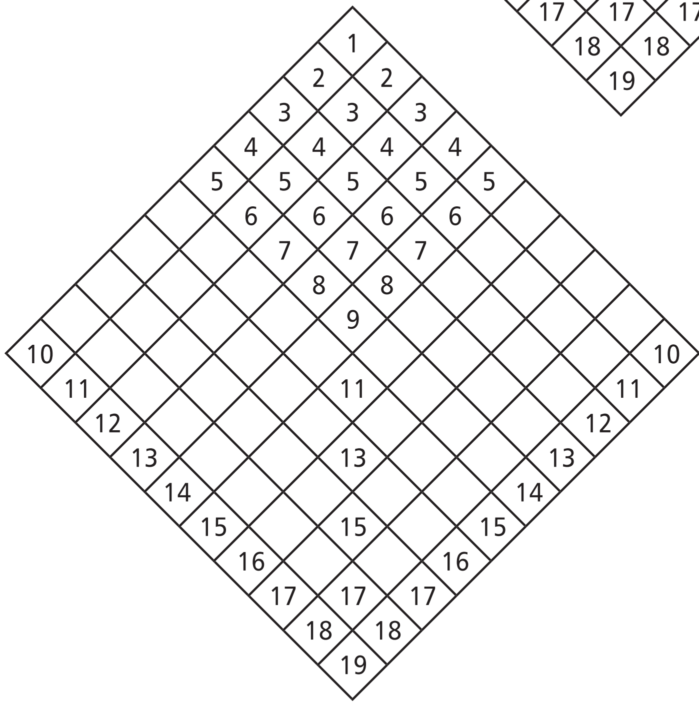




Name

Datum

**9** (2) **Zahlenfeld**



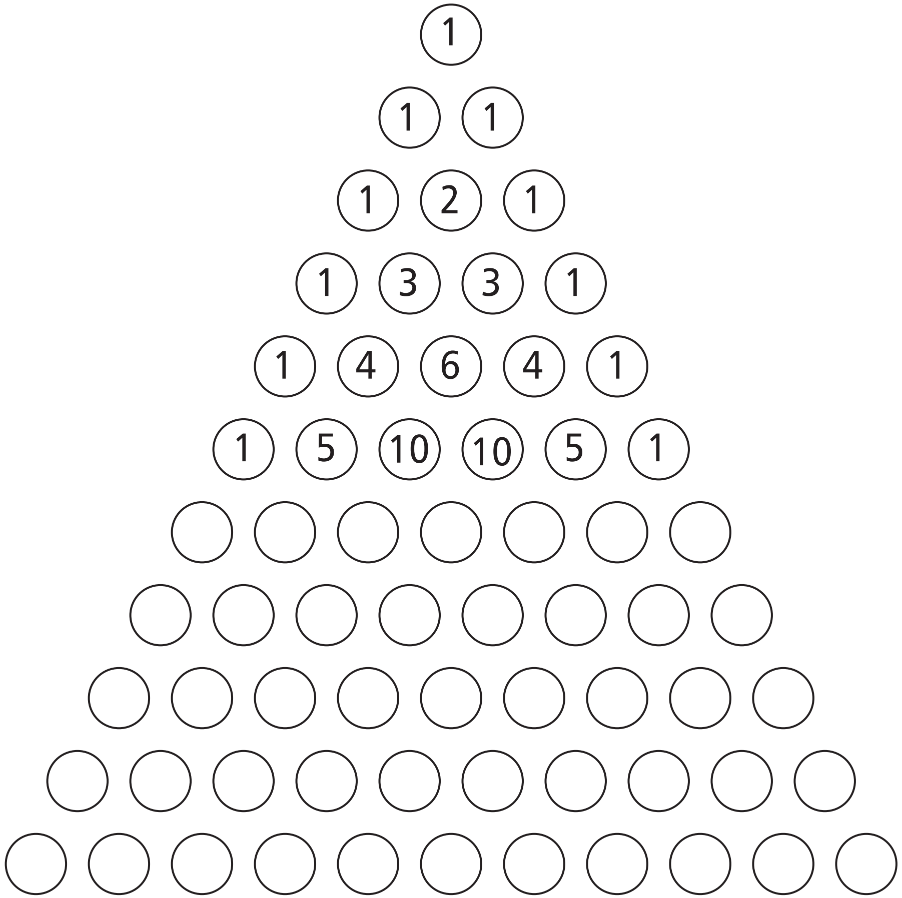




Name

Datum

## 11 (1) Das Pascal'sche Dreieck

**1** Wie geht es weiter?
Trage die fehlenden Zahlen ein.




| Name | Datum |
|---|---|
| | |

**2** Welche Muster kannst du entdecken?
Male bunt und beschreibe. (Findest du mehrere?)

**3** Addiere in jeder Zeile des Dreiecks die Zahlen.

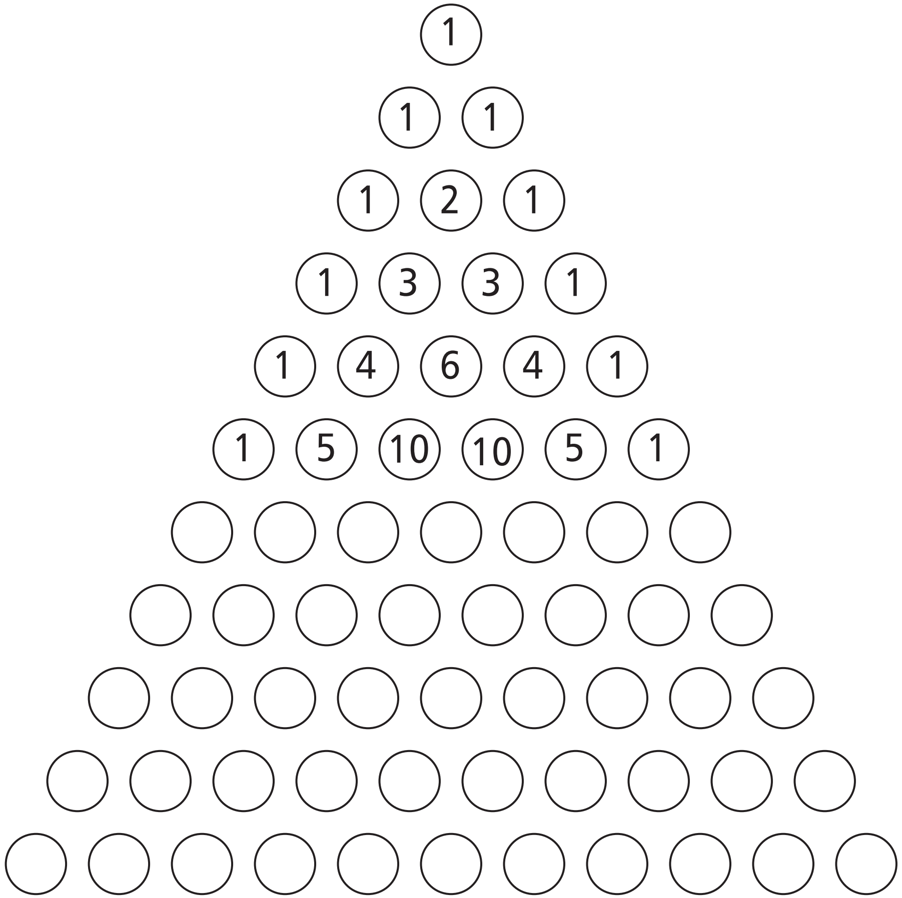
1

1 + 1 =

1 + 2 + 1 =

Was fällt dir bei den Ergebnissen auf?

## 11 (2) Muster im Pascal'schen Dreieck




Name

Datum

**1 Gerade Zahlen**

Färbe in deinem Pascal'schen Dreieck alle geraden Zahlen rot.
Beschreibe das Muster, das entsteht.

**2 Teilbarkeit durch 4**

Färbe in deinem Pascal'schen Dreieck alle durch 4 teilbaren Zahlen blau.
Beschreibe das Muster, das entsteht.

