ILeA plus

Handbuch für Lehrerinnen und Lehrer

Bildungsregion Berlin-Brandenburg

ILeA PLUS

Individuelle Lernstandsanalysen

TEIL III –

MATHEMATIK

INHALT

1. EINFÜHRUNG

In diesem Teil III des Handbuchs erhalten Sie inhaltliche Hinweise zur konstruktiven Arbeit mit ***ILeA plus***.

***ILeA plus* Mathematik: Zielsetzung und Umsetzung**

Im Rahmen der softwaregestützten Diagnose können zahlreiche inhaltliche Aspekte des Lernstandes jeder Schülerin und jedes Schülers festgestellt sowie dokumentiert werden. Neben der Analyse der Kompetenzen, die für ein erfolgreiches Weiterlernen wichtig sind, werden bei besonders auffälligen Defiziten Förderinhalte ausgegeben. In diesen Fällen ist eine individuelle und prozessorientierte Diagnose unverzichtbar, um die Förderinhalte differenziert festlegen zu können.

ILeA plus wurde auf der Grundlage des Fachteils Mathematik im Rahmenlehrplan für die Jahrgansstufen 1-10 der Länder Berlin und Brandenburg entwickelt. Alle Aufgaben von ***ILeA plus*** beziehen sich daher explizit auf die Inhalte des Rahmenlehrplans. Bei der Aufgabenentwicklung wurde darauf geachtet, dass die meisten Kompetenzerwartungen der jeweiligen Niveaustufe mit ***ILeA plus*** überprüft werden. Nur wenige Inhaltsbereiche bleiben aufgrund der zeitlichen Rahmenbedingungen und der Umsetzbarkeit am Computer unberücksichtigt.

Für jede Niveaustufe wird die Einbettung der Aufgaben von ***ILeA plus*** in die Vorgaben des Rahmenlehrplans in einem Kapitel erläutert. Fettgedruckte Kompetenzerwartungen werden in ***ILeA plus*** überprüft. Zunächst werden die entsprechenden Kompetenzerwartungen genannt. Im Anschluss werden die jeweiligen Aufgaben beispielhaft vorgestellt und deren Intention beschrieben. Zur Illustration der Aufgaben wird jeweils ein Beispielitem vorgestellt und mögliche Schülerlösungen werden analysiert (vgl. Abbildung III.1-1). Jede Aufgabe besteht aus einer Serie von Items (Teilaufgaben). Bei den Aufgaben muss entweder aus verschiedenen Antwortmöglichkeiten eine ausgewählt werden (Multiple Choice) oder eine offene Eingabe über ein Ziffernfeld getätigt werden. Im Teil zu Raum und Form sind zudem Aufgaben gestellt, bei denen auf Bereiche (z. B. Kästchen) am Bildschirm geklickt werden muss.

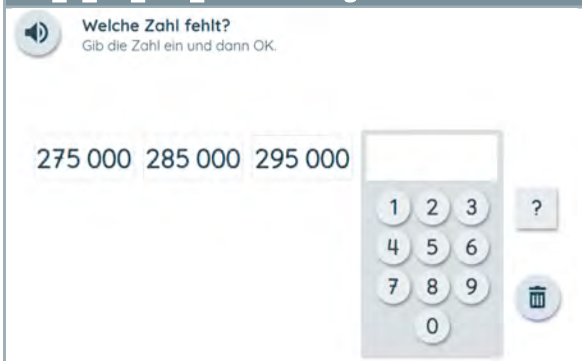
Aufgabenbezeichnung mit Aufgabencodierung (vgl. weBBschule)	Mögliche Lösungen (entweder als offene Eingabe oder als Auswahl)	Interpretation der verschiedenen Lösungen. Bei offenen Eingaben werden nur die Interpretationen von Hauptfehlern vorgestellt.
Ma_C_ZO_211_D Zahlenfolgen	**Offene Eingabe**	**Interpretation**
	**305 000**	**korrekt**
	300 000 315 000	falsche Schrittgröße
	30 500	Die Rolle der Null bei der Notation von Zahlen ist noch unklar.
	10 000	Die Schrittgröße wird als Ergebnis eingegeben (nicht die nächste Zahl).

Abbildung III.1-1: Beispielitem mit Schülereingaben und Interpretationen

Fehlerhafte Schülerlösungen können in vielen Fällen auf zugrunde liegende fehlerhafte Denk- oder Bearbeitungsprozesse hindeuten. Die Interpretationen dieser Schülerlösungen (in der letzten Spalte der Tabelle) gründen auf fachdidaktisch fundierten Überlegungen. Diese Interpretationen stellen daher Vermutungen über das Zustandekommen der jeweiligen Schülerlösungen dar. Über tatsächliche Lösungsprozesse und Denkwege, die zu den jeweiligen Lösungen geführt haben, können auf Grundlage von ***ILeA plus*** keine Aussagen getroffen werden. Daher bedürfen die hier formulierten Interpretationen ggf. einer Überprüfung im diagnostischen Gespräch. Bei der Ausgabe von Förderinhalten soll sich eine individuelle und prozessorientierte Diagnose seitens der Lehrkraft anschließen. Zu allen Förderinhalten werden im Handbuch Vorschläge für diese Diagnostik sowie darauf abgestimmte Fördermaßnahmen formuliert.

Prozessorientierte Diagnose und Hinweise zu Förderinhalten

Bei besonders schwachen Leistungen (bezogen auf die Anforderungen des Rahmenlehrplans) werden Förderinhalte zu zentralen Lernschwerpunkten ausgegeben. In diesen Kapiteln wird geschildert,

- auf welcher Datengrundlage der Förderinhalt ausgegeben wird,
- warum eine weiterführende Diagnose und Unterstützung in diesem Bereich wichtig für ein erfolgreiches Weiterlernen ist,
- wie diese Diagnose und Unterstützung konkret aussehen kann.

Alle Förderinhalte werden auf der Grundlage der Eingaben der Schülerin bzw. des Schülers bei ***ILEA plus*** berechnet. Bei manchen Förderinhalten werden neben typischen Fehlern auch Bearbeitungszeiten (zur Analyse von eventuellen Zählstrategien) herangezogen. In der Regel wird ein Förderinhalt ausgegeben, wenn die Anzahl der Fehler eine halbe Standardabweichung den Mittelwert der Normierungsstichprobe übersteigt. In theoretisch begründeten Einzelfällen wird von dieser Regel abgewichen und ein anderer Wert festgelegt. Dies wird im betreffenden Förderinhalt beschrieben.

Auch wenn eine Schülerin oder ein Schüler bei ***ILeA plus*** keinen Hinweis auf Förderung erhält, bedeutet das nicht, dass keine Probleme zu erwarten sind. Häufig werden Förderinhalte (aus statistischen Gründen) erst ausgegeben, wenn sehr viele Fehler gemacht wurden. Hier liegt es in der Verantwortung jeder Lehrkraft, nach ihren Ansprüchen zu entscheiden, ab welcher Fehleranzahl eine besondere Unterstützung angezeigt ist. Dafür empfiehlt sich die Einsicht in die Rohdaten bei weBBschule.

Erst eine prozessorientierte und individuelle Diagnose kann passende Fördermaßnahmen aufzeigen. Daher werden zu jedem Förderinhalt konkrete Diagnoseaufgaben mit Beobachtungsschwerpunkten formuliert. Selbstverständlich können diese Diagnoseaufgaben auch zur Förderung eingesetzt werden. Darüber hinaus werden darauf abgestimmte Fördervorschläge angeboten. Literaturangaben zu unterrichtspraktischen Vorschlägen der Förderung schließen jedes Kapitel ab.

Hinweise zur Durchführung von *ILeA plus*

Bei der Durchführung von ***ILeA plus*** können und sollen Schülerinnen und Schüler Notizen (Nebenrechnungen) auf Papier machen. Falls Eingaben mit der Maus nicht möglich sind (z. B. wegen fehlender Ziffernkenntnis auf der Niveaustufe A bzw. motorischer Einschränkungen), so kann eine andere Person die Eingaben vornehmen, die die Schülerin bzw. der Schüler diktiert.

Bei der Testdurchführung soll die Lehrkraft **keine** inhaltlichen Hinweise geben. Falls Lernende die Aufgabe nicht verstehen (insbesondere auf der Niveaustufe D), werden sie aufgefordert, das Fragezeichen anzuklicken.

Bei der Durchführung und Auswertung von ***ILeA plus*** Niveaustufe D ist zu beachten, dass Inhalte des Rahmenlehrplans auf der Niveaustufe D ohne Einschränkung (Zahlen in Bruch- und Dezimalschreibweise, alle vier Grundrechenarten zu Brüchen) operationalisiert wurden. In der Regel wurden am Ende der Jahrgangsstufe 5 noch nicht alle Inhalte abschließend besprochen. Lernende können durch die Lehrkraft aufgefordert werden, bei Inhalten, die unterrichtlich noch nicht besprochen wurden, das Fragezeichen anzuklicken.

Überblick über die Aufgabenpakete

Kursiv gedruckt sind Empfehlungen für den Einsatz von ***ILeA plus***, der über den in der Grundschulverordnung gesetzten verpflichtenden Rahmen hinausgeht.

Tabelle III.1-1: Übersicht über die Aufgabenpakete

Aufgabenpaket	Zeitpunkt des Einsatzes und Ziel
A	**zu Beginn der Jahrgangsstufe 1** Erfassung von Fähigkeiten und Kompetenzen, die bei Schuleintritt häufig vorhanden sind
AB	***im 1. Schulhalbjahr der Jahrgangsstufe 2*** *Erstdiagnose zur Erfassung von besonderen Schwierigkeiten beim Rechnenlernen*
B	***in Jahrgangsstufe 2*** *Erfassung von Fähigkeiten und Kompetenzen, die innerhalb der Niveaustufe B bis zu diesem Zeitpunkt bereits entwickelt sind* **zu Beginn der Jahrgangsstufe 3** Erfassung von Fähigkeiten und Kompetenzen, die für ein verständnisorientiertes Weiterlernen notwendig sind
C	***in Jahrgangsstufe 4*** *Erfassung von Fähigkeiten und Kompetenzen, die innerhalb der Niveaustufe C bis zu diesem Zeitpunkt bereits entwickelt sind* **zu Beginn der Jahrgangsstufe 5** Erfassung von Fähigkeiten und Kompetenzen, die für ein verständnisorientiertes Weiterlernen notwendig sind
D	***in Jahrgangsstufe 5/6*** *Erfassung von Fähigkeiten und Kompetenzen, die innerhalb der Niveaustufe D bis zu diesem Zeitpunkt bereits entwickelt sind*

2. NIVEAUSTUFE A: BEZUG ZUM RAHMENLEHRPLAN UND AUFGABENAUSWAHL

Christiane Benz, Axel Schulz & Sebastian Wartha

2.1 ZAHLEN AUFFASSEN UND DARSTELLEN

RLP	**A Zahlen auffassen und darstellen** ▪ **schnelles Erfassen von Mengen (z. B. strukturierte Mengenbilder)** ▪ **Übersetzen zwischen kleinen natürlichen Zahlen als Menge und Wort und umgekehrt**

Bei ***ILeA plus*** für die Niveaustufe A wird in der ersten Aufgabe „Ziffernkenntnis“ (10 Items) die Ziffernkenntnis untersucht, da diese die Voraussetzung für die Durchführung fast aller weiteren Aufgaben ist. Auch wenn laut Rahmenlehrplan nicht erwartet wird, dass Schülerinnen und Schüler die Ziffern kennen, so belegen Untersuchungen, dass der Großteil von Schulanfängerinnen und Schulanfängern diese bereits erkennen kann (Clarke, Clarke, Grüßing, & Peter-Koop, 2008).

Die Onlinediagnose muss vorsichtig interpretiert werden, wenn nicht alle Zahlworte dem entsprechenden Zahlsymbol zugeordnet werden. Wird mehr als eine Ziffer falsch eingegeben, so wird ***ILeA plus*** an dieser Stelle pausiert. Eine Ausnahme stellen die Zahlen 9 und 10 dar, da diese in keiner Aufgabe verwendet werden müssen.

Eine Möglichkeit der weiteren Durchführung von ***ILeA plus*** ist, dass die Schülerin oder der Schüler gemeinsam mit der Lehrkraft die Diagnose durchführt und Zahlen ansagt, die die Lehrkraft dann anklickt. Dafür muss das Passwort „lisum“ eingegeben werden.

Der Punkt „Übersetzen zwischen kleinen natürlichen Zahlen als Menge und Wort und umgekehrt“ wird durch ausgewählte Übersetzungen zwischen Zahlwort, Mengendarstellung und auch Zahlsymbol an strukturierten und unstrukturierten Darstellungen untersucht (vgl. Tabelle III.2-1).

Tabelle III.2-1: Übersetzungen zwischen Mengendarstellung, Zahlwort, Zahlsymbol im ZR bis 10

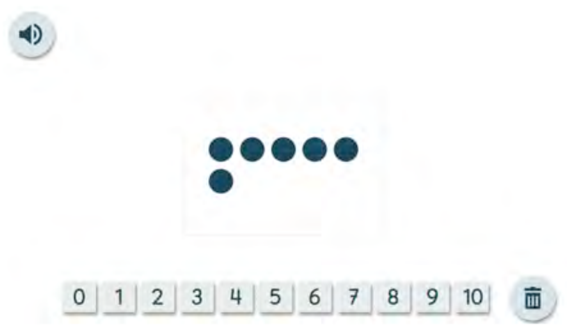
Übersetzung	Umsetzung	Untersuchung bei ***ILeA plus***
Zahlwort → Zahlsymbol	Für die diktierte Zahl wird ein entsprechendes Symbol ausgewählt. Die diktierte Zahl wird angeklickt.	Aufgabe „Ziffernkenntnis“ (001) Voraussetzung für die Durchführung der Diagnose
Zahlwort → Menge	Diktierte Zahl wird am Material dargestellt.	Wird nicht untersucht.
Menge → Zahlwort	Am Material dargestellte Zahl wird angesagt.	Wird nicht untersucht.
Menge → Zahlsymbol	Passendes Zahlsymbol wird für die dargestellte Zahl (strukturiert und unstrukturiert) ausgewählt. Die strukturierte Menge wird nur kurz gezeigt.	Aufgabe „Zahlauffassung“ (111) Aufgabe „Schnelles Sehen“ (112)

Zahlsymbol -> Zahlwort	Geschriebene Zahl wird vorgelesen	Wird nicht untersucht.
Zahlsymbol -> Menge	Geschriebene Zahl wird durch Punktedarstellung im Zehnerfeld dargestellt.	Aufgabe „Mengen klicken" (121)

Bei der Aufgabe „Zahlauffassung" (4 Items) werden Zahldarstellungen für Mengen kleiner 5 als unstrukturierte Punktmenge präsentiert. Bei den Mengendarstellungen mit Anzahlen größer als 5 (siehe Beispiel unten) werden strukturierte Darstellungen genutzt. Hierdurch wird die nichtzählende Bestimmung ermöglicht, zum Beispiel durch die Nutzung der Struktur des Zehnerfeldes mit Fünfergliederung (Krauthausen, 2018, S. 65).

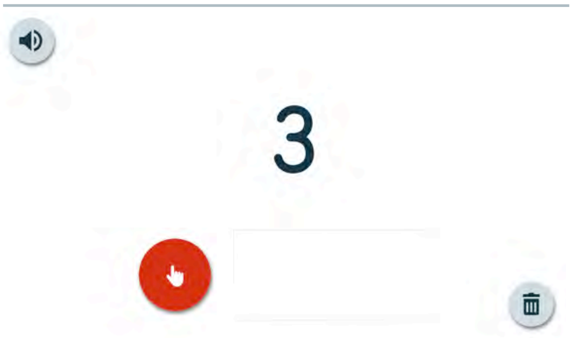
Bewusst werden keine Würfelbilder eingesetzt, da diese auch über Symbolkenntnis ohne Mengenwahrnehmung bestimmt werden können (Glasersfeld, 1987, S. 261).

Tabelle III.2-2: Aufgabenbeispiel „Zahlauffassung" (Niveaustufe A)

Ma_A_ZO_111_C Zahlauffassung	Auswahl	Interpretation
„Wie viele Punkte siehst du?", wird angesagt.  Abbildung III.2-1	5	6 Felder werden in der Zahlenleiste gezählt.
	6	**korrekt**
	9	Vertauschung von ähnlichen Zahlsymbolen

Bei der Aufgabe „Mengen klicken" (3 Items) ist die Übersetzung von Zahlzeichen in Mengendarstellung gefordert. Zu einem Zahlzeichen soll die entsprechende Menge durch Klicken erzeugt werden.

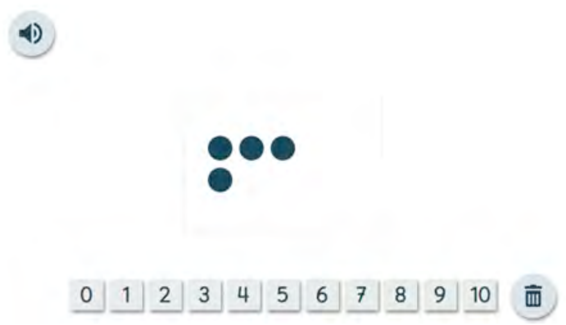
Tabelle III.2-3: Aufgabenbeispiel „Mengen klicken" (Niveaustufe A)

Ma_A_ZO_121_A Mengen klicken	Auswahl	Interpretation
„Wie viele Punkte brauchst du? Klicke, bis du so viele Punkte siehst", wird angesagt.  Abbildung III.2-2	2	Zahlwort wird nicht richtig verstanden: zwei statt drei.
	3	**korrekt**

Beim schnellen Erfassen von Mengen ist nicht allein eine Übersetzungsleistung von strukturiertem Mengenbild und Zahlsymbol nötig. Wegen der kurzen Präsentationszeit müssen die Schülerinnen und Schüler die Mengen auf einen Blick erfassen. Dies ist eigentlich nur bei Mengen bis zu vier Elementen möglich (Simultanerfassung) (Benz, Peter-Koop, & Grüßing, 2015, S. 134). Bei Mengen, die größer als vier sind, ist für ein Erfassen auf einen Blick eine strukturierende Wahrnehmung nötig. Nach der strukturierenden Wahrnehmung müssen die erfassten Teilmengen anschließend zusammengesetzt werden, um das Gesamtergebnis nennen zu können (Quasi-Simultanerfassung) (Benz, 2018, S. 14). Die Mengen können nicht mehr gezählt werden. Aus diesem Grund ist bereits weiteres Wissen über Mengen und Zahlen nötig, um hier die gezeigte Anzahl nennen zu können (Benz, 2015, S. 9).

Bei der Aufgabe „Schnelles Sehen“ (5 Items) werden strukturierte Darstellungen in Form von Fingerbildern und strukturierten Punktdarstellungen genutzt. Bei den Fingerbildern kann insbesondere die Auswertung über beide Aufgaben hinweg Aufschluss darüber geben, ob die Schülerinnen und Schüler die Fünferstruktur der Fingerbilder kennen und nutzen können.

Tabelle III.2-4: Aufgabenbeispiel „Schnelles Sehen“ (Niveaustufe A)

Ma_A_ZO_112-1_B Schnelles Sehen **Ma_A_ZO_112-2_A**	**Auswahl**	**Interpretation**
„Wie viele Finger siehst du? Achtung sie sind nur einmal und nur kurz zu sehen“, wird angesagt.  Abbildung III.2-3	3, 5	Nur eine Hand wird beachtet.
	7	Acht Felder werden in der Zahlenleiste gezählt.
	8	**korrekt**
„Wie viele Punkte siehst du? Achtung, sie sind nur einmal und nur kurz zu sehen“, wird angesagt.  Abbildung III.2-4	3	Vier Felder werden in der Zahlenleiste gezählt. Oder: Nur eine Zeile wird wahrgenommen.
	4	**korrekt**

2.2 ZAHLEN ORDNEN

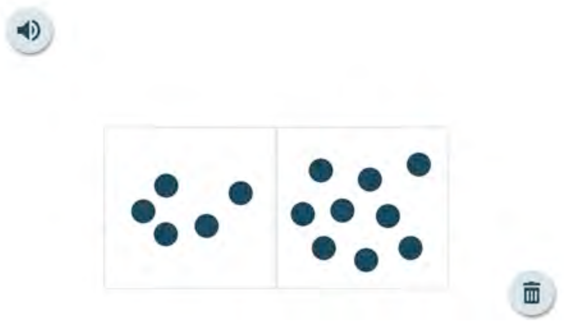
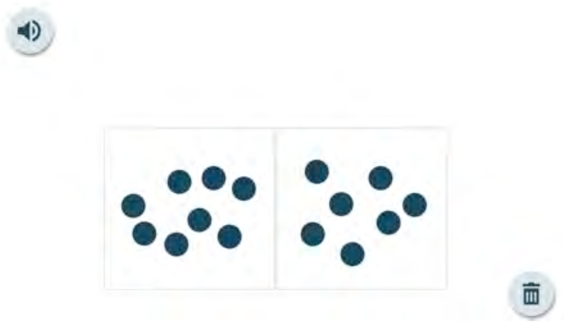
RLP	**A Zahlen ordnen** ▪ **Aufsagen der Zahlreihe bis 10** ▪ **Vergleichen (mehr als, weniger als,** gleich viel**) von Mengen bis 10 (z. B. durch 1:1-Zuordnung der Elemente)**

Bei ***ILeA plus*** wird die Kenntnis der Zahlwortreihe anhand eines Einzelinterviews erhoben. Im Interview werden das Vorwärtszählen von 1 bis 14, das Weiterzählen von 4 bis 14, das Weiterzählen von 3 aus mit geforderter Endzahl 8 und das Rückwärtszählen ab 7 überprüft.