**3 Dreieckszahlen**

Berechne die folgenden Summen:

1

1 + 2 =

1 + 2 + 3 =

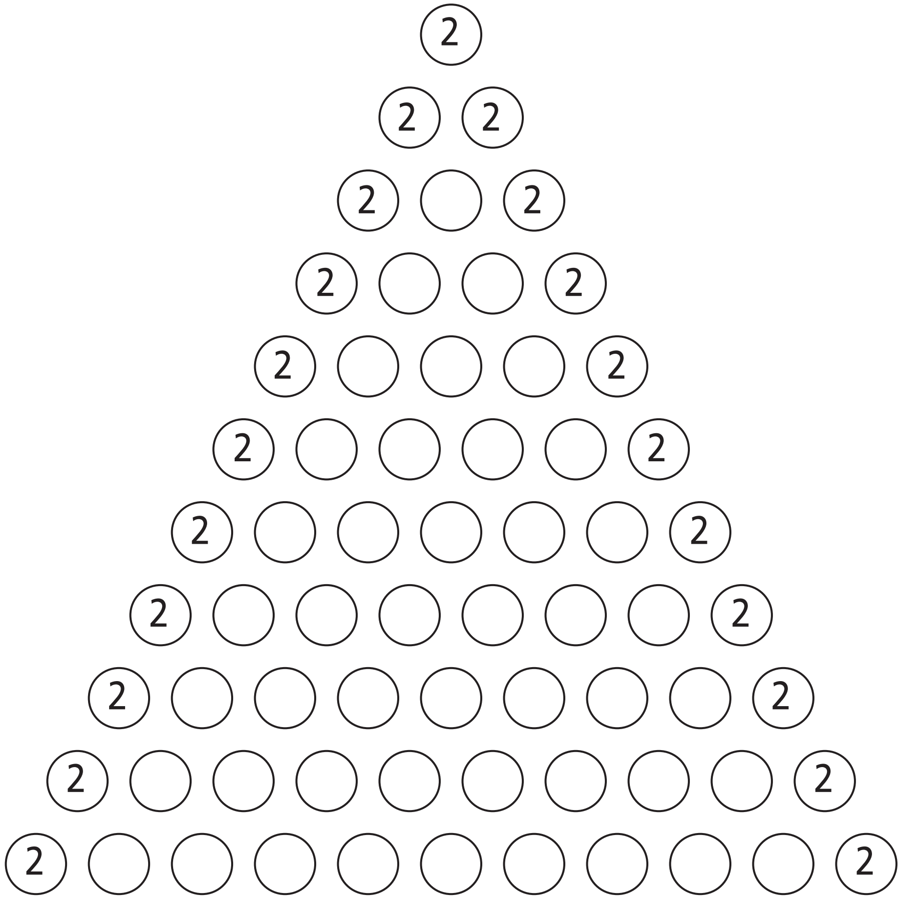
1 + 2 + 3 + 4 =

1 + 2 + 3 + 4 + 5 =

Die Zahlen, die sich ergeben heißen Dreieckszahlen.
Suche die Dreieckszahlen im Pascal'schen Dreickeck. Was fällt auf?
Kannst du erklären, was du herausgefunden hast?

**11** (3) **Das 2er-Dreieck**

Welche Muster kannst du hier erkennen?
Male farbig und beschreibe.