Das Vergleichen der Anzahlen von Mengen geschieht anhand von unstrukturierten Mengendarstellungen bei der Aufgabe „Anzahlvergleich“ (6 Items). Es gibt dabei Items mit großen Anzahlunterschieden, die ohne genaue Anzahlbestimmung sichtbar sind, und Items, bei denen die Anzahlen jeweils genau bestimmt und dann verglichen werden müssen. Zuerst sollen die Mengenbilder ausgewählt werden, die mehr Punkte enthalten. Es wird dabei auch die Kenntnis der Bezeichnung „mehr“ überprüft. Anschließend werden die gleichen Bilder gezeigt und die Schülerinnen und Schüler sollen die Bilder mit weniger Punkten auswählen. Eine Auswertung über die Aufgaben hinweg kann Aufschluss darüber geben, ob die Vergleiche aufgrund der Verwechslung von „mehr“ und „weniger“ nicht gelingen.

Durch die Punktdarstellungen und die Begriffe „mehr“ oder „weniger“ steht der kardinale Zahlaspekt im Vordergrund (Hasemann & Gasteiger, 2014, S. 9, 33).

Tabelle III.2-5: Aufgabenbeispiel „Anzahlvergleich“ (Niveaustufe A)

Ma_A_ZO_221-1_A Anzahlvergleich Ma_A_ZO_221-2_C	Auswahl	Interpretation
„Wo sind mehr Punkte?“, wird angesagt.  Abbildung III.2-5	Linkes Bild wird ausgewählt.	Mengen können nicht korrekt abgezählt und verglichen werden.
		Mengen können nicht durch Schätzen verglichen werden.
		Der Begriff „mehr“ ist nicht bekannt.
	Rechtes Bild wird ausgewählt.	**korrekt**
„Wo sind weniger Punkte?“, wird angesagt.  Abbildung III.2-6	Linkes Bild wird ausgewählt.	Mengen können nicht korrekt abgezählt und verglichen werden.
		Der Begriff „weniger“ ist nicht bekannt.
	Rechtes Bild wird ausgewählt.	**korrekt**

Die Fähigkeit des Ordnens wird anhand der Aufgabe „Reihenfolge“ (3 Items) diagnostiziert, bei deren ein unpassendes Element innerhalb einer geordneten Reihe gefunden werden muss. Dabei werden nicht nur Mengenbilder und Zahlsymbole angeboten, sondern auch Längendarstellungen. Die Fähigkeit zum Ordnen als logische Grundoperation spielt bei der ordinalen Zahlvorstellung eine Rolle, da hier der Reihenfolgeaspekt im Vordergrund steht (Hasemann & Gasteiger, 2014). Erkenntnisse aus der Zahlbegriffsforschung zeigen, dass logische Grundoperationen keine Voraussetzung für den Erwerb der Zahlvorstellung darstellen, sondern auch im Umgang mit Zahlen erworben werden können (Clements, 1984).

Tabelle III.2-6: Aufgabenbeispiel „Reihenfolge“ (Niveaustufe A)

<table>
<tr><th>Ma_A_ZO_231_A Reihenfolge</th><th>Auswahl</th><th>Interpretation</th></tr>
<tr><td rowspan="3">„Hier sind die Bilder geordnet. Ein Bild passt nicht“, wird angesagt.

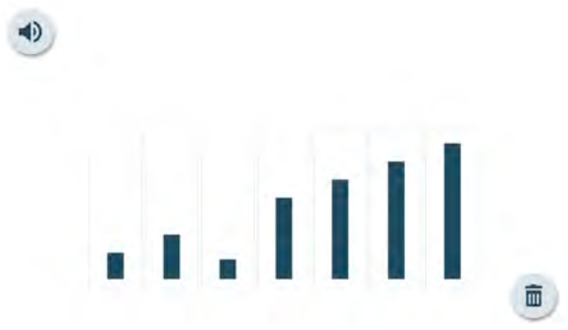



Abbildung III.2-7</td><td rowspan="2">Falsches Bild wird angeklickt.</td><td>Ordnung wird nicht erkannt.</td></tr>
<tr><td>Fragestellung wird nicht verstanden.</td></tr>
<tr><td>Drittes Bild wird angeklickt.</td><td>korrekt</td></tr>
</table>

2.3 ZAHLBEZIEHUNGEN BESCHREIBEN

RLP	**A Zahlbeziehungen beschreiben** ▪ **Zerlegen einer Gesamtmenge in Teilmengen**

Die Fähigkeit, eine Gesamtmenge in Teilmengen zu zerlegen, wird anhand von zwei Sachsituationen überprüft. Insofern können diese Aufgaben auch dem Rahmenlehrplaninhalt Operationsvorstellungen entwickeln zugeordnet werden.

Bei einer statischen Situation des Zusammenfügens werden beide Teilmengen der Menge sechs angegeben, wobei eine der beiden Teilmengen zu sehen ist. Die Gesamtmenge soll ermittelt werden.

Bei einer dynamischen Situation des Wegnehmens wird die Gesamtmenge sechs als Mengendarstellung angegeben. Eine Teilmenge (die Murmeln, die verschenkt werden) wird durch Zahlworte angegeben. Die Restmenge soll ermittelt werden.

Tabelle III.2-7: Aufgabenbeispiel „Kontextaufgaben“ (Niveaustufe A)

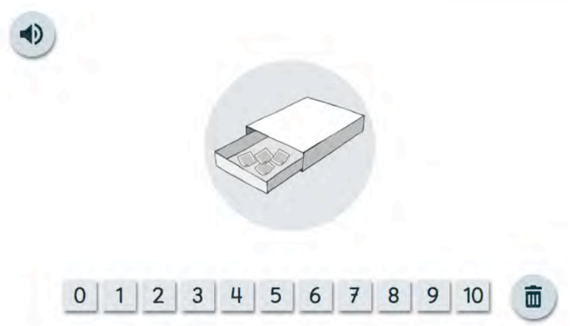
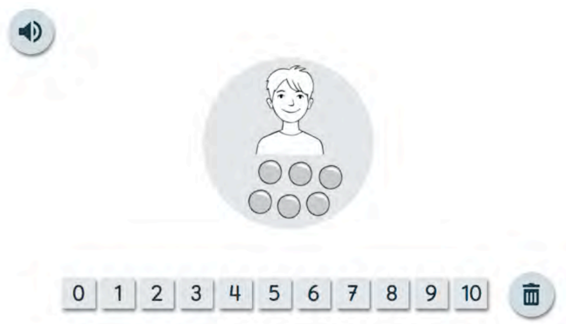
Ma_A_ZO_411_B Kontextaufgaben	Auswahl	Interpretation
„In der Schachtel liegen Sticker. 4 Sticker kann ich sehen. 2 sind versteckt. Wie viele sind es zusammen?“, wird angesagt.  Abbildung III.2-8	2, 4	Eine der genannten Mengen wird ausgewählt.
	5	6 Felder werden in der Zahlenleiste gezählt.
	6	**korrekt**

Tabelle III.2-8: Aufgabenbeispiel „Kontextaufgaben“ (Niveaustufe A)

Ma_A_ZO_411_H Kontextaufgaben	Auswahl	Interpretation
„Gerd hat 6 Murmeln. Er verschenkt 2 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Gerd noch?“, wird angesagt.  Abbildung III.2-9	2, 6	Eine der genannten Mengen wird ausgewählt.
	3	Plus-Minus-Eins-Zählfehler: Beim Weiterzählen im Kopf um ein Element verzählt. Oder: 4 Felder werden in der Zahlenleiste gezählt.
	4	**korrekt**
	8	Zusammenfügen statt Wegnehmen

2.4 OPERATIONSVORSTELLUNGEN ENTWICKELN

RLP	A Operationsvorstellungen entwickeln ▪ **Ausführen von Handlungen nach dynamischen Situationsbeschreibungen des Hinzufügens und des Wegnehmens mit Material (z. B. Hinzulegen eines Stifts zu anderen)**

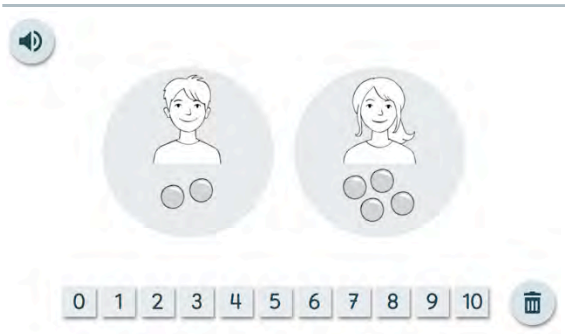
Rechenoperationen können mit verschiedenen Sachsituationen beschrieben werden (Schipper, 2009, S. 100). Diese stellen die Grundlagen für Operationsvorstellungen dar. Bei ***ILeA plus*** können die Schülerinnen und Schüler Handlungen nicht selbst durchführen. Deshalb werden Handlungen und Sachsituationen beschrieben, die teilweise durch bildliche Darstellungen unterstützt werden, sodass sich die Schülerinnen und Schüler die Situation vorstellen können. Da die Operationsvorstellungen nicht durch die Übersetzung in einen passenden Term überprüft werden können, wird auf die Operationsvorstellung indirekt durch das Ergebnis der entsprechenden Handlung bzw. Sachsituation geschlossen. Teilweise werden gleiche Mengen in unterschiedlichen Sachsituationen genutzt.

Bei den geschilderten Sachsituationen wird auf semantischer Ebene zwischen dynamischen und statischen Situationen unterschieden (siehe Beispiele unten). Des Weiteren unterscheiden sich die Situationen dahingehend, ob das Ergebnis oder die Veränderung bzw. Gesamt- oder Teilmengen gesucht werden (Stern, 2009).

Durch verschiedene Sachsituationen und durch die Art der Repräsentation entstehen unterschiedliche Anforderungen beim Lösen. Werden beide Teilmengen bzw. sowohl Teilmenge als auch Gesamtmenge anhand von bildlichen Darstellungen gezeigt, kann das Ergebnis in der bildlichen Darstellung bestimmt werden. Werden keine Mengendarstellungen präsentiert, benötigen die Schülerinnen und Schüler, zusätzlich zum Situationsverständnis, Zahlvorstellungen für die genannten Mengen, um die Sachsituation lösen zu können.

Können die Schülerinnen und Schüler die Aufgaben nicht lösen, kann dies auch auf fehlendes Textverständnis zurückgeführt werden.

Tabelle III.2-9: Aufgabenbeispiel „Kontextaufgaben" (Niveaustufe A)

Ma_A_ZO_411_A Kontextaufgaben	Offene Eingabe	Interpretation
„Emil hat 2 Murmeln. Doro hat 4 Murmeln. Doro gibt Emil die Murmeln. Wie viele Murmeln hat Emil jetzt?", wird angesagt.	2, 4	Eine der abgebildeten Mengen wird ausgewählt.
 Abbildung III.2-10	5	6 Felder werden in der Zahlenleiste gezählt.
	6	**korrekt**
	9	Gedrehte Ziffern (6 und 9) werden vertauscht.

Bei dieser Aufgabe handelt es sich um eine dynamische Situation des Hinzufügens, bei der ein Ergebnis gesucht wird. Beide Teilmengen werden mithilfe von zwei Repräsentanten dargestellt. Das Ergebnis kann abgezählt werden.

Tabelle III.2-10: Aufgabenbeispiel „Kontextaufgaben“ (Niveaustufe A)

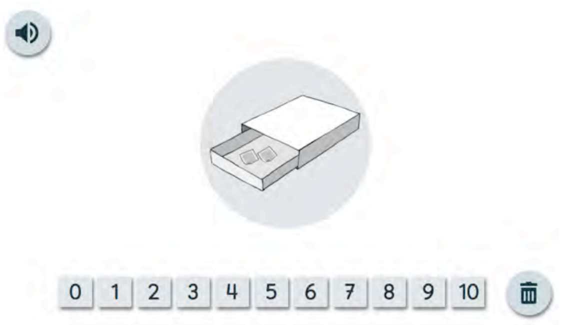
<table>
<tr><th>Ma_A_ZO_411_C Kontextaufgaben</th><th>Auswahl</th><th>Interpretation</th></tr>
<tr><td rowspan="4">„2 Sticker sind in der Schachtel. 5 Sticker sollen in der Schachtel sein. Wie viele Sticker musst du noch dazulegen?“, wird angesagt.


Abbildung III.2-11</td><td>5</td><td>Eine der genannten Mengen wird ausgewählt.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Eine der genannten Mengen wird ausgewählt.
Oder: 3 Felder werden in der Zahlenleiste gezählt.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>korrekt</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Die genannten Mengen werden zusammengefasst.</td></tr>
</table>

Bei dieser Aufgabe handelt es sich um eine dynamische Situation des Hinzufügens, bei der die Veränderung gesucht wird. Die Ausgangs-Teilmenge ist dargestellt.

Tabelle III.2-11: Aufgabenbeispiel „Kontextaufgaben“ (Niveaustufe A)

<table>
<tr><th>Ma_A_ZO_411_I Kontextaufgaben</th><th>Auswahl</th><th>Interpretation</th></tr>
<tr><td rowspan="3">„Claudia hat eine Murmel. Sie bekommt 4 Murmeln dazu. Wie viele Murmeln hat Claudia jetzt?“, wird angesagt.


Abbildung III.2-12</td><td>1, 4</td><td>Eine der genannten Mengen wird ausgewählt.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Wegnehmen statt Hinzufügen</td></tr>
<tr><td>5</td><td>korrekt</td></tr>
</table>

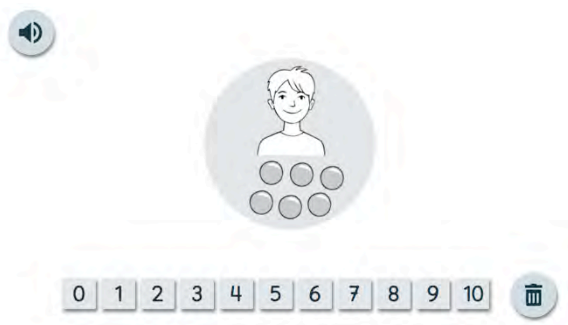
Bei dieser Aufgabe handelt es sich um eine dynamische Situation des Hinzufügens, bei der der Endzustand gesucht ist. Es sind keine Mengenangaben dargestellt.

Tabelle III.2-12: Aufgabenbeispiel „Kontextaufgaben“ (Niveaustufe A)

Ma_A_ZO_411_E Kontextaufgaben	Auswahl	Interpretation
„David will 5 Sticker kleben. Er hat bereits 2 geklebt. Wie viele muss er noch kleben?“, wird angesagt.  Abbildung III.2-13	2, 5	Eine der genannten Mengen wird ausgewählt.
	2, 4	Zählfehler um 1
	2	3 Felder werden in der Zahlenleiste gezählt.
	3	**korrekt**
	7	Situation des Hinzufügens

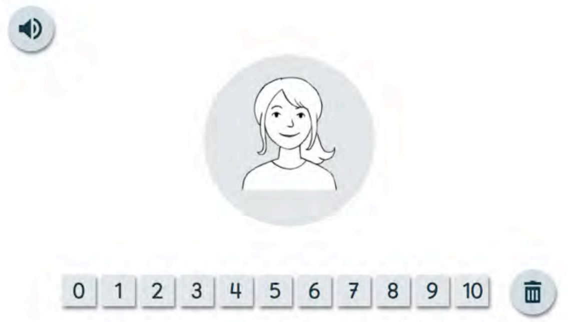
Bei dieser Aufgabe handelt sich um eine dynamische Situation des Hinzufügens, bei der die Veränderung gesucht wird. Es gibt es keine Repräsentanten für die Gesamtmenge und die Teilmengen.

Tabelle III.2-13: Aufgabenbeispiel „Kontextaufgaben“ (Niveaustufe A)

Ma_A_ZO_411_H Kontextaufgaben	Auswahl	Interpretation
„Gerd hat 6 Murmeln. Er verschenkt 2 Murmeln. Wie viele Murmeln hat er noch?“, wird angesagt.  Abbildung III.2-14	2, 6	Eine der genannten Mengen wird ausgewählt.
	3, 5	Plus-Minus-Eins-Zählfehler
	4	**korrekt**
	8	Zusammenfügen statt Wegnehmen

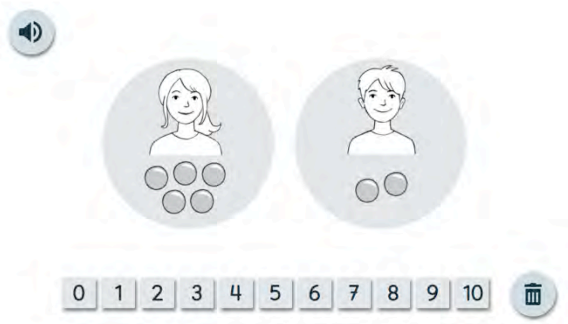
Bei dieser Aufgabe handelt es sich um eine dynamische Situation des Wegnehmnes, bei der das Ergebnis gesucht wird. Die Ausgangsmenge ist dargestellt.

Tabelle III.2-14: Aufgabenbeispiel „Kontextaufgaben“ (Niveaustufe A)

Ma_A_ZO_411_J Kontextaufgaben	Auswahl	Interpretation
„Eva hat 6 Murmeln. Sie verliert 2 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Eva jetzt?“, wird angesagt.	2, 6	Eine der genannten Mengen wird ausgewählt.
	3, 5	Plus-Minus-Eins-Zählfehler
	4	**korrekt**
Abbildung III.2-15	8	Zusammenfügen statt Wegnehmen

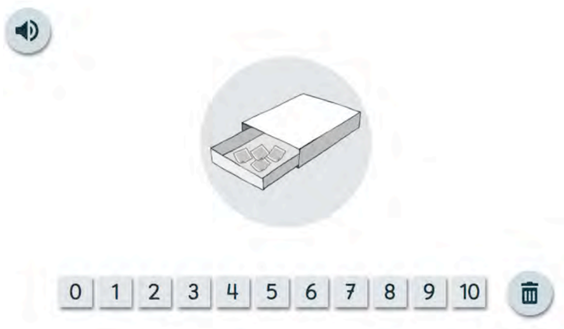
Bei dieser Aufgabe handelt es sich um eine dynamische Situation des Wegnehmens, bei der das Ergebnis gesucht wird. Es ist keine Menge dargestellt.

Tabelle III.2-15: Aufgabenbeispiel „Kontextaufgaben“ (Niveaustufe A)

Ma_A_ZO_411_K Kontextaufgaben	Auswahl	Interpretation
„Lara hat 5 Murmeln. Ali hat 2 Murmeln. Wie viele Murmeln musst du Ali geben, damit er genauso viele hat wie Lara?“, wird angesagt.	2, 5	Eine der genannten Mengen wird ausgewählt.
	**3**	**korrekt**
Abbildung III.2-16	7	Die Mengen werden zusammen-gefügt.

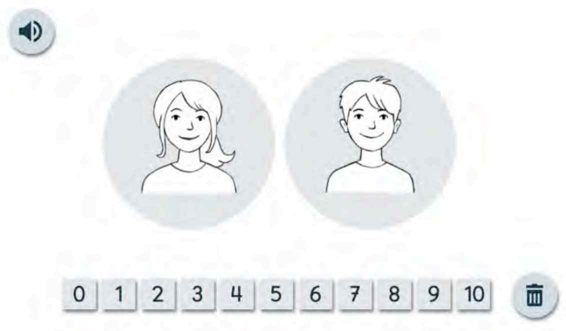
Bei dieser Aufgabe handelt es sich um eine dynamische Situation des Hinzufügens, bei der eine von zwei Mengen durch Hinzufügen von Objekten so verändert werden soll, dass sie anschließend die gleiche Anzahl von Objekten haben (Angleichen bzw. Ausgleichen). Beide Mengen sind dargestellt, die Veränderung ist gesucht.