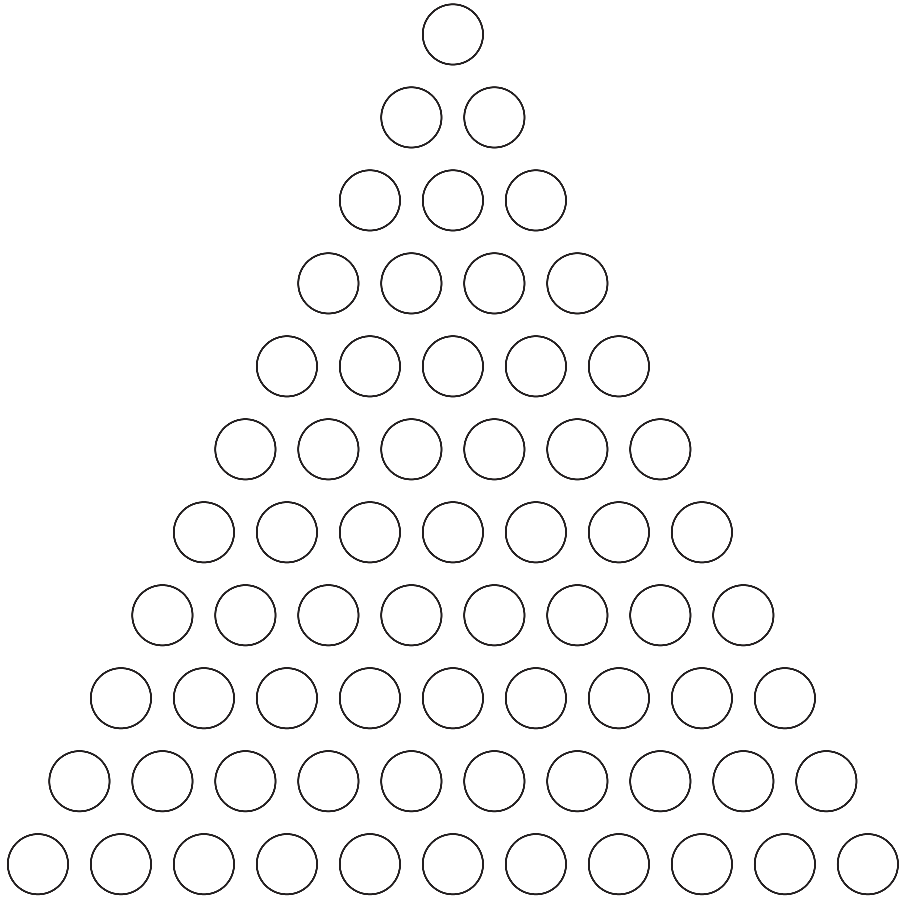



Name

Datum

**11** (4) **Das** ______________ **Dreieck**

Entwirf selbst ein Dreieck.
Kannst du neue Muster entdecken? Beschreibe.
Gib dem Dreieck einen Namen.



Name

Datum

# Literaturliste

## Zitierte Literatur


Bruder, Regina.:
Heureka-Problemlösen lernen. In: Mathematik lehren 115; Friedrich 2002

Büchter, Andreas/Leuders, Timo:
Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen; Cornelsen-Scriptor 2005

Dahl, Kristin/Nordquist, Sven:
Zahlen, Spiralen und magische Quadrate; Oetinger 1996

Fuchs, Mandy/Käpnick, Friedhelm:
Mathe für kleine Asse 1/2; Cornelsen 2006

Gaidoschik, Michael:
Förderung rechenschwacher Kinder: Wege und Irrwege;
http://www.rechenschwaeche.at 02.05.2009

Gerdiken, Katrin:
Das Pascal'sche Dreieck. Eine reichhaltige Zahlenstruktur In: Die Grundschulzeitschrift 133/2000; Friedrich 2000

Glaser, Birgit/Wegener, Aysha:
Die Reise über das Geobrett
In: Grundschulunterricht Mathematik 04/2008; Oldenbourg 2008

Hengartner, Elmar/Hirt, Ueli/Wälti, Beat:
Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht; Klett 2006

Hirt, Ueli/Wälti, Beat:
Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte; Klett/Kallmeyer 2008

Käpnick, Friedhelm:
Mathe für kleine Asse 3/4;
Volk und Wissen 2006

Kessler, Rudolf:
Zeichnen im Geometrieunterricht
In: Grundschule Mathematik 14/2007; Friedrich 2007

Koth, Maria/Notburga Grosser:
Das Pentomino-Buch; Aulis 2004

Neubert, Bernd:
Gute Aufgaben zur Kombinatorik in der Grundschule. In: S. Ruwitsch/ A. Peter-Koop (Hrsg.), Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule. Offenburg; Mildenberger

Nührenbörger, Marcus/Verboom, Lilo:
Modul G 8: Eigenständig lernen – Gemeinsam lernen; IPN 2005

Peter-Koop, Andrea/Ruwisch, Silke (Hrsg.):
Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule;
Mildenberger 2003

Rasch, Renate:
Offene Aufgaben für individuelles Lernen im Mathematikunterricht der Grundschule 1/2 und 3/4. Aufgabenbeispiele und Schülerbearbeitungen; Lernbuch Verlag/Kallmeyer 2007

Ruf, Urs/Gallin, Peter:
Ich mache das so! Sprache und Mathematik. 5–6; Lehrmittelverlag des Kantons Zürich 1999

Scherer, Petra/Böning, Dagmar (Hrsg.):
Mathematik für Kinder – Mathematik von Kindern; Grundschulverband 117

Selter, Christoph/Spiegel, Hartmut:
Kinder & Mathematik; Kallmeyer 2003

Selter, Christoph:
Modul G7 – Interessen aufgreifen und weiter entwickeln; IPN 2007

Senftleben, Hans-Günter:
Welche Figur entsteht? In: Grundschule Mathematik 18/2008; Kallmeyer 2008

Senftleben, Hans-Günter:
Aufgabensammlung für das große Geobrett; Ritter 2001

Steinau, B.:
Individuelle Förderung und doch Unterricht für alle. In: Praxis Grundschule Heft 2/2004; Westermann 2004

Sundermann, Beate/Selter, Christoph:
Mit Eigenproduktionen individualisieren. In: Christiani, Reinhold (Hrsg.): Jahrgangsübergreifend unterrichten. Cornelsen-Scriptor 2005

Walther, Gerd u. a. (Hrsg.):
Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret; Cornelsen 2008

Wieland, Gregor u. a.:
Das Mathematikbuch Lernumgebungen 5; Klett 2008

Wittmann, Erich Ch.:
Wider die Flut der „bunten Hunde" und der „grauen Päckchen": Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und des produktiven Übens
In: Handbuch produktiver Rechenübungen Band 1; Klett 1994

Wittmann, Erich Chr./Müller, Gerhard N.:
Das Zahlenbuch 1 bis 4. Lehrerband, Schülerband und ergänzende Materialien aus dem Programm Mathe 2000; Klett 1994

Wittmann, Erich Chr./Müller, Gerhard N.:
Handbuch produktiver Rechenübungen Band 1. Vom Einspluseins zum Einmaleins; Klett 1994

Wittmann, Erich Chr./Müller, Gerhard N.:
Handbuch produktiver Rechenübungen Band 2. Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen; Klett 1992

Wittmann, Erich Chr./Müller, Gerhard N.:
Spielen und Überlegen. Die Denkschule Teil 1; Klett

Wittmann, Erich Chr./Müller, Gerhard N.:
Spielen und Überlegen. Die Denkschule Teil 2; Klett

Wollring, Bernd:
Zur Kennzeichnung von Lernumgebungen für den Mathematikunterricht in der Grundschule;
http://www.mathematik.uni-kassel.de 02.05.2009

## Weitere empfehlenswerte Literatur für den Mathematikunterricht in der Grundschule


Enzensberger, Hans-Magnus:
Der Zahlenteufel. Ein Kopfkissenbuch für alle, die Angst vor Mathematik haben; DTV 1999

Hagedorn, Bärbel/Tretter, Karin:
Kompetenzorientiert unterrichten – 34 Aufgaben zur Förderung der allgemeinen mathematischen Kompetenzen im 2. Schuljahr; Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung Berlin 2009

Käpnick, Friedhelm u. a. (Hrsg.):
Mathe für kleine Asse; Cornelsen 2006

Lorenz, Jens Holger:
Kinder entdecken die Mathematik; Westermann 1997

Noack, Monika/Geretschläger, Robert/Stocker, Hansjürg:
Mathe mit dem Känguru. Die schönsten Aufgaben von 1995 bis 2005; Hanser 2006

Noack, Monika/Geretschläger, Robert/Stocker, Hansjürg:
Mathe mit dem Känguru. Die schönsten Aufgaben von 2006 bis 2008; Hanser 2008

Nührenbörger, Marcus/Pust, Sylke:
Mit Unterschieden rechnen. Lernumgebungen und Materialien für einen differenzierten Anfangsunterricht; Kallmeyer 2006

Radatz, Hendrik/Schipper, Wilhelm/Dröge, Rotraut/Ebeling, Astrid:
Handbuch für den Mathematikunterricht 1.–4. Schuljahr. Anregungen zur Unterrichtspraxis; Schroedel 1996

Rasch, Renate:
42 Denk- und Sachaufgaben. Wie Kinder mathematische Aufgaben lösen und diskutieren; Kallmeyer 2003

Schipper, Wilhelm:
Modul G3: Mathematikunterricht zwischen Offenheit und Schülerorientierung; IPN 2004

Selter, Christoph:
Modul G2 – Mehr als Kenntnisse und Fertigkeiten. Erforschen, entdecken und erklären im Mathematikunterricht der Grundschule; IPN 2004
Steinweg, Anna Susanne:
Lerndokumentation Mathematik; Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung Berlin o. J.

Sundermann, Beate/Selter, Christoph:
Beurteilen und Fördern im Mathematikunterricht. Gute Aufgaben – Differenzierte Arbeiten – Ermutigende Rückmeldungen; Cornelsen 2006

Walther, Gerd:
Modul G1 – Gute und andere Aufgaben; IPN 2004