Tabelle III.2-16: Aufgabenbeispiel „Kontextaufgaben“ (Niveaustufe A)

Ma_A_ZO_411_B Kontextaufgaben	Auswahl	Interpretation
„In der Schachtel liegen Sticker. 4 Sticker kann ich sehen. 2 sind versteckt. Wie viele sind es zusammen?“, wird angesagt.  Abbildung III.2-17	2, 4	Eine der genannten Mengen wird ausgewählt.
	5	6 Felder werden in der Zahlenleiste gezählt.
	6	**korrekt**

Bei dieser Aufgabe handelt es sich um eine statische Situation des Zusammenfassens, bei der die Anzahl der Gesamtmenge gesucht wird. Eine Teilmenge ist dargestellt.

Tabelle III.2-17: Aufgabenbeispiel „Kontextaufgaben“ (Niveaustufe A)

Ma_A_ZO_411_D Kontextaufgaben	Auswahl	Interpretation
„Carla hat 2 Sticker. Tom hat 4 Sticker. Wie viele Sticker haben beide zusammen?“, wird angesagt.  Abbildung III.2-18	2, 4	Eine der genannten Mengen wird ausgewählt.
	5, 7	Plus-Minus-Eins-Zählfehler
	5	6 Felder werden in der Zahlenleiste gezählt.
	6	**korrekt**
	9	Die Ziffern könnten vertauscht worden sein.

Bei dieser Aufgabe handelt es sich um eine statische Situation des Zusammenfassens, bei der das Ergebnis gesucht wird. Es gibt keine Repräsentanten für die beiden Teilmengen.

Tabelle III.2-18: Aufgabenbeispiel „Kontextaufgaben“ (Niveaustufe A)

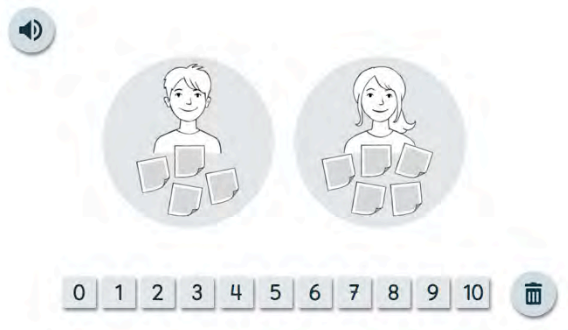
<table>
<tr><th>Ma_A_ZO_411_F Kontextaufgaben</th><th>Auswahl</th><th>Interpretation</th></tr>
<tr><td rowspan="3">„Ben hat 4 Sticker. Isa hat 5 Sticker. Wie viele hat Isa mehr?“, wird angesagt.


Abbildung III.2-19</td><td>1</td><td>korrekt</td></tr>
<tr><td>4, 5</td><td>Eine der genannten Mengen wird ausgewählt.</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Zusammenfügen der genannten Zahlen</td></tr>
</table>

Bei dieser Aufgabe handelt es sich um eine statische Situation des Vergleichens, bei der der Unterschied gesucht wird. Die Anzahlen, die verglichen werden sollen, sind beide dargestellt.

Tabelle III.2-19: Aufgabenbeispiel „Kontextaufgaben“ (Niveaustufe A)

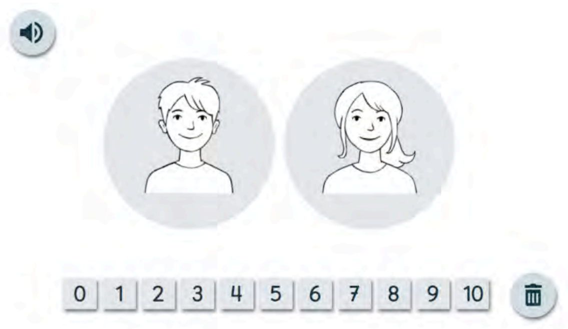
<table>
<tr><th>Ma_A_ZO_411_L Kontextaufgaben</th><th>Auswahl</th><th>Interpretation</th></tr>
<tr><td rowspan="3">„Tim hat 4 Murmeln. Lea hat 5 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Lea mehr?“, wird angesagt.


Abbildung III.2-20</td><td>1</td><td>korrekt</td></tr>
<tr><td>4, 5</td><td>Eine der genannten Mengen wird ausgewählt.</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Die genannten Anzahlen werden zusammengefügt.</td></tr>
</table>

Bei dieser Aufgabe handelt es sich um eine statische Situation des Vergleichens, bei der der Unterschied gesucht und keine Menge dargestellt ist.

2.5 GEOMETRISCHE OBJEKTE UND IHRE EIGENSCHAFTEN BESCHREIBEN

RLP	**A Geometrische Objekte und ihre Eigenschaften beschreiben** ▪ Wiedererkennen von realen Objekten in der Umwelt, die wie ein Würfel, ein Quader, eine Kugel aussehen ▪ **Wiedererkennen und Benennen der ebenen geometrischen Grundformen Viereck, Kreis**

Das Wiedererkennen von realen Objekten in der Umwelt kann weder am Computer noch mit einem Arbeitsblatt überprüft werden. Dazu sind Diagnosesituationen mit realen Objekten notwendig. Die Fähigkeit, ebene geometrische Grundformen wiedererkennen und benennen zu können, wird in der Aufgabe „Figuren“ (14 Items) erhoben, indem bei der Darstellung einer Figur entschieden werden soll, ob der genannte Begriff passend ist. Dabei werden prototypische Figuren für die Grundformen Viereck und Dreieck dargestellt. Das sind z. B. Rechteck, Quadrat, gleichseitiges und gleichschenkliges Dreieck.

Darüber hinaus werden allgemeine Formen des Vierecks und des Dreiecks (spitz- und stumpfwinklige Dreiecke, allgemeine Vierecke) präsentiert (Benz et al., 2015, S. 186; Franke & Reinhold, 2016).

Tabelle III.2-20: Aufgabenbeispiel „Figuren – Prototypisches Beispiel“ (Niveaustufe A)

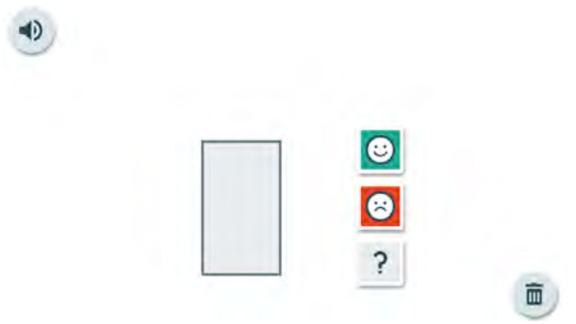
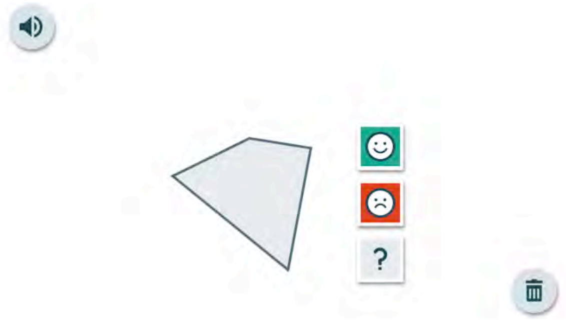
Ma_A_RF_121-1_D Figuren Prototypisches Beispiel	Eingabe	Interpretation
„Ist das ein Viereck?“, wird angesagt.  Abbildung III.2-21	**ja**	**korrekt**
	nein	Der Begriff „Viereck“ wird nicht auf eine Rechteckdarstellung angewendet.

Tabelle III.2-21: Aufgabenbeispiel „Figuren – Nicht prototypisches Beispiel“ (Niveaustufe A)

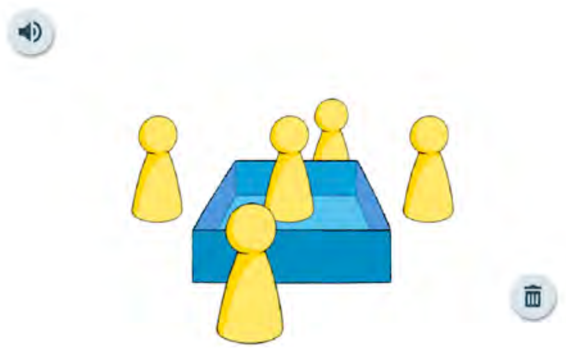
Ma_A_RF_121-1_F Figuren **Nicht prototypisches Beispiel**	**Eingabe**	**Interpretation**
„ Ist das ein Viereck?“, wird angesagt.  Abbildung III.2-22	**ja**	**korrekt**
	nein	Der Begriff „Viereck“ wird nicht auf eine nicht prototypische Viereckdarstellung angewendet.

2.6 BEZIEHUNGEN ZWISCHEN GEOMETRISCHEN OBJEKTEN BESCHREIBEN

RLP	**A Beziehungen zwischen geometrischen Objekten beschreiben** ▪ **Unterscheiden und Benennen der räumlichen Lage von Objekten mit Präpositionen (z. B. auf, in, am, vor, neben)**

Die richtige Verwendung von Präpositionen ist die Grundlage für das Kommunizieren über Gegenstände und deren Eigenschaften sowie über Lagebeziehungen im Raum (Benz et al., 2015, S. 183). Die Unterscheidung und Benennung der räumlichen Lage von Objekten mit Präpositionen wird anhand einer Sachsituation mit Spielsteinen untersucht. Bei der Aufgabe „Spielfigur“ (5 Items) sollen die beschriebene Lagebeziehung der Spielfigur erfasst und die passende Figur angeklickt werden.

Tabelle III.2-22: Aufgabenbeispiel „Spielfigur“ (Niveaustufe A)

Ma_A_RF_211_E Spielfigur	**Eingabe**	**Interpretation**
„Welche Figur steht rechts neben der Kiste? Klicke die Figur an“, wird angesagt.  Abbildung III.2-23	Figuren hinter und vor der Kiste	falsch
	Figur rechts	**korrekt**
	Figur links	Vertauschung von rechts und links

2.7 GEOMETRISCHE OBJEKTE DARSTELLEN

RLP

A Geometrische Objekte darstellen

- Kneten von Körperformen
- Nachfahren von Linien in geometrischen Grundformen
- Falten und Schneiden von Dreiecken und Vierecken
- **Auslegen von strukturierten Figuren**

Die Lehrplaninhalte beziehen sich auf konkrete Handlungen, die im Rahmen des Onlinediagnoseverfahrens ***ILeA plus*** nicht diagnostiziert werden können. Das Darstellen von Objekten stellt einen konstruktiven Zugang zur Begriffsbildung geometrischer Objekte dar. In der Aufgabe „Auslegen“ (2 Items) sollen die Schülerinnen und Schüler eine passende Figur einem weißen Feld zuordnen.

Tabelle III.2-23: Aufgabenbeispiel „Auslegen“ (Niveaustufe A)

<table>
<tr><th>Ma_A_RF_341-A Auslegen</th><th>Auswahl</th><th>Interpretation</th></tr>
<tr><td rowspan="3">„Was passt genau in das weiße Feld?“, wird angesagt.

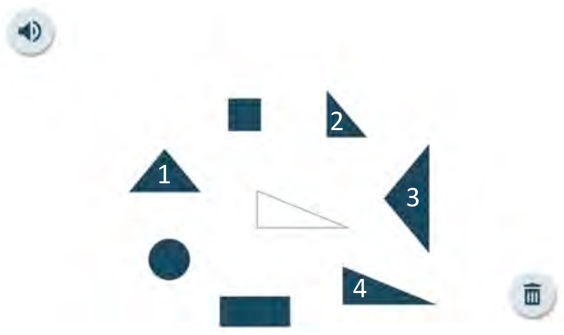



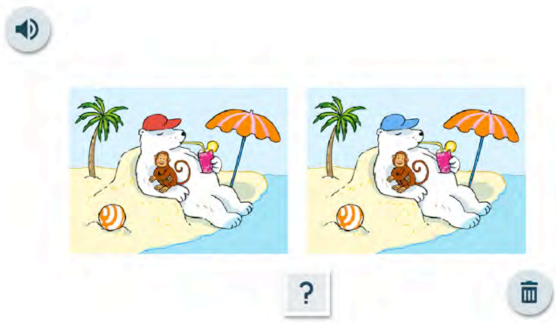
Abbildung III.2-24</td><td>Kreis, Vierecke</td><td>Eigenschaften des Dreiecks werden nicht beachtet.</td></tr>
<tr><td>Dreieck 1, 2 oder 3</td><td>Winkel und Seitenlänge werden nicht beachtet.</td></tr>
<tr><td>Dreieck 4</td><td>korrekt</td></tr>
</table>

2.8 GEOMETRISCHE ABBILDUNGEN UND IHRE EIGENSCHAFTEN NUTZEN

RLP	**A Geometrische Abbildungen und ihre Eigenschaften nutzen** ▪ Finden von deckungsgleichen ebenen Figuren durch Aufeinanderlegen und Begründen mit Formulierungen wie „passt genau aufeinander“ und „passt nicht genau aufeinander“ ▪ **Finden von geringfügigen Abweichungen (z. B. auf zwei Bildern oder Bauten)**

Das Finden von geringfügigen Abbildungen wird in der Aufgabe „Unterschiede“ (3 Items) untersucht. In drei Items wird die Abweichung bei jeweils anderen Objekten durch ein anderes Unterschiedskriterium dargestellt (Farbe, spiegelbildliche Darstellung, fehlende Abbildung).

Tabelle III.2-24: Aufgabenbeispiel „Unterschiede“ (Niveaustufe A)

Ma_A_RF_421_A Unterschiede	Auswahl	Interpretation
„Hier siehst du zwei Bilder. Sie unterscheiden sich. Wo ist der Unterschied?“, wird angesagt.  Abbildung III.2-25	**Mütze**	**korrekt**

3. NIVEAUSTUFE A: FÖRDERINHALTE AUS DEN AUSWERTUNGEN

Christiane Benz, Axel Schulz, Sebastian Wartha & Sophia Bayer

3.1 VERBALES ZÄHLEN – ZAHLWORTREIHE (ZW)

Die Kenntnis der Zahlwortreihe ist eine Voraussetzung, um über Mengen und Zahlen kommunizieren zu können. Die Zahlwortreihe muss beim Abzählen von Mengen in der richtigen Reihenfolge benutzt werden, wenn eine Anzahl richtig bestimmt werden soll.

Die Kenntnis der Zahlwortreihe ist außerdem eine Voraussetzung für erste zählende Lösungen von Rechenaufgaben.

Ausgabe:
Grundlage für die Ausgabe dieses Förderinhaltes sind die ersten zwei der vier Aufgaben zum Zählen im Interview. Der Förderinhalt wird ausgegeben, wenn mindestens ein Fehler gemacht wurde. Wenn ein Kind zu Schulbeginn noch nicht rückwärts zählen kann, führt dies keineswegs zur Ausgabe eines Förderinhaltes.

Tabelle III.3-1: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes ZW (Niveaustufe A)

Anzahl falsch:	0	1	2	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (ZW)	79 %	14 %	7 %	2356
Bewertung	Unauffällig: 79 %	Auffällig: 21 %		

Fördervorschläge
Tabelle III.3-2: Fördervorschläge (ZW, Niveaustufe A)

Ziel	Förderung
Kennen der Zahlwortreihe	▪ Die Zahlwortreihe bis 12 kann nicht entdeckt werden, sondern kann nur durch gemeinsames Zählen gelernt werden. ▪ Aus diesem Grund sollten im Alltag zahlreiche Zählanlässe für lautes Zählen (Zählen der Schülerinnen und Schüler) genutzt werden. ▪ Zählreime (Zehn kleine Zappelfinger) ▪ Lieder mit der Zahlwortreihenfolge (Ich bin der kleine Tanzbär) ▪ Zählen reihum im Stuhlkreis
Erste Systematik der Zahlwortreihe kennenlernen	▪ Bei Zahlen ab 13 können erste Regelmäßigkeiten und Zusammenhänge mit einstelligen Zahlen entdeckt und diskutiert werden („drei“ – „dreizehn“) ▪ Rhythmisches Zählen, Laut-Leise-Zählen (**drei**zehn, **vier**zehn…)
Rückwärts zählen	▪ Count-down-Situationen nutzen, beispielsweise bei einer Geburtstagsrakete ▪ Zählen reihum im Stuhlkreis oder als Paar
Zählen in Schritten	▪ Zählen reihum im Stuhlkreis oder als Paar (laut – leise – laut – leise). Zählen in 2er-Schritten

Literatur zum Weiterlesen:

Benz, C., Peter-Koop, A., & Grüßing, M. (2015). *Frühe mathematische Bildung: Mathematiklernen der Drei- bis Achtjährigen*. Heidelberg: Springer Spektrum, S. 158.

Bönig, D., Hering, J., London, M., Nührenbörger, M., & Thöne, B. (2017). *Erzähl mal Mathe*. Seelze-Velber: Kallmeyer Friedrich, S. 104 ff.

Hasemann, K., & Gasteiger, H. (2014). *Anfangsunterricht Mathematik* (3., überarb. u. erw. Aufl.). Berlin: Springer Spektrum, S. 22 ff.

Kaufmann, S. (2010). *Handbuch für die frühe mathematische Bildung*. Braunschweig: Westermann, S. 145.

Lorenz, J. H. (2012). *Kinder begreifen Mathematik: Frühe mathematische Bildung und Förderung.* Stuttgart: Kohlhammer, S. 149.

Müller, G. N., & Wittmann, E. Ch. (2002). *Das kleine Zahlenbuch 1: Spielen und Zählen.* Seelze-Velber: Kallmeyer.

Sommerlatte, A., Lux, M., Meiering, G., & Führlich, S. (2007). *Beobachten – Dokumentieren – Fördern: Lerndokumentation Mathematik und Anregungsmaterialien Mathematik*. Berlin: Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung. Abgerufen von: *http://i.bsbb.eu/1023* (Zugriff am 26.06.2021), S. 43-44.

3.2 KLEINE ANZAHLEN BESTIMMEN, ZÄHLENDE ANZAHLBESTIMMUNG (KA)

Um Anzahlen zählend bestimmen zu können, wird jedem Objekt der Menge genau ein Zahlwort zugeordnet (Eins-zu-eins-Zuordnung). Beim Zählen aller Elemente einer Menge gibt das Zahlwort des zuletzt gezählten Elements die Anzahl der gesamten Menge an. Dies wird das „Kardinalprinzip“ genannt.

Eine tragfähige kardinale Zahlvorstellung gründet sich auf die Kenntnis, wie viele einzelne Elemente eine Menge enthält (Mächtigkeit der Menge). Darüber hinaus müssen sowohl das Zahlzeichen (z. B. 3) als auch das Zahlwort (z. B. drei) mit dieser Anzahl verknüpft werden.

Eine tragfähige Zahlvorstellung ist also dann gegeben, wenn die drei Darstellungen (Zahlzeichen, Zahlwort und Menge) miteinander verknüpft werden können.

Ausgabe:

Grundlage für die Ausgabe des Förderinhaltes sind die Bearbeitungen der Aufgaben „Zahlauffassung“ (4 Items) und „Mengen klicken“ (3 Items).

Der Förderinhalt wird ausgegeben, wenn mehr als eine der sieben Items falsch gelöst wurden.

Tabelle III.3-3: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes KA (Niveaustufe A)

Anzahl falsch:	0	1	2	3	4	5	6	7	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (KA)	63 %	22 %	9 %	5 %	1 %	0 %	0 %	0 %	2344
Bewertung	Unauffällig: 85 %		Auffällig: 15 %						

Ergänzende prozessorientierte Diagnose und Fördervorschläge

Tabelle III.3-4: Ergänzende prozessorientierte Diagnose (KA, Niveaustufe A)

Aufgabe	Beobachtungen
Genauso viele Plättchen legen lassen, wie präsentiert werden (konkret oder bildliche Darstellung)	▪ Wird für jedes präsentierte Plättchen ein Plättchen gelegt?
Konkrete Objekte abzählen	▪ Wird die Zahlwortreihe in der richtigen Reihenfolge genannt?
	▪ Wird jedem Element genau ein Zahlwort zugeordnet? ▪ Besonders achten auf den Zählprozess beim Zahlwort „sieben“ – das ist das einzige Zahlwort bis zwölf mit zwei Silben.
	▪ Nimmt die Schülerin / der Schüler jeden Gegenstand in die Hand bzw. zeigt darauf? Trennt sie/er gezählte Objekte von nicht gezählten Objekten?
Aus einer größeren Menge eine Anzahl von Objekten nehmen und dabei laut mitzählen	▪ Wird bei jedem Objekt ein Zahlwort genannt? Wird die Zahlwortreihe in der richtigen Reihenfolge genannt?

Tabelle III.3-5: Fördervorschläge (KA, Niveaustufe A)

Ziel	Förderung
Eins-zu-Eins-Zuordnung	▪ Anzahl als Mengendarstellung präsentieren. Gleiche Anzahl legen lassen ▪ Hinweis: Lege zu jedem (roten bzw. gemalten) Plättchen eines von deinen Plättchen.
Mengen zählend bestimmen	▪ Hinweis: Nimm jedes Objekt in die Hand und nenne laut das Zahlwort und lege es dann zur Seite. ▪ Objekte beim Zählen antippen
Kardinale Zahlvorstellung aufbauen	▪ Mengen legen lassen (z. B. Muggelsteine) ▪ Anzahl begründet bestimmen ▪ Mengen gleicher Anzahl unterschiedlich legen lassen ▪ Gleiche Anzahl mit unterschiedlichen Fingern zeigen lassen

Literatur zum Weiterlesen:

Benz, C., Peter-Koop, A., & Grüßing, M. (2015). *Frühe mathematische Bildung: Mathematiklernen der Drei- bis Achtjährigen*. Heidelberg: Springer Spektrum, S. 154.

Fuchs, M. (2015). *Alle Kinder sind Matheforscher: Frühkindliche Begabungsförderung in heterogenen Gruppen*. Seelze-Velber: Kallmeyer Friedrich, S. 104.

Hasemann, K., & Gasteiger, H. (2014). *Anfangsunterricht Mathematik* (3., überarb. u. erw. Aufl.). Berlin: Springer Spektrum, S. 96.

Hauser, B., Rathgeb-Schnierer, E., Stebler, R., & Vogt, F. (Hrsg.). (2016). *Mehr ist mehr: Mathematische Frühförderung mit Regelspielen*. Seelze-Velber: Kallmeyer Friedrich, S. 83, 114, 117.

Kaufmann, S. (2010). *Handbuch für die frühe mathematische Bildung*. Braunschweig: Westermann, S. 154.

Lorenz, J. H. (2012). *Kinder begreifen Mathematik: Frühe mathematische Bildung und Förderung.* Stuttgart: Kohlhammer, S. 155.

Sommerlatte, A., Lux, M., Meiering, G., & Führlich, S. (2007). *Beobachten – Dokumentieren – Fördern: Lerndokumentation Mathematik und Anregungsmaterialien Mathematik*. Berlin: Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung. Abgerufen von *http://i.bsbb.eu/1023* (Zugriff am 20.06.2021), S. 19, 33.

3.3 KLEINE ANZAHLEN ÜBER STRUKTURNUTZUNG BESTIMMEN (ST)

Das Nutzen von Strukturen ist zentral für die spätere unterrichtliche Verwendung von Arbeitsmitteln zur Überwindung von Zählprozessen. Darüber hinaus ist die Nutzung von Strukturen grundlegend für die Entwicklung der Teil-Ganzes-Vorstellung.

Für schnelles Sehen ist eine strukturierende Mengenwahrnehmung die Voraussetzung. So wird die Gesamtmenge in Teile zerlegt. Aus der (visuellen) Zerlegung konkreter (z. B. mit Objekten gelegter) Mengen und der Verknüpfung mit der Gesamtmenge kann Wissen über einzelne Zahlzerlegungen aufgebaut werden (Benz et al., 2015, S. 135).

Werden keine Strukturen gedeutet und genutzt, müssen Anzahlen immer zählend bestimmt werden. Eine Zahlvorstellung als Teil-Ganzes-Beziehung kann nicht aufgebaut werden.

Ausgabe:
Grundlage sind die Bearbeitungen der Aufgaben „Schnelles Sehen" von Fingerbildern (2 Items) und von Punkten (3 Items).

Der Förderinhalt wird ausgegeben, wenn mehr als zwei der fünf Items falsch gelöst wurden.

Tabelle III.3-6: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes ST (Niveaustufe A)

Anzahl falsch:	0	1	2	3	4	5	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (ST)	17 %	29 %	27 %	16 %	10 %	1 %	2353
Bewertung	Unauffällig: 73 %			Auffällig: 27 %			

Ergänzende prozessorientierte Diagnose und Fördervorschläge

Tabelle III.3-7: Ergänzende prozessorientierte Diagnose (ST, Niveaustufe A)

Aufgabe	Beobachtungen
Verschiedene Fingerbilder werden den Schülerinnen und Schülern kurz gezeigt – sie sollen die Anzahl nennen und erklären, warum sie wissen, wie viele Finger es sind.	▪ Werden Fingerbilder mit fünf und weniger Fingern simultan wahrgenommen? ▪ Kann die Anzahl auch bei Fingerbildern mit mehr als 5 Fingern genannt werden? ▪ Wird die Fünferstruktur erkannt und genutzt?
(Gleichfarbige) Plastikeier, Tischtennisbälle oder Murmeln in Eierschachteln legen und betrachten: Wie viele Eier siehst du? Beschreibe, wie die Eier angeordnet sind.	▪ Wird die Gesamtzahl genannt? ▪ Werden Teilmengen genannt? ▪ Wird ein Zählprozess erklärt?
Plastikeier in Eierschachteln kurz zeigen: Wie viele Eier siehst du? Beschreibe, wie die Eier angeordnet sind.	▪ Wird die Gesamtzahl genannt? ▪ Werden Strukturen beschrieben und genutzt?

Tabelle III.3-8: Fördervorschläge (ST, Niveaustufe A)

Ziel	Förderung
Gleiche Strukturen erkennen und reproduzieren	▪ Identische Abbildungen/Anordnungen anbieten: Finde gleiche Bilder. ▪ Punktebild vorgeben: Lege genauso mit Plättchen.
Selbst Strukturen herstellen	▪ Viele Plättchen vorgeben: Mache immer Dreier(gruppen)/Vierer(gruppen). ▪ Punktebilder vorgeben: Mache immer Dreier(gruppen)/Vierer(gruppen).
Strukturen in Mengen darstellen, deuten und nutzen	▪ Lege (Bilder mit Plättchen) so, dass man leicht sehen kann, wie viele es sind. Begründe.
Strukturen in Mengen wahrnehmen und nutzen	▪ Viele Paarbildkarten erstellen mit unterschiedlichen Darstellungen zu jeweils einer Menge. Spiel: Finde gleiche Paare (offen oder verdeckt). ▪ Die Schülerinnen und Schüler können diese Karten auch selbst herstellen.
Strukturen in Mengen nutzen und mit Zahlworten beschreiben	▪ Mit 2 Farben Muster in Zehnerfeldern darstellen und beschreiben
Kraft der 5 nutzen	▪ Fingerbilder als Partnerübung: Eine Schülerin / ein Schüler zeigt Finger auf, Partnerin/Partner nennt die Anzahl.

Literatur zum Weiterlesen:

Benz, C. (2010). *Minis entdecken Mathematik*. Braunschweig: Westermann, S. 28.

Benz, C., Peter-Koop, A., & Grüßing, M. (2015). *Frühe mathematische Bildung: Mathematiklernen der Drei- bis Achtjährigen*. Heidelberg: Springer Spektrum, S. 309 ff.

Bönig, D., Hering, J., London, M., Nührenbörger, M., & Thöne, B. (2017). *Erzähl mal Mathe*. Seelze-Velber: Kallmeyer Friedrich, S. 24.

Häsel-Weide, U., Nührenbörger, M., Moser Opitz, E., & Wittich, C. (2013). *Ablösung vom zählenden Rechnen: Fördereinheiten für heterogene Lerngruppen*. Seelze-Velber: Kallmeyer Friedrich.

Hauser, B., Rathgeb-Schnierer, E., Stebler, R., & Vogt, F. (Hrsg.). (2016). *Mehr ist mehr: Mathematische Frühförderung mit Regelspielen.* Seelze-Velber: Klett Kallmeyer Friedrich, S. 76.

Hess, K. (2012). *Kinder brauchen Strategien: Eine frühe Sicht auf mathematisches Verstehen.* Seelze-Velber: Kallmeyer Friedrich, S. 129.

Müller, G. N., & Wittmann, E. Ch (2002). *Das kleine Zahlenbuch 2: Schauen und Zählen*. Seelze-Velber: Kallmeyer.

Shafir, H. (1991). *Halli Galli*. Dietzenbach: Amigo.

Sommerlatte, A., Lux, M., Meiering, G., & Führlich, S. (2007). *Beobachten – Dokumentieren – Fördern: Lerndokumentation Mathematik und Anregungsmaterialien Mathematik.* Berlin: Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung. Abgerufen von *http://i.bsbb.eu/1023* (Zugriff am 20.06.2021), S. 23.

3.4 ANZAHLEN VERGLEICHEN (VG)

Das Vergleichen nach bestimmten Kriterien stellt die grundlegende Idee für das Vergleichen und Ordnen von Mengen anhand ihrer Anzahlen bzw. von Zahlen nach ihrer Größe dar. Beim Vergleichen und Ordnen von Zahlen wird unter anderem das ordinale Zahlverständnis aufgebaut. Das ordinale wie auch das kardinale Zahlverständnis sind wichtige Vorstellungen von Zahlen, die später für das Rechnenlernen benötigt werden.

Ausgabe:
Grundlage sind die Bearbeitungen der Aufgabe „Anzahlvergleich“ (6 Items). Der Förderinhalt wird ausgegeben, wenn mehr als eins der sechs Items falsch bearbeitet wurden.

Tabelle III.3-9: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes VG (Niveaustufe A)

Anzahl falsch:	0	1	2	3	4	5	6	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (VG)	60 %	21 %	16 %	2 %	1 %	0 %	0 %	2324
Bewertung	Unauffällig: 81 %		Auffällig: 19 %					

Ergänzende prozessorientierte Diagnose und Fördervorschläge

Tabelle III.3-10: Ergänzende prozessorientierte Diagnose (VG, Niveaustufe A)

Aufgabe	Beobachtungen
Zwei Anzahlen von Gegenständen vergleichen lassen (Anzahlen sollten sich nur um 1 unterscheiden)	▪ Wo liegt mehr? ▪ Wo liegt weniger? ▪ Ist der Begriff „mehr“ bzw. „weniger“ bekannt? ▪ Wie wird der Unterschied festgestellt? Durch Zählen? Durch strukturierendes Sehen oder durch 1:1-Zuordnung?
Verschiedene Mengen nach Anzahlen sortieren lassen	▪ Mengen nach verbaler Aufforderung von wenig nach viel sortieren (und umgekehrt)

Tabelle III.3-11: Fördervorschläge (VG, Niveaustufe A)

Ziel	Förderung
Begriffe „mehr“, „weniger“, „gleich viel“ entwickeln	▪ Mengen durch 1:1-Zuordnung vergleichen und beschreiben ▪ Zuordnung der Begriffe
Mengen vergleichen	▪ Zwei Schülerinnen oder Schüler würfeln. Jede/jeder legt die gewürfelte Anzahl mit Plättchen. ▪ Wer hat mehr? ▪ Überprüfung durch 1:1-Zuordnung (Zählen …)

Literatur zum Weiterlesen:

Benz, C., Peter-Koop, A., & Grüßing, M. (2015). *Frühe mathematische Bildung: Mathematiklernen der Drei- bis Achtjährigen*. Heidelberg: Springer Spektrum, S. 154.

Bönig, D., Hering, J., London, M., Nührenbörger, M., & Thöne, B. (2017). *Erzähl mal Mathe*: Seelze-Velber: Kallmeyer Friedrich, S. 135 ff.

Gasteiger, H. (2013). Womit muss man rechnen? Mathematische Kompetenzen zu Schulbeginn erkennen und weiterentwickeln. *Fördermagazin Grundschule, 4,* 7-11.

Hasemann, K., & Gasteiger, H. (2014). *Anfangsunterricht Mathematik* (3., überarb. u. erw. Aufl.). Berlin: Springer Spektrum, S. 115 ff.

Hauser, B., Rathgeb-Schnierer, E., Stebler, R., & Vogt, F. (Hrsg.). (2016). *Mehr ist mehr: Mathematische Frühförderung mit Regelspielen.* Seelze-Velber: Klett Kallmeyer Friedrich, S. 72, 95.

Kaufmann, S. (2010). *Handbuch für die frühe mathematische Bildung*. Braunschweig: Westermann, S. 156.

Sommerlatte, A., Lux, M., Meiering, G., & Führlich, S. (2007). *Beobachten – Dokumentieren – Fördern: Lerndokumentation Mathematik und Anregungsmaterialien Mathematik*. Berlin: Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung. Abgerufen von: *http://i.bsbb.eu/1023* (Zugriff am 20.06.2021), S. 25.

3.5 HANDLUNGEN ZUR ADDITION UND SUBTRAKTION ERKENNEN UND ZUR LÖSUNG NUTZEN (GV)

Operationsvorstellungen zur Addition und Subtraktion gründen sich auf die Deutung von dynamischen (Hinzufügen, Wegnehmen, An- und Ausgleichen) und statischen (Zusammenfassen, Vergleichen) Situationstypen, die in verschiedene Kontexte eingebettet sind.

Diese verschiedenen Situationen sollen im Laufe des ersten Schuljahres mit den Operationszeichen „+“ und „-“ verknüpft werden.

Die unterschiedlichen Situationstypen können auch bildlich dargestellt und Zahlwörter können durch entsprechende Anzahlen von Mengen verdeutlicht werden.

Das statische Zusammenfassen wird bereits bei der Erarbeitung der Zahlvorstellungen als Teil-Ganzes-Verständnis einer Zahl thematisiert. Das Teil-Ganzes-Verständnis gründet sich auf das Verständnis, dass eine Menge nicht nur aus einzelnen Elementen besteht, sondern auch aus Teilmengen bestehen kann.

Können die Schülerinnen und Schüler die Handlungssituationen noch nicht angemessen deuten, so können sie auch noch keine sichere Verknüpfung zu den Operationszeichen herstellen.

Ausgabe:
Grundlage sind die Bearbeitungen von fünf Items der Aufgabe „Kontextaufgaben“ (A, B, J, H, I). Hierbei werden berücksichtigt:

- dynamische Situation des Hinzufügens (mit 2 und 0 Repräsentanten für die Zahlworte),
- dynamische Situation des Wegnehmens (mit 1 und 0 Repräsentanten für die Zahlworte),
- statisches Zusammenfassen (mit 1 Repräsentant für die Zahlworte).

Der Förderinhalt wird ausgegeben, wenn mehr als zwei Items falsch gelöst wurden.

Tabelle III.3-12: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes GV (Niveaustufe A)

Anzahl falsch:	0	1	2	3	4	5	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (GV)	25 %	26 %	20 %	14 %	9 %	6 %	2341
Bewertung	Unauffällig: 71 %			Auffällig: 29 %			

Ergänzende prozessorientierte Diagnose und Fördervorschläge

Tabelle III.3-13: Ergänzende prozessorientierte Diagnose (GV, Niveaustufe A)

Aufgabe	Beobachtungen
Nachspielen von Geschichten Nacherzählen von Handlungen Beschreiben von dynamischen Situationen auf Abbildungen	▪ Werden mathematisch relevante Aspekte der Handlung berücksichtigt? ▪ Können Handlungen sprachlich kommuniziert werden? ▪ Werden die relevanten Aspekte der Zeichnung in Bezug auf die Aufgabenstellung identifiziert? ▪ Kann das statische Bild auch dynamisch gedeutet werden?
Anzahl von 3 Gegenständen (Plättchen) bestimmen lassen und diese in eine Schachtel legen. Dann noch die Anzahl von 2 Gegenständen bestimmen lassen. Diese auch in die Schachtel legen: Wie viele sind jetzt in der Schachtel?	▪ Wie wird die Anzahl der 3 und 2 Plättchen bestimmt? ▪ Kann die Anzahl in der Schachtel bestimmt werden, ohne in der Schachtel nachzuschauen?
Anzahl von 6 Gegenständen (Plättchen) in der Schachtel bestimmen lassen. Dann 2 Gegenstände herauslegen: Wie viele sind jetzt in der Schachtel?	▪ Wie wird die Anzahl der 6 Plättchen bestimmt? ▪ Hat die Schülerin / der Schüler eine Idee, wie sie/er die restlichen Plättchen bestimmen kann?

Tabelle III.3-14: Fördervorschläge (GV, Niveaustufe A)

Ziel	Förderung
Handlungssituationen zum Hinzufügen, Wegnehmen und Ergänzen kennenlernen	▪ Nach Anweisungen Objekte hinzufügen oder wegnehmen ▪ So viele Objekte ergänzen, bis eine gewünschte Anzahl vorhanden ist (z. B. so viele Plastikeier in den Karton legen, bis er voll ist)
Handlungssituationen zum Hinzufügen, Wegnehmen und Ergänzen beschreiben	▪ Durchgeführte Handlungen sollen (nach)erzählt werden.

Handlungssituationen zum Hinzufügen, Wegnehmen und Ergänzen durchführen	▪ Räuber und Goldschatz (nach Müller, Wittmann ,& Wolff, 2007) im Zehnerfeld:
	  ▪ Augenwürfel bekleben, Seite mit 6 Augen mit einem Klebepunkt und der Ziffer 0 bekleben. Es wird mit einem Würfel gewürfelt.
	  ▪ In ein Zehnerfeld werden 5 Plättchen gelegt.
	  ▪ Eine Schülerin / ein Schüler ist der Minus-Räuber und die / der andere der Plus-Räuber.
	  ▪ Der Minus-Räuber darf so viele Plättchen wegnehmen, wie er würfelt. Der Plus-Räuber darf so viele dazu legen, wie er würfelt. Ist das Feld zuerst ganz voll, gewinnt der Plus-Räuber. Ist es zuerst leer, gewinnt der Minus-Räuber.

Statischer Vergleich	▪ Jeder Spieler sucht sich eine Plättchenfarbe aus. Beide Spielerinnen oder Spieler würfeln nacheinander. Jede Spielerin / jeder Spieler nimmt sich die gewürfelte Anzahl an Plättchen in seiner Farbe aus dem Korb und legt sie auf den Tisch. ▪ Anschließend wird verglichen, wer mehr Plättchen hat. ▪ Die Spielerin / der Spieler, der mehr Plättchen hat, darf die Anzahl an Plättchen, die er mehr hat, hamstern (wegnehmen). ▪ Alle anderen Plättchen kommen zurück in den Korb. ▪ Das Spiel ist zu Ende, wenn der Korb leer ist oder wenn eine vorgegebene Anzahl an Runden gespielt wurde (z. B. „wir spielen sechs Runden“). ▪ Die Spielerin / der Spieler mit den meisten erhamsterten Plättchen hat gewonnen. ▪ Das Spiel kann aber auch dann zu Ende sein, wenn eine Schülerin / ein Schüler zuerst 10 Plättchen erhamstert hat. (Nach einer Idee von Lilo Verboom. Abgerufen von *http://i.bsbb.eu/1024* (Zugriff am 18.07.2021)
Rechengeschichten malen und erzählen lassen	▪ Werden die mathematisch relevanten Aspekte beschrieben?

Literatur zum Weiterlesen:

Benz, C., Peter-Koop, A., & Grüßing, M. (2015). *Frühe mathematische Bildung: Mathematiklernen der Drei- bis Achtjährigen*. Heidelberg: Springer Spektrum, S. 141 ff.

Bönig, D., Hering, J., London, M., Nührenbörger, M., & Thöne, B. (2017). *Erzähl mal Mathe*. Seelze-Velber: Kallmeyer Friedrich, S. 26.

Hasemann, K., & Gasteiger, H. (2014). *Anfangsunterricht Mathematik* (3., überarb. u. erw. Aufl.). Berlin: Springer Spektrum, S. 118 ff.

Kaufmann, S. (2010). *Handbuch für die frühe mathematische Bildung*. Braunschweig: Westermann, S. 160.

Lorenz, J. H. (2012). *Kinder begreifen Mathematik: Frühe mathematische Bildung und Förderung.* Stuttgart: Kohlhammer, S. 156.

Nührenbörger, M., Schwarzkopf, R., & Tubach, D. (2016). *Mit Zahlen spielen*. Leipzig: Klett.

Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Braunschweig: Westermann, S. 100 f.

3.6 GEOMETRISCHE OBJEKTE ERKENNEN (BE)

Geometrische Objekte und Abbildungen werden mit Begriffen beschrieben. Daher sind Kenntnisse und Anwendungen der geometrischen Begriffe grundlegend für weitere Lernprozesse.

Nicht jedes Wort ist ein Begriff. Franke & Reinhold (2016, S. 116) führen aus, dass erst dann von einem Begriff gesprochen werden kann, wenn damit nicht nur ein einzelner Gegenstand bezeichnet wird, sondern wenn damit eine Kategorie bzw. Klasse assoziiert wird, in die sich ein konkreter Gegenstand einordnen lässt (Benz et al., 2015, S. 185).

Begriffe werden zunächst ohne Definitionen gebildet. Sie werden durch konkrete Modelle oder Abbildungen repräsentiert. Durch Kennenlernen verschiedener Beispiele und Gegenbeispiele entwickelt sich die Begriffsbildung. Eine Figur kann mit verschiedenen Begriffen bezeichnet werden. So kann ein Quadrat als Quadrat, aber auch als Viereck oder als Rechteck bezeichnet werden. Oft lernen Schülerinnen und Schüler zuerst eine prototypische Darstellung, beispielsweise das gleichseitige Dreieck, als Repräsentant für einen Begriff kennen. Im weiteren Lernprozess ist es notwendig, dass die Schülerinnen und Schüler verschiedene Repräsentanten kennenlernen, damit sie ein umfassendes Begriffsverständnis erwerben können (Maier & Benz, 2014, S. 185).

Zu einem umfassenden Begriffsverständnis gehört: Figuren benennen, Zuordnungen zu Begriffsklassen treffen, den Begriff erklären bzw. die notwendigen Eigenschaften benennen, Oberbegriffe (z. B. Viereck) und Unterbegriffe (z. B. Rechteck) und deren Beziehung kennen sowie Figuren zeichnen.

Ohne ein grundlegendes Begriffsverständnis können im weiteren Lernprozess die Begriffe zu Objekten und Abbildungen nicht angemessen weiterentwickelt, genutzt und in Beziehung gebracht werden: Um über Rechtecke als spezielle Vierecke kommunizieren zu können, ist ein Verständnis für Vierecke notwendig.

Ausgabe:
Grundlage für die Ausgabe des Förderinhaltes sind die Bearbeitungen der 14 Items der Aufgabe „Figuren". Der Förderinhalt wird ausgegeben, wenn mehr als sieben Items falsch gelöst wurden.

Tabelle III.3-15: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes BE (Niveaustufe A)

Anzahl falsch:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10-14	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (BE)	1 %	4 %	8 %	12 %	14 %	16 %	14 %	12 %	5 %	5 %	9 %	3085
Bewertung	Unauffällig: 81 %								Auffällig: 19 %			

Ergänzende prozessorientierte Diagnose und Fördervorschläge

Tabelle III.3-16: Ergänzende prozessorientierte Diagnose (BE, Niveaustufe A)

Aufgabe	Beobachtungen
Auswahl von Objekten bzw. ein Objekt vorlegen: Wo siehst du … Dreiecke/Kreise/Vierecke? Warum ist es ein Dreieck, …? Warum ist das kein Dreieck, ...? Vorlegen nicht prototypischer Figuren: Ist das ein Dreieck? Warum – warum nicht?	▪ Werden die verschiedenen geometrischen Figuren erkannt und die Auswahl erklärt? ▪ Werden relevante Eigenschaften und Relationen zur Erklärung genutzt oder wird mit „dem Aussehen" argumentiert? ▪ Werden die Objekte auch erkannt, wenn sie nicht prototypisch sind/liegen?
Zeichne ein Dreieck (Viereck) – worauf achtest du? Zeichne noch ein anderes Dreieck (…).	▪ Wird die geforderte Figur gezeichnet? Werden nur prototypische Darstellungen gewählt? ▪ Werden relevante Eigenschaften und Relationen zur Erklärung genutzt oder wird mit „dem Aussehen" argumentiert?

Tabelle III.3-17: Fördervorschläge (BE, Niveaustufe A)

Ziel	Förderung
Abstrahieren von Eigenschaften	▪ Sortieren von Objekten, Beschreiben der Gemeinsamkeiten, nach denen die Sortierung vorgenommen wurde. Zunächst ohne Richtig und Falsch. ▪ Aussortieren („eins passt nicht – welches – warum?“) von Objekten ▪ Vergleichen – Vorlegen zweier Objekte (Gemeinsamkeiten und Unterschiede beschreiben) ▪ Sammeln und Dokumentieren der gewählten Begriffe ▪ Finden der Eigenschaften an Objekten des Alltags, z. B. Erkennen eines Vierecks bei Gegenständen im Klassenzimmer
Spezifizieren von Objekten	▪ Aus einer Menge verschiedener Objekte einige mit vorgegebenen Eigenschaften aussortieren (eckig, rund) bzw. mit vorgegebener Bezeichnung aussortieren (z. B. alle Vierecke) ▪ Wie kannst du prüfen, ob du ein (Viereck …) siehst?
Konstruieren von Objekten	▪ Kneten, Bauen, Legen, Falten, Zeichnen, Spannen von vorgegebenen Figuren auf dem Geobrett (auch nicht prototypische Darstellungen nutzen)

Literatur zum Weiterlesen:

Benz, C., Peter-Koop, A., & Grüßing, M. (2015). *Frühe mathematische Bildung: Mathematiklernen der Drei- bis Achtjährigen*. Heidelberg: Springer Spektrum, S. 185 ff.

Bönig, D., Hering, J., London, M., Nührenbörger, M., & Thöne, B. (2017). *Erzähl mal Mathe*. Seelze-Velber: Kallmeyer Friedrich, S. 111 ff.

Franke, M. & Reinhold. S. (2016). *Didaktik der Geometrie*. Heidelberg: Springer, S. 217.

Hasemann, K., & Gasteiger, H. (2014). *Anfangsunterricht Mathematik* (3., überarb. u. erw. Aufl.). Berlin: Springer Spektrum, S. 182 ff.

Kaufmann, S. (2010). *Handbuch für die frühe mathematische Bildung*. Braunschweig: Westermann, S. 101.

Lorenz, J. H. (2012). *Kinder begreifen Mathematik: Frühe mathematische Bildung und Förderung.* Stuttgart: Kohlhammer, S. 122 ff.

Sommerlatte, A., Lux, M., Meiering, G., & Führlich, S. (2007). *Beobachten – Dokumentieren – Fördern: Lerndokumentation Mathematik und Anregungsmaterialien Mathematik.* Berlin: Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung. Abgerufen von *http://i.bsbb.eu/1023* (Zugriff am 20.06.2021), S. 61.

3.7 RÄUMLICHE BEZIEHUNGEN MENTAL NACHVOLLZIEHEN (WV)

Erfahrungen mit dem Raum umfassen sowohl Erfahrungen mit der Räumlichkeit der Umwelt und der Räumlichkeit von Objekten als auch Erfahrungen mit den räumlichen Beziehungen von Objekten untereinander. Um eine räumliche Wahrnehmung und Vorstellung entwickeln zu können, muss zunächst eine intakte visuelle Wahrnehmung vorhanden sein. Nach Frostig (Büttner, Dacheneder, Schneider, & Weyer, 2008; Franke & Reinhold, 2016, S. 63) können verschiedene Teilkomponenten der visuellen Wahrnehmung unterschieden werden.

Dazu gehören:

- Die visuomotorischen Fähigkeiten: Fähigkeiten, das Sehen mit dem eignen Körper oder Teilen des Körpers zu koordinieren,
- die Figur-Grund-Unterscheidung: Fähigkeit aus einem komplexen Hintergrund Teilfiguren zu erkennen und zu isolieren,
- die Wahrnehmungskonstanz: Die Fähigkeit, Objekte in der Umgebung stabil wahrzunehmen, obwohl sie sich unseren Sinnesorganen unterschiedlich präsentieren,
- die Wahrnehmung räumlicher Beziehungen und der Lage im Raum: Die Fähigkeit Beziehungen zwischen Objekten und zwischen der eigenen Person und Objekten wahrzunehmen und zu beschreiben.

Diese Fähigkeiten zur visuellen und räumlichen Wahrnehmung sind die Voraussetzung für die räumliche Vorstellung. Räumliche Vorstellungen können nach Wollring (2011) beschrieben werden als die Fähigkeit, „räumliche Objekte verinnerlicht zu sehen, verinnerlicht zu bewegen, verinnerlicht zu zerlegen und zusammensetzen und verinnerlicht ausdehnen und komprimieren zu können".

Sowohl für den weiteren geometrischen Lernprozess als auch für den arithmetischen Lernprozess sind diese Fähigkeiten grundlegend, da sonst Anschauungen bezüglich geometrischer und auch arithmetischer Lerninhalte nicht zielführend gedeutet und genutzt werden können und somit der Erwerb der veranschaulichten Lerninhalte erschwert wird.

Ausgabe:
Relevant für die Ausgabe sind zehn Items aus den Aufgaben „Spielfiguren" (5 Items), „Auslegen" (2 Items) und „Unterschiede" (3 Items).

Tabelle III.3-18: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes WV (Niveaustufe A)

Anzahl falsch:	0	1	2	3	4	5	6	7	8-10	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (WV)	36 %	29 %	16 %	9 %	5 %	3 %	1 %	1 %	0 %	2942
Bewertung	Unauffällig: 81 %			Auffällig: 19 %						

Ergänzende prozessorientierte Diagnose und Fördervorschläge

Tabelle III.3-19: Ergänzende prozessorientierte Diagnose (WV, Niveaustufe A)

Aufgabe	Beobachtungen
Zeige in diesem Bild den Stern, den Baum, das Haus. Kannst du das Objekt nachfahren?	▪ Wird das Objekt zügig gefunden? ▪ Kann das Objekt mit dem Finger nachgefahren werden?
Wie hast du den Gegenstand gefunden?	▪ An welchen Merkmalen wird sich orientiert? ▪ Kann die Figur vom Hintergrund unterschieden werden?
Ein Bilderpaar mit deutlichen und versteckten Unterschieden wird vorgelegt: Welche Unterschiede siehst du? Wie gehst du vor?	▪ Wird probierend oder systematisch vorgegangen? ▪ An welchen Merkmalen orientiert sich die Schülerin / der Schüler? ▪ Welche Unterschiede (Größe/Farbe/Orientierung/ Auslassung) werden beschrieben, welche nicht?

Wo ist oben, unten, rechts, links?	▪ Kann aus der eigenen Perspektive die rechte/linke Hand gezeigt werden? ▪ Kann aus der eigenen Perspektive unten und oben bezeichnet werden? Kann auf einem Bild auch die rechte Figur / eine linke Figur erkannt werden?
Lagebeziehungen verwenden: Lege den blauen Stein auf (neben, …) den roten. Lege einen Stein zwischen …	▪ Werden die Präpositionen richtig interpretiert?
Lagebeziehungen von Gegenständen beschreiben lassen	▪ Auf Bildern beschreiben lassen: Wo ist das Auto?

Tabelle III.3-20: Fördervorschläge (WV, Niveaustufe A)

Ziel	Förderung
Eine Figur in einem Bild erfassen	▪ Finden von Objekten in einfachen oder mehrlagigen Bildern mit Hilfestellung: ▪ a) Vorgabe eines Bildes mit verschiedenen Objekten und passenden Einzelfolien mit jeweils einem Objekt aus dem Bild. Die Schülerin / der Schüler wird nun aufgefordert, ein Objekt / eine Figur in dem Bild zu finden. Falls dies misslingt, kann die Schülerin bzw. der Schüler auf die Einzelfolie mit dem gesuchten Objekt zurückgreifen und sie so lange auf dem Bild hin- und herschieben, bis das gesuchte Objekt gefunden ist. ▪ b) Ein Objekt in einem Bild nach Vorlage suchen und nachfahren lassen. Die Schülerin / der Schüler wird nun aufgefordert zu beschreiben, wie sie/er vorgegangen ist.
Bezeichnungen für Lagebeziehungen klären und sichern Räumliche Lage von Objekten unter Nutzung der Begriffe beschreiben	▪ Am eigenen Körper rechts, links, oben und unten klären ▪ Vorgabe eines Blattes mit 5 im Kreuz angeordneten Feldern. Ein Objekt steht in der Mitte des Kreuzes und dieses Objekt soll in das rechte Feld von der Mitte gelegt und dann zurückgelegt werden. Dann soll es in das linke Feld gelegt werden und so weiter. ▪ „In, neben, hinter, vor, rechts von, links von“ klären: Mithilfe einer Kiste und verschiedenfarbigen Spielfiguren die Schülerin / den Schüler auffordern, verschiedene Handlungsanweisungen (Stelle die rote Figur in die Kiste) durchzuführen. Danach soll beschrieben werden. ▪ Impulsfrage: Steht die rote Figur IN der Kiste? Zeige die Figur die RECHTS VON der Kiste steht? Wo steht die grüne Figur?
Vergleich zweier Objektanordnungen (real und auf Bildern)	▪ Zwei Arrangements von Objekten, die jeweils auf einer schachbrettähnlichen Unterlage stehen, sollen verglichen werden. Wo ist ein Unterschied? ▪ Mithilfe der Kästchen kann dann die Position der einzelnen Objekte abgeglichen werden. ▪ Wichtig ist, dass die Veränderungen in den einzelnen Situationen versprachlicht werden: „rechts/links/oben/unten“ sollen genutzt werden.

Beziehungen zwischen Objekten und Beziehungen zwischen der eigenen Person und Objekten wahrnehmen und beschreiben	▪ Arrangements von Objekten vorgeben – nachbauen – beschreiben lassen
	▪ (Würfelgebäude – auch mit verschieden farbigen Würfeln)
	▪ Bauwerke nach Beschreibung bauen
	▪ Kann auch in Partnerarbeit durchgeführt werden:
	  ▪ Schülerin/Schüler 1 baut, anschließend beschreibt sie/er sein Bauwerk. Schülerin/Schüler 2 baut nach dieser Beschreibung das Bauwerk nach. Zum Schluss wird verglichen.
	  ▪ Zwischen den beiden Schülerinnen/Schülern steht ein Sichtschutz.

Literatur zum Weiterlesen:

Benz, C., Peter-Koop, A., & Grüßing, M. (2015). *Frühe mathematische Bildung: Mathematiklernen der Drei- bis Achtjährigen*. Heidelberg: Springer Spektrum, S. 219 ff.

Blanchot, D., Gille-Naves, G., & Polouchine, I. (2009). *Dobble*. Essen: Asmodee.

Bönig, D., Hering, J., London, M., Nührenbörger, M., & Thöne, B. (2017). *Erzähl mal Mathe*. Seelze-Velber: Kallmeyer Friedrich, S. 111 ff.

Franke, M., & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule* (3. Aufl.). Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum, S. 87 ff.

Kaufmann, S. (2010). *Handbuch für die frühe mathematische Bildung.* Braunschweig: Westermann, S. 76 ff.

Lawson, A., & Lawson, J. (2004). *Make 'n' Break*. Ravensburg: Ravensburger.

Lorenz, J. H. (2012). *Kinder begreifen Mathematik: Frühe mathematische Bildung und Förderung.* Stuttgart: Kohlhammer, S. 113 ff.

Sommerlatte, A., Lux, M., Meiering, G., & Führlich, S. (2007). *Beobachten – Dokumentieren – Fördern: Lerndokumentation Mathematik und Anregungsmaterialien Mathematik*. Berlin: Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung. Abgerufen von *http://i.bsbb.eu/1023* (Zugriff am 20.06.2021), S. 5.

3.8 LITERATUR

Benz, C. (2010). *Minis entdecken Mathematik.* Braunschweig: Westermann.

Benz, C. (2015). Auf was man zählen kann: Wichtige Lernvoraussetzungen von Schulanfängern. *Mathematik Grundschule, 44 (1)*, 6-10.

Benz, C., Peter-Koop, A., & Grüßing, M. (2015). *Frühe mathematische Bildung: Mathematiklernen der Drei- bis Achtjährigen*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Benz, C. (2018). Den Blick schärfen: Grundlage für arithmetische Kompetenzen. In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Inhalte im Fokus: Mathematische Strategien entwickeln. Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2018: Mathematikdidaktik Grundschule* (S. 9-24). Bamberg.

Blanchot, D., Gille-Naves, G., & Polouchine, I. (2009). *Dobble*. Essen: Asmodee.

Bönig, D., Hering, J., London, M., Nührenbörger, M., & Thöne, B. (2017). *Erzähl mal Mathe*. Seelze-Velber: Kallmeyer Friedrich.

Büttner, G., Dacheneder, W., Schneider, W., & Weyer, K. (2008). *Frostigs Entwicklungstest der visuellen Wahrnehmung 2* (DTVP-2, 2. Aufl., Übers. von D. D. Hammill, N. A. Pearson & J. K. Voress, Developmental test of visual perception). Göttingen: Hogrefe.

Clarke, B., Clarke, D., Grüßing, M., & Peter-Koop, A. (2008). Mathematische Kompetenzen von Vorschulkindern: Ergebnisse eines Ländervergleichs zwischen Australien und Deutschland. *Journal für Mathematikdidaktik, 3/4*, 259-286.

Clements, D. H. (1984). Training effects on the development and generalization of Piagetian logical operations and knowledge of number. *Journal of Educational Psychology, 76 (5)*, 766-776. Abgerufen von *https://doi.org/10.1037/0022-0663.76.5.766* (Zugriff am 26.06.2021).

Franke, M., & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule: Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II*. (3. Aufl.). Berlin: Springer Spektrum.

Fuchs, M. (2015). *Alle Kinder sind Matheforscher. Frühkindliche Begabungsförderung in heterogenen Gruppen*. Seelze-Velber: Kallmeyer Friedrich.

Gasteiger, H. (2013). Womit muss man rechnen? Mathematische Kompetenzen zu Schulbeginn erkennen und weiterentwickeln. *Fördermagazin Grundschule, 4,* 7-11.

Glasersfeld, E. v. (1987): Wissen, Sprache und Wirklichkeit: Arbeiten zum radikalen Konstruktivismus. *Wissenschaftstheorie, Wissenschaft und Philosophie* (Bd. 24, 1. Aufl.). Braunschweig: Vieweg.

Hasemann, K., & Gasteiger, H. (2014). *Anfangsunterricht Mathematik: Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II* (3., überarb. u. erw. Aufl.). Berlin: Springer Spektrum. Abgerufen von *https://doi.org/10.1007/978-3-642-40774-1* (Zugriff am 26.06.2021).

Häsel-Weide, U., Nührenbörger, M., Moser Opitz, E., & Wittich, C. (2013). *Ablösung vom zählenden Rechnen: Fördereinheiten für heterogene Lerngruppen.* Seelze-Velber: Kallmeyer Friedrich.

Hauser, B., Rathgeb-Schnierer, E., Stebler, R., & Vogt, F. (Hrsg.). (2016). *Mehr ist mehr. Mathematische Frühförderung mit Regelspielen.* Seelze-Velber: Kallmeyer Friedrich.

Hess, K. (2012). *Kinder brauchen Strategien: Eine frühe Sicht auf mathematisches Verstehen.* Seelze-Velber: Kallmeyer Friedrich.

Kaufmann, S. (2010). *Handbuch für die frühe mathematische Bildung.* Braunschweig: Westermann.

Krauthausen, G. (2018). *Einführung in die Mathematikdidaktik: Grundschule: Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II* (4. Aufl.). Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum. Abgerufen von *https://doi.org/10.1007/978-3-662-54692-5* (Zugriff am 26.06.2021).

Lawson, A., & Lawson, J. (2004). *Make ‘n‘ Break.* Ravensburg: Ravensburger.

Lorenz, J. H. (2012). *Kinder begreifen Mathematik: Frühe mathematische Bildung und Förderung.* Stuttgart: Kohlhammer.

Maier, A., & Benz, C. (2014). Children’s constructions in the domain of geometric competencies (in two different instructional settings). In U. Kortenkamp, B. Brandt, C. Benz, G. Krummheuer, S. Ladel & R. Vogel (Hrsg.), *Early mathematics learning: Selected papers of the POEM Conference 2012* (S. 173-188). New York: Springer.

Nührenbörger, M., Schwarzkopf, R., & Tubach, D. (2016). *Mit Zahlen spielen.* Leipzig: Klett.

Müller, G. N, & Wittmann, E. Ch. (2002a). *Das kleine Zahlenbuch 1. Spielen und Zählen.* Seelze-Velber: Kallmeyer.

Müller, G. N., & Wittmann, E. Ch. (2002b). *Das kleine Zahlenbuch 2. Schauen und Zählen.* Seelze-Velber: Kallmeyer.

Müller, G. N., Wittmann, E. C., & Wolff, A. (2007). *Spielen und zählen* (Programm Mathe 2000, für 4- bis 7-jährige Kinder / von Gerhard N. Müller und Erich Ch. Wittmann. Gezeichnet von Andi Wolff, Bd. 1, 3. Aufl.). Seelze-Velber: Kallmeyer.

Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Braunschweig: Schroedel.

Shafir, H. (1991). *Halli Galli.* Dietzenbach: Amigo.

Sommerlatte, A., Lux, M., Meiering, G., & Führlich, S. (2007). *Beobachten – Dokumentieren – Fördern. Lerndokumentation Mathematik und Anregungsmaterialien Mathematik.* Berlin: Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung. Abgerufen von *http://i.bsbb.eu/1023* (Zugriff am 26.06.2021).

Stern, E. (2009). Früh übt sich: Neuere Ergebnisse aus der LOGIK-Studie zum Lösen mathematischer Textaufgaben. In A. Fritz, G. Ricken & S. Schmidt (Hrsg.), *Handbuch Rechenschwäche: Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie* (2. Aufl., S. 151-164). Weinheim: Beltz.

Wollring, B. (2011). Raum- und Formvorstellung. *Mathematik differenziert, 1,* 9-11.

4. TEILPAKET AB: BEZUG ZUM RAHMENLEHRPLAN UND AUFGABENAUSWAHL

Sebastian Wartha, Axel Schulz & Christiane Benz

Im ersten Schuljahr werden die zentralen Grundlagen für ein erfolgreiches Lernen arithmetischer Inhalte gelegt. Diese Grundlagen sind der Aufbau von Grundvorstellungen zu Zahlen (als Mengenangabe) sowie zu den Operationen Addition (als Hinzufügen und Zusammenfassen) und Subtraktion (als Wegnehmen und Unterschiedsbestimmung). Außerdem sollen zumindest im Zahlenraum bis 10 Zählprozesse durch Strukturnutzung beim Anzahlbestimmen und beim Rechnen überwunden werden. Schließlich sollen alle Zahlen im Zahlenraum bis 10 automatisiert zerlegt werden können – in Form von Zahlzerlegungen sowie bei Plus- und Minusaufgaben.

Sind diese Kompetenzen nicht aufgebaut, so sind bereits im zweiten Schuljahr durch die Erweiterung des Zahlenraums große Schwierigkeiten zu erwarten. Auch wenn Lernende über Zählstrategien im Zahlenraum bis 100 noch richtige Ergebnisse ermitteln können, so verhindert die mangelhafte Strukturnutzung den Aufbau von tragfähigen Grundvorstellungen zu Zahlen und den Grundrechenarten sowie den Erwerb operativer Rechenstrategien (vgl. Tabelle III.4-1).

Aus diesem Grund werden beim Teilpaket AB ausgewählte Inhalte des Rahmenlehrplans untersucht, die für ein Weiterlernen unverzichtbar sind:

Tabelle III.4-1: Ausgewählte Inhalte für den Zahlenraum bis 20

Rahmenlehrplan	Umgesetzt bei AB	Informationen zu Aufgaben und Items
Zahlen auffassen und darstellen ▪ Auffassen und Darstellen von Zahlen als strukturierte Mengen, als Bild, als Wort und mit Ziffern ▪ Übersetzen zwischen den Darstellungen natürlicher Zahlen bis 20 ▪ Bündeln und Entbündeln von Mengen bis 20	An Zehnersystem-Materialien werden Zahlen (ZR 20) dargestellt. Die Zahl soll eingegeben werden.	Aufgabe „Zahlauffassung“ (Niveaustufe B 111) 2 Items vgl. Teil III, Kap. 6.1
	Eine Zahl (ZR 20) wird symbolisch vorgegeben. Durch Klicken auf Zehnerstangen und Einerwürfel soll die Zahl mit Zehnersystem-Material dargestellt werden.	Aufgabe „Mengen klicken“ (Niveaustufe B 121) 2 Items vgl. Teil III, Kap. 6.1
	Eine strukturierte Menge (ZR 20) wird nur für sehr kurze Zeit gezeigt. Die Anzahl der Menge soll eingegeben werden.	Aufgabe „Schnelles Sehen“ (Niveaustufe B 112) 4 Items vgl. Teil III, Kap. 6.1

Zahlen ordnen ▪ Vergleichen und Ordnen von natürlichen Zahlen bis 20	Zwei Zahlen (ZR 20) werden mit Zehnersystem-Material gezeigt. Es soll das passende Symbol <, = oder > ausgewählt werden.	Aufgabe „Anzahlvergleich“ (Niveaustufe B 221) 3 Items vgl. Teil III, Kap. 6.2
	Zwei Zahlen (ZR 20) werden akustisch ausgegeben. Die größere soll eingegeben werden.	Aufgabe „Zahlvergleich“ (Niveaustufe B 222) 2 Items vgl. Teil III, Kap. 6.2
Zahlbeziehungen beschreiben Automatisieren der additiven Zahlzerlegungen bis 10 sowie der Ergänzung bis 10	Die Zerlegungen zur 10 und 8 werden abgefragt, indem eine Zahl vorgegeben wird und die Ergänzung eingegeben werden soll.	Aufgabe „Zahlzerlegungen“ (Niveaustufe B 311) 7 + 5 Items vgl. Teil III, Kap. 6.3
Operationsvorstellungen entwickeln ▪ Entwickeln von Vorstellungen zu den Grundrechenoperationen in statischen und dynamischen Situationen, zur Addition (Hinzufügen, Vereinigen) und zur Subtraktion (Wegnehmen, Unterschied) Wechseln zwischen Rechengeschichte, Handlung, Notation und Bild zu den Grundrechenoperationen im ZR 20	Statische und dynamische Situationen in additiven und subtraktiven Kontexten im ZR 10 werden schriftlich vorgegeben und vorgelesen. Teilweise sind die Zahlen als Menge dargestellt. Das Ergebnis der Kontextaufgabe soll eingegeben werden. Eine Übersetzung in einen Additions- oder Subtraktionsterm ist nicht nötig.	Aufgabe „Kontextaufgaben“ (Niveaustufe A 411) 10 Items vgl. Teil III, Kap. 2.4
Rechenstrategien anwenden Flexibles und automatisierte Lösen der Aufgaben des „kleinen 1 ± 1“ (ZR 20)	Additions- und Subtraktionsaufgaben im ZR 10 werden gestellt und das Ergebnis soll rasch angeklickt werden.	Aufgabe „Einsplusminuseins“ (Niveaustufe B 511) 8 Items vgl. Teil III, Kap. 6.5

5. TEILPAKET AB: FÖRDERINHALTE AUS DEN AUSWERTUNGEN

Sebastian Wartha, Sophia Bayer

5.1 ZAHLZERLEGUNGEN SOWIE ADDITION UND SUBTRAKTION IM ZR 10 AUTOMATISIEREN (ZZ)

Ein automatisiertes, müheloses Abrufen aller Zahlzerlegungen sowie Plus- und Minusaufgaben im Zahlenraum bis 10 ist die Grundlage und Voraussetzung für die Überwindung von Zählprozessen und den Aufbau von operativen Additions- und Subtraktionsstrategien (Häsel-Weide, 2016).

Besonders große und lang anhaltende Schwierigkeiten beim Rechnenlernen (auch umschrieben mit den Begriffen „Rechenstörungen“, „Dyskalkulie“) sowie eingeschränkte Zahlvorstellungen auch in großen Zahlenräumen lassen sich auf ein mangelhaftes Beherrschen des Zahlenraums bis 10 zurückführen (Gaidoschik, 2010; Schipper, 2009).

Ausgabe:
Grundlage sind alle Aufgaben zu den Zahlzerlegungen der 10 und der 8 sowie die Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 10. Bei diesen 20 Items werden die Eingaben sowohl auf Korrektheit als auch auf die Geschwindigkeit überprüft. Wenn mehr als fünf Items falsch oder mehr als sechs Items besonders langsam bearbeitet wurden, wird der Förderinhalt ausgegeben. „Besonders langsam“ ist eine Bearbeitung, wenn sie langsamer als das langsamste Fünftel der Normierungsstichprobe ist.

Tabelle III.5-1: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes ZZ (Niveaustufe AB)

Anzahl falsch:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10-20	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (ZZ)	27 %	22 %	14 %	9 %	6 %	4 %	3 %	3 %	2 %	1 %	9 %	3003
Bewertung	Unauffällig: 79 %						Auffällig: 21 %					

Sehr langsam:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10-20	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (ZZ)	20 %	16 %	12 %	9 %	8 %	7 %	5 %	4 %	3 %	3 %	13 %	3003
Bewertung	Unauffällig: 77 %							Auffällig: 23 %				

Der Förderinhalt wird in 35 Prozent der Normierungsstichprobe (N = 3003) ausgegeben.

Für eine weitere prozessorientierte Diagnose, für Förder- sowie Literaturvorschläge wird auf den Förderinhalt ZZ (Zahlzerlegungen und Addition und Subtraktion im ZR 10 automatisieren) auf Niveaustufe B (Teil III, Kap. 7.1) verwiesen.

5.2 GRUNDVORSTELLUNGEN ZU RECHENOPERATIONEN AUFBAUEN (GV)

Grundvorstellungen zu Rechenoperationen (Fromme, Wartha, & Benz, 2011; Schipper, 2009) ermöglichen eine inhaltliche Deutung der Operationszeichen – beispielsweise in Rechengeschichten oder Alltagssituationen. Die Bearbeitung von Textaufgaben über Rechenterme gelingt höchstens dann, wenn Grundvorstellungen aktiviert werden können, wenn also die Bedeutung der Operationszeichen genutzt werden kann.

Grundvorstellungen zu den Rechensymbolen (hier: plus und minus) können daher nur aufgebaut werden, wenn Situationskontexte verstanden worden sind: Wie kann eine Situation des Hinzufügens oder des Unterschiebestimmens bearbeitet werden? Erst wenn verstanden ist, wie die Situationen innerhalb des Kontextes bearbeitet werden können, ist eine umfassende Thematisierung der Bedeutung von Operationszeichen möglich.

Können keine Grundvorstellungen aktiviert werden, so können Textaufgaben nicht auf der Verständnisgrundlage gelöst werden. Stattdessen orientieren sich Lernende häufig an Oberflächenmerkmalen der Aufgaben wie sogenannten Signalwörtern („mehr bedeutet immer dazumachen") oder den in der Aufgabe vorkommenden Zahlen (Franke & Ruwisch, 2010).

Ausgabe:
Grundlage für die Ausgabe des Förderinhaltes sind dynamische und statische Situationen in additiven und subtraktiven Kontexten (vgl. ***ILeA plus*** Niveaustufe A, Teil III, Kap. 3.4). Die Zahlen der Aufgabenstellungen werden teilweise im Bild dargestellt, sodass bei einigen Aufgaben auch eine Bestimmung der Lösung im Bild mit konkreten Repräsentanten möglich ist. Die Übersetzung in einen Rechenausdruck ist nicht gefordert.

Der Förderinhalt wird ausgegeben, wenn mehr als fünf der elf Items falsch gelöst wurden.

Tabelle III.5-2: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes GV (Niveaustufe AB)

Anzahl falsch:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10-11	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (GV)	0 %	10 %	17 %	19 %	18 %	14 %	9 %	5 %	3 %	2 %	3 %	2950
Bewertung	Unauffällig: 78 %						Auffällig: 22 %					

Für eine weitere prozessorientierte Diagnose, für Fördervorschläge sowie Literaturvorschläge wird auf den Förderinhalt GV (Grundvorstellungen zu Rechenoperationen aufbauen) auf Niveaustufe B (Teil III, Kap. 7.7) verwiesen.

5.3 ÜBERWINDEN FEHLERHAFTER ZÄHLENDER VORGEHENSWEISEN (ZF)

Auch wenn Zählprozesse am Schulanfang noch erwartungskonform sind, so sind diese spätestens im ersten Drittel der Jahrgangsstufe 2 zu überwinden und Strukturen zu nutzen. Zählen be- bzw. verhindert das Nutzen von Strukturen (z. B. Dezimalsystem) und damit den Aufbau von tragfähigen Zahlvorstellungen und Rechenstrategien (Gaidoschik, 2010). Fehlerhafte Zählstrategien zeigen sich insbesondere durch Fehler um plus/minus 1 und weisen darauf hin, dass auch das Zählen nicht sicher beherrscht wird. Dies erschwert den Aufbau der nötigen Kompetenzen zur Überwindung des Zählens (Memorieren der Zahlzerlegungen) zusätzlich (Häsel-Weide, Nührenbörger, Moser Opitz, & Wittich, 2013).

Ausgabe:
Zur Ausgabe des Förderinhaltes werden Zählfehler um plus/minus 1 über den Gesamttest ausgewertet. Hierbei werden nicht nur Zahlzerlegungen und weitere Rechenaufgaben analysiert, sondern auch Aufgaben zur Zahldarstellung und -auffassung.

Der Förderinhalt wird ausgegeben, wenn mehr als vier Zählfehler festgestellt werden.

Tabelle III.5-3: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes ZF (Niveaustufe AB)

Anzahl falsch:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10-12	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (ZF)	13 %	23 %	24 %	17 %	10 %	7 %	3 %	2 %	1 %	0 %	0 %	3162
Bewertung	Unauffällig: 77 %						Auffällig: 23 %					

Für eine weitere prozessorientierte Diagnose, für Förder- sowie Literaturvorschläge wird auf den Förderinhalt ZF (Überwinden fehlerhafter zählender Vorgehensweisen) auf Niveaustufe B (Teil III, Kap. 7.5) verwiesen.

5.4 LITERATUR

Franke, M., & Ruwisch, S. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule: Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II.* (2. Aufl.). Heidelberg: Spektrum.

Fromme, M., Wartha, S., & Benz, C. (2011). Grundvorstellungen zur Subtraktion. *Grundschulmagazin, 4*, 35-40.

Gaidoschik, M. (2010). *Wie Kinder rechnen lernen – oder auch nicht: Eine empirische Studie zur Entwicklung von Rechenstrategien im ersten Schuljahr*. Frankfurt am Main: Lang.

Häsel-Weide, U., Nührenbörger, M., Moser Opitz, E., & Wittich, C. (2013). *Ablösung vom zählenden Rechnen: Fördereinheiten für heterogene Lerngruppen*. Seelze-Velber: Klett Kallmeyer Friedrich.

Häsel-Weide, U. (2016). Vom Zählen zum Rechnen: Struktur-fokussierende Deutungen in kooperativen Lernumgebungen. *Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts* (Bd. 21). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Braunschweig: Schroedel.

6. NIVEAUSTUFE B: BEZUG ZUM RAHMENLEHRPLAN UND AUFGABENAUSWAHL

Sebastian Wartha, Axel Schulz & Christiane Benz

6.1 ZAHLEN AUFFASSEN UND DARSTELLEN

RLP	**B Zahlen auffassen und darstellen** ▪ Schreiben von Ziffern ▪ **Auffassen und Darstellen von natürlichen Zahlen bis 100 [ggf. bis 20] als strukturierte Menge, als Bild, als Wort und mit Ziffern** ▪ **Wechsel zwischen den Zahldarstellungen natürlicher Zahlen bis 100 [ggf. bis 20]** ▪ **Bündeln und Entbündeln von Mengen bis 100 [ggf. bis 20]** ▪ **Erkennen von Stellenwerten und Verwenden des Zehnersystems** ▪ Schätzen von Anzahlen bis 100 [ggf. bis 20]

Die Inhalte „Auffassen und Darstellen“ sowie die Wechsel zwischen den Darstellungen von Zahlen bis 100 können durch folgende Übersetzungen (vgl. Tabelle III.6-1) zwischen Zahlwort, Zahlsymbol und Mengendarstellung am strukturierten Arbeitsmittel untersucht werden (Wartha & Schulz, 2012).

Tabelle III.6-1: Übersetzungen zwischen Mengendarstellung, Zahlwort, Zahlsymbol im ZR bis 100

Übersetzung	Umsetzung	Untersuchung bei *ILeA plus*
Menge → Zahlsymbol	Am Material dargestellte Zahl wird eingegeben.	Aufgabe „Zahlauffassung“ (111) Aufgabe „Schnelles Sehen“ (112)
Menge → Zahlwort	Am Material dargestellte Zahl wird gesagt.	Wird nicht untersucht.
Zahlwort → Menge	Diktierte Zahl wird am Material dargestellt.	Wird nicht untersucht.
Zahlwort → Zahlsymbol	Diktierte Zahl wird eingegeben.	Aufgabe „Zahlvergleich“ (222)
Zahlsymbol → Menge	Geschriebene Zahl wird am Material dargestellt.	Aufgabe „Mengen klicken“ (121)
Zahlsymbol → Zahlwort	Geschriebene Zahl wird vorgelesen.	Wird nicht untersucht.

Bei der Aufgabe „Zahlauffassung“ (5 Items) werden Zahlen mit Zehnersystemmaterial dargestellt und die Zahl soll eingegeben werden. Bei zwei Items werden auch nichtkanonische Darstellungen (z. B. 2 Zehner und 14 Einer) gezeigt. Bei diesen Darstellungen muss zur Notation der Zahl zunächst gebündelt werden. Das Bündeln und Entbündeln ist eine zentrale Kompetenz in Bezug auf das Anwenden des Stellenwertverständnisses (Fromme, 2016; Schulz, 2014).

Tabelle III.6-2: Aufgabenbeispiel „Zahlauffassung“ (Niveaustufe B)

Ma_B_ZO_111_E Zahlauffassung	Offene Eingabe	Interpretation
 Abbildung III.6-1	16	16 Objekte (ohne Stellenwerte)
	24	Zehner werden als Fünfer interpretiert (2 Zehner, 2 Fünfer, 4 Einer).
	34	**korrekt**
	43	Zahlendreher
	44	Fünfer werden als Zehner interpretiert (2 Zehner, 2 Fünfer, 4 Einer).
	214	2 Zehner und 14 Einer werden als 214 geschrieben.
	andere	falsch

Bei der Aufgabe „Mengen klicken“ (5 Items) wird eine Zahl als Symbol vorgegeben und soll durch das Klicken auf einen Button mit Zehnerstangen-Symbol bzw. einen Button mit Einerwürfel-Symbol dargestellt werden. Hierbei kann z. B. die Zahl 12 entweder durch zwölf Einerwürfel oder durch eine Zehnerstange und zwei Einerwürfel dargestellt werden.

Tabelle III.6-3: Aufgabenbeispiel „Mengen klicken“ (Niveaustufe B)

Ma_B_ZO_121_E Mengen klicken	Offene Eingabe	Interpretation
 Abbildung III.6-2	**4 Z 5 E (45)**	**korrekt**
	5 Z 4 E (54)	Zahlendreher
	andere	falsch

Die quasisimultane (nichtzählende) Zahlauffassung ist eine unverzichtbare Kompetenz, um Zählprozesse zu überwinden und Strukturen zu nutzen (Benz, Peter-Koop, & Grüßing, 2015). Hierzu werden bei der Aufgabe „Schnelles Sehen“ (8 Items) Bilder von Mengendarstellungen am strukturierten Arbeitsmittel für 0,3 Sekunden gezeigt und die Anzahl der Perlen soll eingegeben werden. Der gezeigte Rechenrahmen ist so strukturiert, dass Zehner als ganze Reihen wahrgenommen werden können und nach fünf Perlen in jeder Reihe ein Farbwechsel zu sehen ist (Krauthausen, 2018). Die ersten fünf Reihen bestehen aus fünf roten, dann fünf blauen Perlen. Nach der fünften Reihe (50) sind zunächst fünf blaue und dann fünf rote Perlen in der Reihe. Dieser Farbwechsel ist nötig, um mehr als fünf Zehner ebenfalls über nicht zählende und strukturnutzende Prozesse schnell auffassen zu können.

Tabelle III.6-4: Aufgabenbeispiel „Schnelles Sehen“ (Niveaustufe B)

<table>
<tr><th>Ma_B_ZO_112_G Schnelles Sehen</th><th>Offene Eingabe</th><th>Interpretation</th></tr>
<tr><td rowspan="8">Rechenrahmen wird für 0,3 Sekunden gezeigt.


Abbildung III.6-3</td><td>25</td><td>Zahlendreher</td></tr>
<tr><td>42</td><td>Zählfehler um -10</td></tr>
<tr><td>51</td><td>Zählfehler um -1</td></tr>
<tr><td>52</td><td>korrekt</td></tr>
<tr><td>53</td><td>Zählfehler um +1</td></tr>
<tr><td>62</td><td>Struktur des Arbeitsmittels nicht verstanden: 2 Perlen in der 6. Reihe werden als 62 interpretiert).</td></tr>
<tr><td>andere</td><td>falsch</td></tr>
</table>

Bei der Aufgabe „Zahlvergleich“ (5 Items) sollen zwei mündlich diktierte Zahlen verglichen und anschließend die größere bzw. kleinere Zahl eingetippt werden.

Tabelle III.6-5: Aufgabenbeispiel „Zahlvergleich“ (Niveaustufe B)

<table>
<tr><th>Ma_B_ZO_222_C Zahlvergleich</th><th>Offene Eingabe</th><th>Interpretation</th></tr>
<tr><td rowspan="5">„Fünfundvierzig oder dreiundsechzig“ wird angesagt.


Abbildung III.6-4</td><td>63</td><td>Größerrelation und Zahleingabe korrekt</td></tr>
<tr><td>36</td><td>Größerrelation korrekt, Zahlen-dreher</td></tr>
<tr><td>45</td><td>Größerrelation falsch, Zahleingabe korrekt</td></tr>
<tr><td>54</td><td>Größerrelation und Zahleingabe falsch</td></tr>
<tr><td>andere</td><td>falsch</td></tr>
</table>

Die Untersuchung, ob diktierte Zahlen richtig eingetippt werden können, wird in dieser Aufgabe erfasst, ohne die korrekte Anwendung der Größerrelation dabei zu bewerten. In Bezug auf die Zahlschreibweise würden demnach die Antworten 63 und 45 als korrekt gewertet werden.

6.2 ZAHLEN ORDNEN

RLP	**B Zahlen ordnen**
	▪ Zählen bis 100 [ggf. bis 20] in verschiedenen Schritten vorwärts und rückwärts ▪ **Vergleichen und Ordnen von natürlichen Zahlen bis 100 [ggf. bis 20] stellenweise sowie am Zahlenstrahl und Zahlenstrich (auch mit Relationszeichen)** ▪ **Angeben von Vorgänger, Nachfolger und Nachbarzehnern**

In ***ILeA plus*** für die Niveaustufe B wird das Zählen nicht überprüft. Allerdings können fehlerhafte zählende Vorgehensweisen beim Rechnen Hinweise darauf geben, dass das Zählen noch problematisch ist. Fehlerhafte zählende Vorgehensweisen fallen durch Fehler um +1 und -1 auf und werden bei den Rechenaufgaben und den Zahlzerlegungen erfasst.

Das Vergleichen und Ordnen von Zahlen bis 20 und bis 100 wird bei zwei Aufgaben geprüft.

Bei der Aufgabe „Anzahlvergleich“ (5 Items) werden zwei Zahlen mit Zehnersystemblöcken dargestellt und die Schülerin bzw. der Schüler soll entscheiden, welches Relationszeichen passt: <, =, >. Hierbei werden auch nichtkanonische Zahldarstellungen präsentiert. Nichtkanonisch gebündelt ist eine Zahl, bei der mehr als zehn Repräsentanten eines Stellenwertes vorhanden sind und zur Zahlangabe zunächst gebündelt werden muss (3 Zehner und 14 Einer = 44). Der Zusammenhang 10 Einer(würfel) = 1 Zehner(stange) ist die Grundlage für das Verständnis des Arbeitsmittels und den Aufbau unseres Stellenwertsystems (Schulz, 2014; van de Walle & Lovin, 2006).

Tabelle III.6-6: Aufgabenbeispiel „Anzahlvergleich“ (Niveaustufe B)

Ma_B_ZO_221_D Anzahlvergleich	Auswahl	Interpretation
 Abbildung III.6-5	<	**korrekt**
	>	Falsche Annahme: Links liegen sieben und rechts liegen sechs Objekte. Dennoch liegt links die kleinere Zahl, wenn die Stellenwerte berücksichtigt werden.
	=	falsch
	?	Die Aufgabe wird nicht verstanden.

Bei der Aufgabe „Zahlvergleich“ (5 Items) werden mündlich zwei Zahlen diktiert und die größere Zahl soll eingegeben werden. Hier werden zwei Kompetenzen untersucht: Einerseits das korrekte Zuordnen der Stellenwerte im Zahlwort (Übersetzen Zahlwort – geschriebenes Zahlsymbol) und andererseits die Entscheidung über die größere Zahl.

Tabelle III.6-7: Aufgabenbeispiel „Zahlvergleich“ (Niveaustufe B)

Ma_B_ZO_222_C Zahlvergleich	Offene Eingabe	Interpretation
 Abbildung III.6-6	36	**Größerrelation korrekt**, Zahlendreher
	45	Größerrelation falsch, **Zahleingabe korrekt**
	54	Größerrelation falsch und Zahlendreher
	63	**Größerrelation korrekt und Zahleingabe korrekt**
	andere	falsch

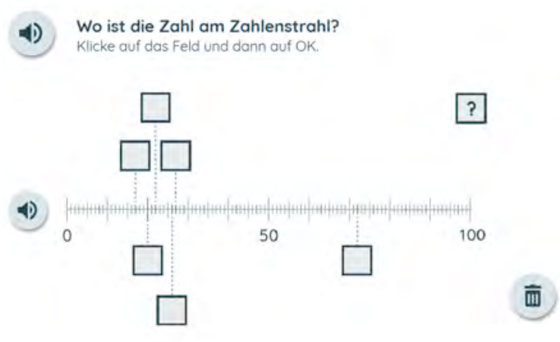
Das Ordnen von natürlichen Zahlen am Zahlenstrahl wird mit zwei Aufgaben (je 3 Items) untersucht, bei denen Zahlen am Zahlenstrahl dargestellt und aufgefasst werden sollen. Bei der Aufgabe „Zahlauffassung am Zahlenstrahl“ markiert ein Pfeil eine Position am Zahlenstrahl und es werden verschiedene Auswahlantworten vorgegeben. Die richtige soll ausgewählt werden. Als Auswahlantworten werden Zahlen angeboten, denen typische Fehlerstrategien zugrunde liegen.

Tabelle III.6-8: Aufgabenbeispiel „Zahlauffassung am Zahlenstrahl“ (Niveaustufe B)

Ma_B_ZO_223_A **Zahlauffassung am Zahlenstrahl**	**Auswahl**	**Interpretation**
 Abbildung III.6-7	37	sieben Striche zwischen Markierung und 30
	38	**korrekt**
	39	neunter Strich bei 30er-Zahlen
	47	siebter Strich im vierten Zehner
	48	acht Einer im vierten Zehner
	83	Zahlendreher
	?	Die Aufgabe wird nicht verstanden.

Bei der Aufgabe „Zahldarstellung am Zahlenstrahl“ wird eine Zahl mündlich diktiert. An einem Zahlenstrahl sind sechs Positionen markiert und die richtige soll ausgewählt werden. Auch hier sind die falschen Auswahlantworten so konstruiert, dass sie typische Fehler (Zahlendreher, aber auch falsche Interpretationen der Struktur des Arbeitsmittels) erkennen lassen.

Tabelle III.6-9: Aufgabenbeispiel „Zahldarstellung am Zahlenstrahl“ (Niveaustufe B)

Ma_B_ZO_224_B **Zahldarstellung am Zahlenstrahl**	**Auswahl**	**Interpretation**
„Siebenundzwanzig“ wird angesagt.  Abbildung III.6-8	17	sieben Einer im zweiten Zehner
	20	teilweise bearbeitet
	22	Der Zehnerstrich wird als Fünfer gedeutet.
	26	Der Strich bei 20 wird als erster Einer mitgezählt.
	27	**korrekt**
	72	Zahlendreher
	?	Die Aufgabe wird nicht verstanden.

Das Angeben von Nachbareinern und -zehnern wird durch die Aufgaben „Nachbarzahlen“ (6 Doppeleingaben) und „Nachbarzehner“ (2 Doppeleingaben) untersucht. Es wurde bewusst auf die missverständlichen Begriffe „Vorgänger und Nachfolger“ verzichtet. Bei beiden Aufgaben wird mündlich eine Zahl diktiert und die Schülerin bzw. der Schüler soll über zwei Eingabefelder den (Einer- oder Zehner-)Nachbarn davor und danach eintippen.

Tabelle III.6-10: Aufgabenbeispiel „Nachbarzahlen ‚davor‘“ (Niveaustufe B)

Ma_B_ZO_231-1_D Nachbarzahlen „davor“	Offene Eingabe	Interpretation
„Siebenundachtzig“ wird angesagt.	68	Zahlendreher beim Eingeben
	77	Zahlendreher beim Hören
	79	Verwechslung „davor“ und „danach“ + Zahlendreher
	86	**korrekt**
	88	Verwechslung „davor“ und „danach“
Abbildung III.6-9	andere	falsch

Tabelle III.6-11: Aufgabenbeispiel „Nachbarzehner ‚davor‘“ (Niveaustufe B)

Ma_B_ZO_231-2_A Nachbarzehner „davor“	Offene Eingabe	Interpretation
„Vierundsiebzig“ wird angesagt.	07	Zahlendreher beim Eingeben
	40	Zahlendreher beim Hören
	64	Aufgabenstellung (– 10 statt Nachbar)
	70	**korrekt**
	80	Verwechslung „davor“ und „danach“
	andere	falsch
Abbildung III.6-10	?	Aufgabe wird nicht verstanden.

Auch bei dieser Aufgabe werden nicht nur ordinale Zahlvorstellungen untersucht, sondern beispielsweise Zahlendreher beim Eintippen oder Hören der Zahlen registriert und ausgewertet.

6.3 ZAHLBEZIEHUNGEN BESCHREIBEN

<table>
<tr><td>RLP</td><td>B Zahlbeziehungen beschreiben
▪ Automatisieren der additiven Zahlzerlegungen bis 10 sowie der Ergänzung bis 10
▪ additives Zerlegen von natürlichen Zahlen bis 100 [ggf. bis 20]
▪ Finden und Beschreiben von Gemeinsamkeiten und Unterschieden zwischen gegebenen Zahlen
▪ Unterscheiden von geraden und ungeraden Zahlen</td></tr>
</table>

Das automatisierte Abrufen der Zahlzerlegungen ist unverzichtbar für den Erwerb operativer Strategien bei der Addition und Subtraktion (Schipper, 2009). Große und lang anhaltende Schwierigkeiten beim Rechnenlernen (häufig umschrieben mit Begriffen wie „Rechenstörungen“ oder „Dyskalkulie“) auch im großen Zahlenraum sind häufig darauf zurückzuführen, dass die Zerlegungen der Zahlen bis 10 nicht automatisiert und mühelos abrufbar sind (Kaufmann & Wessolowski, 2006; Schipper, 2009).

Bei ***ILeA plus*** werden die Zerlegungen der Zahlen 10 (7 Items) und 8 (5 Items) geprüft – stellvertretend für die genauso wichtigen Zerlegungen der 6, 7 und 9.

Gerade bei den Zahlzerlegungen ist es wichtig, dass sie nicht zählend bearbeitet, sondern „schnell“ abgerufen werden können (Gray, 1991). Daher werden die Aufgaben nicht nur dahingehend ausgewertet, ob die Eingabe richtig ist, sondern auch die Zeit wird analysiert. Ist die Bearbeitungszeit besonders langsam (Zeitbedarf wie die 20 Prozent langsamsten Bearbeitenden der Normierungsstichprobe), so liegt der Schluss nahe, dass die Zerlegung nicht automatisiert ist – und beispielsweise zählend bestimmt wird. Um die Zeitmessung nicht zu verfälschen, muss die Eingabe nicht mit „OK“ quittiert werden. Nach dem Klicken auf das passende Feld wird sofort das nächste Item präsentiert.

Tabelle III.6-12: Aufgabenbeispiel „Zahlzerlegung“ (Niveaustufe B)

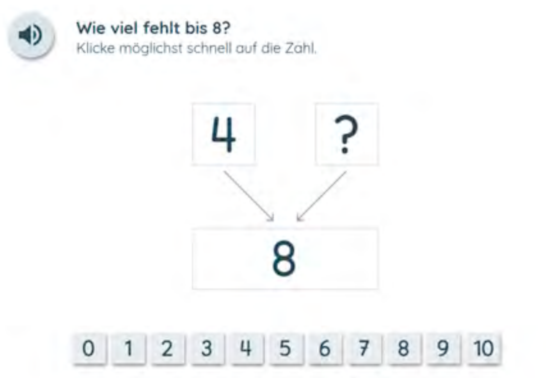
<table>
<tr><th>Ma_B_ZO_311-2_E Zahlzerlegung</th><th>Auswahl</th><th>Interpretation</th></tr>
<tr><td rowspan="5">

Abbildung III.6-11</td><td>4</td><td>korrekt</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Zählfehler</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Zählfehler</td></tr>
<tr><td>andere</td><td>falsch</td></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Wenn die Bearbeitungszeit länger als 9,4 Sekunden dauert, so wird die Aufgabe als „besonders langsam“ gelöst bewertet. Als „besonders langsam“ wurden die Zeiten der 20 % langsamsten Bearbeitungen der Normierungsstichprobe gewertet.
▪ Dies kann ein Hinweis auf Zählstrategien sein, auch wenn die Aufgabe richtig gelöst wurde.</td></tr>
</table>

Das additive Zerlegen der Zahlen bis 100 ist über Additions- und Subtraktionsaufgaben umgesetzt worden, die in Teil III, Kap. 6.5 dargestellt werden.

Bei der Untersuchung von Zahleigenschaften spielt vor allem die Teilbarkeit durch Zwei eine zentrale Rolle. Bei der Aufgabe „Teilbarkeit“ (8 Items) soll ausgewählt werden, ob eine symbolisch präsentierte Zahl gerade oder ungerade ist.

Tabelle III.6-13: Aufgabenbeispiel „Teilbarkeit“ (Niveaustufe B)

Ma_B_ZO_331_E Teilbarkeit	Auswahl	Interpretation
 Abbildung III.6-12	**gerade**	**korrekt**
	ungerade	Falsche Annahme: Die Anzahl der Zehner ist ungerade, also ist die Zahl ungerade.
	?	Die Aufgabe wird nicht verstanden.

6.4 OPERATIONSVORSTELLUNGEN ENTWICKELN

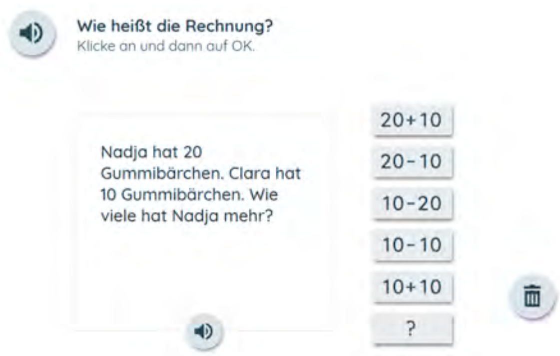
RLP

B Operationsvorstellungen entwickeln

- **Entwickeln von Vorstellungen zu den Grundrechenoperationen in dynamischen und statischen Situationen:**
  - **zur Addition (Hinzufügen, Vereinigen)**
  - **zur Subtraktion (Wegnehmen, Unterschied)**
  - **zur Multiplikation (wiederholtes Hinzufügen gleicher Anzahlen, Erfassen multiplikativer Strukturen)**
  - **zur Division (Aufteilen, Verteilen)**
- **Wechseln zwischen Rechengeschichte, Notation, Handlung und Bild zu den Grundrechenoperationen im Zahlenraum der natürlichen Zahlen bis 100 [ggf. bis 20] Beschreiben von Zusammenhängen zwischen den vier Grundrechenoperationen im Zahlenraum der natürlichen Zahlen bis 100 [ggf. bis 20] (z. B. Umkehroperationen)**

Die Untersuchung der Grundvorstellungen zu den Rechenoperationen (Carpenter & Moser, 1984; Riley, Greeno, & Heller, 1983; Schipper, 2009, S. 100) erfolgt über die Aufgabe „Textaufgaben“ (9 Items). Zentral ist hierbei, dass nicht gerechnet werden soll, sondern Operationsvorstellungen unabhängig von Rechenfertigkeiten untersucht werden. Daher soll bei der Aufgabe „nur“ ausgewählt werden, mit welchem Rechenausdruck das Ergebnis korrekt bestimmt werden kann. Das Ergebnis selbst soll nicht berechnet werden.

Tabelle III.6-14: Aufgabenbeispiel „Textaufgabe“ (Niveaustufe B)

Ma_B_ZO_411_F Textaufgabe	Auswahl	Interpretation
 Abbildung III.6-13	20 + 10	Das Signalwort „mehr“ steht immer für Addition.
	20 – 10	**korrekt**
	10 – 20	Differenzbildung ungeachtet der Richtung
	10 – 10	Differenzbildung ausgehend vom falschen Minuenden
	10 + 10	10 plus wie viel ist 20?
	?	Die Aufgabe wird nicht verstanden.

Alle Zahlen sind so gewählt, dass alle vier Grundrechenarten (hier im Beispiel auch Multiplikation und Division) durchgeführt werden können und aufgrund des Zahlenmaterials kein Hinweis auf die geforderte Rechenoperation abgeleitet werden kann. Außerdem wurde darauf geachtet, dass Oberflächenmerkmale wie „Signalwörter“ eher auf falsche Rechenoperationen schließen lassen.

Eine zentrale Voraussetzung für die Bearbeitung von Rechenaufgaben ist die Unterscheidung von relevanten und unnötigen Zahlenangaben (Franke & Ruwisch, 2010). Daher werden „überbestimmte“ Aufgaben eingesetzt (Maaß, 2011). Bei diesen Aufgaben kommen mehr Zahlen in der Aufgabenstellung vor, als für den Rechenausdruck benötigt werden. Die Lernenden sollen die relevanten Angaben identifizieren und den passenden Rechenausdruck in Bezug auf Zahlen und Operationszeichen auswählen.

Operationsvorstellungen werden darüber hinaus bei der Aufgabe „Operationsmodell“ (6 Items) zur Übersetzung zwischen Rechenausdruck und bildlicher Darstellung untersucht.

Hierzu werden zur Aufgabe 3 · 4 verschiedene bildliche Darstellungen präsentiert und es soll entschieden werden, ob das Bild dem Rechenausdruck entspricht.

Tabelle III.6-15: Aufgabenbeispiel „Operationsmodell“ (Niveaustufe B)

Ma_B_ZO_412_D Operationsmodell	Auswahl	Interpretation
 Abbildung III.6-14	**ja**	**korrekt**
	nein	Falsch: Es werden nur vier Dreierreihen, nicht aber auch drei Viererspalten gesehen.
	?	Die Aufgabe wird nicht verstanden.

Die Beschreibung von Zusammenhängen der Rechenoperationen wird durch ***ILeA plus*** nicht erfasst. Es können jedoch Aussagen gemacht werden, wenn Umkehroperationen offenkundig nicht genutzt werden. Hierzu wird auf Teil III, Kap. 6.5 verwiesen.

6.5 RECHENVERFAHREN UND -STRATEGIEN ANWENDEN

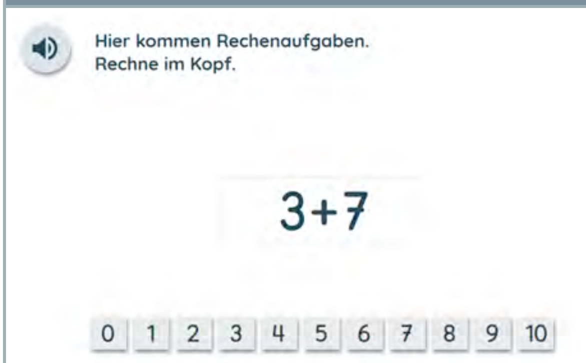
RLP

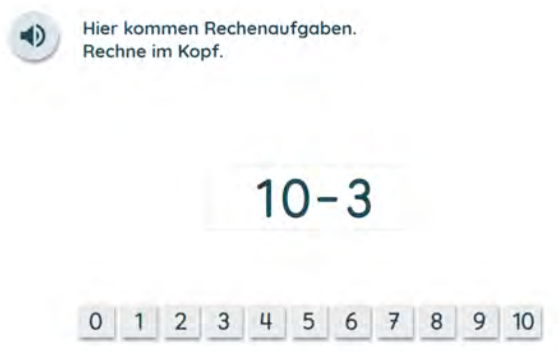
B Rechenverfahren und -strategien anwenden

- **Beschreiben von Aufgabenfamilien**
- **(z. B. 5 + 3 = 8 | 3 + 5 = 8 | 8 – 5 = 3 | 8 – 3 = 5) unter Nutzung der Umkehroperationen und des Vertauschungsgesetzes (Kommutativgesetz) bei der Addition und Multiplikation**
- **Nutzen, Darstellen und Beschreiben operativer Strategien für das (gestützte) Kopfrechnen:**
  - **Verdoppeln und Halbieren**
  - **Nachbaraufgaben (z. B. Verdoppeln plus eins)**
  - **schrittweises Rechnen bei der Addition und Subtraktion über 10 hinaus**
  - **Analogien bei gleichartigen Additionen und Subtraktionen (z. B. 12 + 3 mithilfe von 2 + 3)**
  - **Zerlegungsstrategien flexibles und automatisiertes Lösen der Aufgaben des „kleinen 1+1" (bis Summe 20)**
- **Berechnen von Produkten über auswendig gelernte Kernaufgaben (z. B. 6 · 7 = 6 · 5 + 6 · 2)**
- Durchführen von Kontrollrechnungen unter Nutzung der Umkehroperationen

Das Nutzen von „Aufgabenfamilien", also die Verwendung der Zusammenhänge von Tausch- und Umkehraufgaben werden durch ***ILeA plus*** dahingehend geprüft, dass alle Aufgaben aus der gleichen „Familie" an verschiedenen Stellen abgefragt und anschließend die Eingaben verglichen werden. Sind alle Eingaben korrekt, so kann nicht unbedingt gefolgert werden, dass die Eingaben über die Nutzung der Tausch- oder Umkehraufgaben erfolgten. Falls jedoch bei 3 + 7 ein anderes Ergebnis als bei 7 + 3 eingegeben wird, so kann ausgeschlossen werden, dass die Tauschaufgabe genutzt wurde. Insofern kann ***ILeA plus*** nur Hinweise ausgeben, wenn die Zusammenhänge nicht genutzt werden können.

Tabelle III.6-16: Aufgabenbeispiel "Einsplusminuseins" (Niveaustufe B)

Ma_B_ZO_511_A Einsplusminuseins Ma_B_ZO_511_G	Auswahl	Interpretation
	9	Zählfehler
	10	**korrekt**
Abbildung III.6-15	andere	falsch

 Abbildung III.6-16	nicht 7	Die Umkehraufgabe kann nicht genutzt werden.

Welche operativen Strategien zur Berechnung von Termen genutzt werden, kann nicht über eine Software erfasst werden (Schipper, Wartha, & Schroeders, 2011). Wenn jedoch typische Fehler beim Rechnen gemacht werden, so können diese erfasst und interpretiert werden. Eine mögliche Ausgabe ist, dass die Strategie nicht tragfähig ist bzw. dass bei der Bearbeitung z. B. Zahlendreher gemacht wurden.

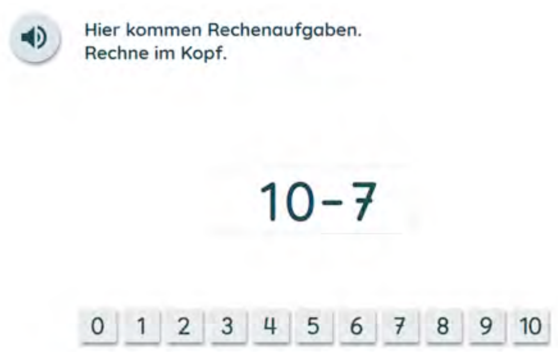
Tabelle III.6-17: Aufgabenbeispiel „Rechnen“ (Niveaustufe B)

Ma_B_ZO_541_C Rechnen	Offene Eingabe	Interpretation
 Abbildung III.6-17	0	60 – 50 – 1 – 9 (falsche Übertragung Addition: Mischform aus Stellenwerten extra und Schrittweise)
	1	Zählfehler (genau eine Zahl zw. 59 und 61)
	2	**korrekt (kein Rückschluss auf Rechenweg möglich)**
	3	Zählfehler: 59, 60, 61 sind 3 Zahlen
	18	60 – 50 + 9 – 1 (falsche Übertragung Addition: Tauschaufgabe)
	120	Addition statt Subtraktion
	andere	falsch

Daher können auch in diesem Bereich nur defizitorientierte Hinweise gegeben werden, wenn offenkundig nicht tragfähige Strategien zur Bearbeitung der Aufgabe herangezogen wurden. Untersucht werden neben der Addition und Subtraktion zweistelliger Zahlen mit Zehnerübergang (6 Items) auch Aufgaben zur Multiplikation und Division (9 Items, davon 6 Kernaufgaben).

Das automatisierte Lösen der Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 10 wird mit je vier Plus- und Minusaufgaben festgestellt, bei denen möglichst schnell eine Lösung angeklickt werden soll. Es muss nicht mit “OK“ bestätigt werden, um vergleichbare Informationen zur Bearbeitungszeit zu erhalten.

Tabelle III.6-18: Aufgabenbeispiel „Einsplusminuseins“ (Niveaustufe B)

Ma_B_ZO_511_E Einsplusminuseins	Auswahl	Interpretation
 Abbildung III.6-18	2	fehlerhafte Zählstrategie
	3	**korrekt**
	4	fehlerhafte Zählstrategie
	andere	falsch
	▪ Wenn die Bearbeitungszeit länger als 10,3 Sekunden dauert, so wird die Aufgabe als „besonders langsam“ gelöst bewertet. Als „besonders langsam“ wurden die Zeiten der 20 % langsamsten Bearbeitungen der Normierungsstichprobe gewertet. ▪ Dies kann ein Hinweis auf Zählstrategien sein, auch wenn die Aufgabe richtig gelöst wurde.	

6.6 GEOMETRISCHE OBJEKTE UND IHRE EIGENSCHAFTEN BESCHREIBEN

RLP	**B Geometrische Objekte und ihre Eigenschaften beschreiben** ▪ **Erkennen, Benennen und Beschreiben geometrischer Objekte (Kugel, Würfel, Quader sowie Dreieck, Viereck, Quadrat, Rechteck, Kreis) in der Umwelt und am Modell unter Nennung einzelner Merkmale** ▪ **Erkennen und Benennen von Ecken, Kanten, Seiten, Strecken und Punkten und deren Nutzung zur Beschreibung von geometrischen Objekten** ▪ **Erkennen von rechten Winkeln (z. B. mithilfe von Faltwinkeln)** ▪ **Erkennen von spiegelsymmetrischen Figuren durch Falten und Spiegeln**

Bei ***ILeA plus*** beschränkt sich die Diagnose der Begriffsbildung auf das Erkennen der geometrischen Objekte Würfel (4 Items), Quader (5 Items), Viereck (5 Items), Dreieck (3 Items) und Rechteck (4 Items). Hierzu wird in der Aufgabe „Begriffsbildung“ (21 Items) ein Bild des geometrischen Objektes gezeigt und gefragt, ob es sich hierbei um einen Würfel (Quader …) handelt. Bei den präsentierten Bildern wurde darauf geachtet, dass nicht nur prototypische Darstellungen (z. B. die Seiten eines Rechtecks sind horizontal und vertikal, das Dreieck ist gleichseitig) verwendet wurden (Maier & Benz, 2014; Roth & Wittmann, 2014). Als nicht prototypisches Viereck wurde ein nicht konvexes Viereck präsentiert. Bei diesem liegt eine Diagonale außerhalb des Vierecks.

Darüber hinaus wird untersucht, ob hierarchische Beziehungen bei den Bezeichnungen (Franke & Reinhold, 2016) sicher angewendet werden können: Ein Quadrat ist immer auch ein Rechteck, ein Würfel ist auch ein Quader.

Die Kompetenz, Ecken, Kanten und Flächen zur Beschreibung geometrischer Objekte nutzen zu können, wird mit der Aufgabe „Begrenzung“ geprüft, nämlich ob diese Begriffe korrekt zugeordnet werden können (5 Items). Da Kompetenzen zur Beschreibung die Möglichkeit der Versprachlichung oder Verschriftlichung voraussetzen, müssen diese in einer weiterführenden Diagnose (z. B. in einem Unterrichtsgespräch) untersucht werden. Wenn jedoch die Begriffe nicht korrekt zugeordnet werden können, scheint die Kommunikation darüber unmöglich.

Das Erkennen rechter Winkel (z. B. unter dem Begriff „Faltwinkel“) ist eine zentrale Voraussetzung zur geometrischen Begriffsbildung. Dieses Wissen ist beispielsweise eine Voraussetzung für die Entscheidung, ob es sich bei einem Viereck um ein Rechteck handelt. Daher wird bei ***ILeA plus*** das Erkennen von Faltwinkeln abgefragt (4 Items).

Tabelle III.6-19: Aufgabenbeispiele „Begrenzung“, „Faltwinkel“ (Niveaustufe B)

<table>
<tr><th>Ma_B_RF_121_E Begrenzung
Ma_B_RF_131_C Faltwinkel</th><th>Auswahl</th><th>Interpretation</th></tr>
<tr><td rowspan="3">

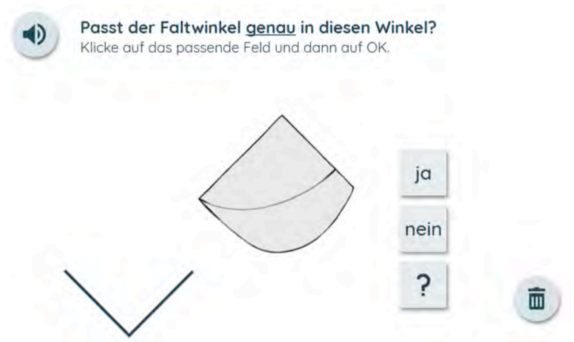
Abbildung III.6-19</td><td>Ecke</td><td>falsch</td></tr>
<tr><td>Kante</td><td>korrekt</td></tr>
<tr><td>Fläche</td><td>falsch</td></tr>
<tr><td rowspan="3">

Abbildung III.6-20</td><td>ja</td><td>korrekt</td></tr>
<tr><td>nein</td><td>Falsche Annahme: Bei rechten Winkeln müssen die Schenkel horizontal und vertikal sein.</td></tr>
<tr><td>?</td><td>Die Aufgabe wird nicht verstanden.</td></tr>
</table>

In der Aufgabe „Achsenanzahl“ (5 Items) wird das Erkennen spiegelsymmetrischer Figuren untersucht. Es wird eine ebene Figur gezeigt und die Schülerin / der Schüler soll entscheiden, ob bzw. wie viele Spiegelachsen eingezeichnet werden können. Ein konkretes Falten ist durch die Darstellung der Figur am Bildschirm nicht möglich, wohl aber ein gedankliches Falten oder das gedankliche Einzeichnen von Spiegelachsen.

Tabelle III.6-20: Aufgabenbeispiel „Achsenanzahl“ (Niveaustufe B)

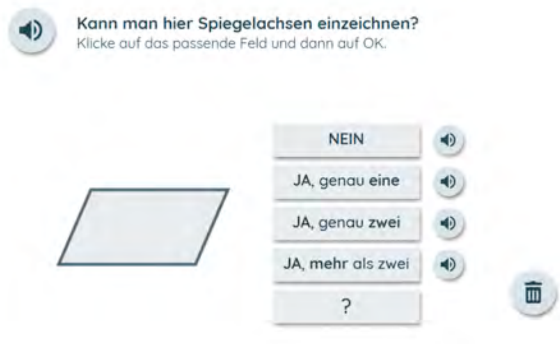
<table>
<tr><th>Ma_B_RF_141_C Achsenanzahl
Ma_B_RF_141_E</th><th>Auswahl</th><th>Interpretation</th></tr>
<tr><td rowspan="5">

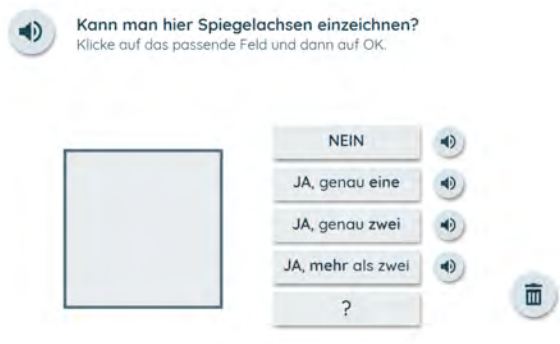
Abbildung III.6-21</td><td>NEIN</td><td>korrekt</td></tr>
<tr><td>JA, genau eine</td><td>Falsche Annahme: Diagonale oder Mittelparallele als Symmetrieachse</td></tr>
<tr><td>JA, genau zwei</td><td>Falsche Annahme: Diagonalen oder Mittelparallelen als Symmetrieachsen</td></tr>
<tr><td>JA, mehr als zwei</td><td>falsch</td></tr>
<tr><td>?</td><td>Die Aufgabe wird nicht verstanden.</td></tr>
<tr><td rowspan="5">

Abbildung III.6-22</td><td>NEIN</td><td>Falsche Annahme: Das Quadrat wird als unteilbares Ganzes interpretiert.</td></tr>
<tr><td>JA, genau eine</td><td>Falsch, aber immerhin wird Symmetrie erkannt.</td></tr>
<tr><td>JA, genau zwei</td><td>Falsch, aber immerhin wird Symmetrie erkannt.</td></tr>
<tr><td>JA, mehr als zwei</td><td>korrekt</td></tr>
<tr><td>?</td><td>Die Aufgabe wird nicht verstanden.</td></tr>
</table>

6.7 BEZIEHUNGEN ZWISCHEN GEOMETRISCHEN OBJEKTEN BESCHREIBEN

RLP	**B Beziehungen zwischen geometrischen Objekten beschreiben** ▪ **Beschreiben der Lagebeziehungen von Objekten (auch unter Verwendung von „links von“, „rechts von“, „innen“, „außen“, „zwischen“)** ▪ Beschreiben von Körpern mithilfe ihrer Begrenzungsflächen

Das Beschreiben von Lagebeziehungen zwischen Objekten wird durch ***ILeA plus*** dahingehend untersucht, ob die Begriffe „hinter“, „unter“, „auf“ und „rechts von“ sicher verwendet werden können. Hierbei sollen die Begriffe nicht aus der Sicht der Schülerin oder des Schülers, sondern aus der Sicht einer anderen Person, die links am Bildschirm abgebildet ist, eingesetzt werden (Franke & Reinhold, 2016). Sollten sich bereits hier Schwierigkeiten zeigen, so kann davon ausgegangen werden, dass eine Beschreibung von komplexeren Lagebeziehungen nicht möglich ist.

In der Aufgabe „Spielfigur“ (5 Items) wird ein Bild mit Spielfiguren präsentiert und die Schülerin bzw. der Schüler wird aufgefordert, nach einer Anweisung mit Lagebeziehung auf eine der Figuren zu klicken.

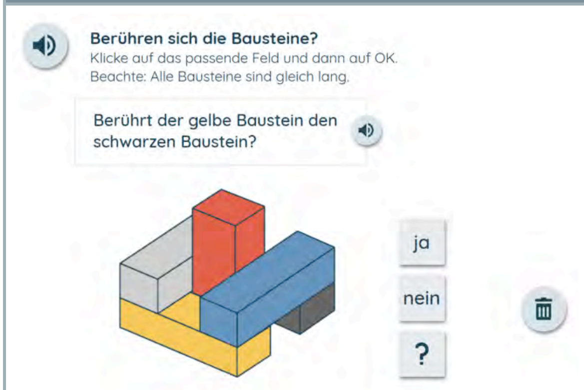
Tabelle III.6-21: Aufgabenbeispiel „Spielfigur“ (Niveaustufe B)

Ma_B_RF_211_A Spielfigur	Auswahl	Interpretation
	1	Vertauschung von links und rechts aus eigener Perspektive
	2	**korrekt**
	3	falsch
	4	Vertauschung rechts und links
	5	rechts aus eigener Perspektive
Abbildung III.6-23	6	rechts aus eigener Perspektive

Eine Grundlage für das Beschreiben von Raum-Lage-Beziehungen ist das Erkennen und Deuten von räumlichen Beziehungen. Hierbei werden Objekte (bzw. deren zweidimensionale Darstellungen) gedanklich miteinander in Beziehung gesetzt, auch wenn diese nicht unmittelbar sichtbar sind. Hierzu müssen räumliche Beziehungen mental konstruiert werden.

Bei der Aufgabe „Bausteine“ (4 Items) wird untersucht, ob dieses mentale In-Beziehung-Setzen gelingt. Hierzu werden sowohl sichtbare als auch nicht sichtbare Beziehungen abgefragt.

Tabelle III.6-22: Aufgabenbeispiel „Bausteine“ (Niveaustufe B)

Ma_B_RF_212_C Bausteine	Auswahl	Interpretation
	ja	Falsche Annahme: Der schwarze und der gelbe Baustein berühren sich an einer nicht sichtbaren Stelle.
	nein	**korrekt**
Abbildung III.6-24	?	Die Aufgabe wird nicht verstanden.

Eine weitere Untersuchung räumlicher Beziehungen erfolgt über die Aufgabe „Würfelbauwerke“ (3 Items). Hierbei beschränkt sich dieses Umgehen mit Würfelbauten auf die Bestimmung der Anzahl von Würfeln eines als Bild dargestellten Bauwerks (Reinhold, 2018). Bei zwei der drei Items wird durch räumliche Rückschlüsse die Anzahl der benötigten Würfel ermittelt, denn nicht alle Würfel sind sichtbar. Bei den Aufgaben wurde darauf geachtet, dass die Würfel so gezeichnet sind, dass sie nicht „schweben“ können. Außerdem deuten zwei Wände an, dass sich hinter dem Bauwerk keine nicht sichtbaren Würfel „verstecken“ können.

Tabelle III.6-23: Aufgabenbeispiel „Würfelbauwerke“ (Niveaustufe B)

Ma_B_RF_311_C Würfelbauwerke	Offene Eingabe	Interpretation
	10	Nur sichtbare Würfel werden berücksichtigt.
	12	**korrekt**
	16	Anzahl der sichtbaren Quadrate
Abbildung III.6-25	andere	falsch

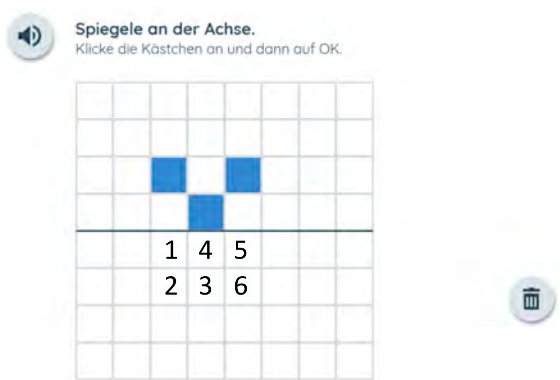
6.8 GEOMETRISCHE OBJEKTE DARSTELLEN

RLP

B Geometrische Objekte darstellen
- Herstellen und Ergänzen von Würfelbauten
- Formen, Bauen, Falten von Körpern aus verschiedenen Materialien
- Legen, Zerlegen, Auslegen, Zusammensetzen, Falten, Schneiden, Spannen, Drucken ebener Figuren
- Zeichnen ebener Figuren frei Hand und mithilfe von Zeichengeräten (Lineal, Geodreieck, Schablone) überwiegend auf Rasterpapier
- **Ergänzen von ebenen Figuren zu achsensymmetrischen Figuren durch Zeichnen (auf Rasterpapier), Legen und Drucken**

Das „Ergänzen von ebenen Figuren zu achsensymmetrischen Figuren“ wird durch 2 Items der Aufgabe „Spiegeln“ untersucht. Auf Kästchenpapier sind drei Felder markiert und es ist eine Spiegelachse vorgegeben. Durch Klicken auf die passenden Felder soll die vorgegebene Figur gespiegelt und somit zu einer achsensymmetrischen Figur ergänzt werden.

Tabelle III.6-24: Aufgabenbeispiel „Spiegeln“ (Niveaustufe B)

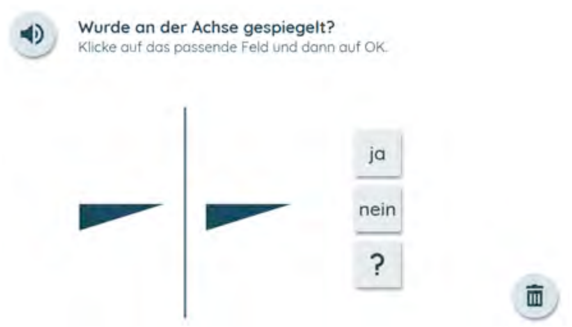
Ma_B_RF_351_A Spiegeln	Auswahl	Interpretation
	**2-4-6**	**korrekt**
	1-3-5	falsch: Verschieben statt Spiegeln
Abbildung III.6-26	andere	falsch

6.9 GEOMETRISCHE ABBILDUNGEN UND IHRE EIGENSCHAFTEN NUTZEN

RLP	**B Geometrische Abbildungen und ihre Eigenschaften nutzen** ▪ umgangssprachliches Beschreiben von räumlichen und ebenen Bewegungen (Verschieben, Drehen, Spiegeln), die selbst, mit anderen oder mit Objekten ausgeführt werden ▪ **Vergleichen von Original und Bild**

Das Vergleichen von Original und Bild in Bezug auf eine Abbildung wird durch die Aufgabe „Achsenspiegelung“ (6 Items) untersucht. Bei dieser Aufgabe soll entschieden werden, ob eine Achsenspiegelung durchgeführt wurde oder nicht.

Tabelle III.6-25: Aufgabenbeispiel „Achsenspiegelung“ (Niveaustufe B)

Ma_B_RF_421_C Achsenspiegelung	Auswahl	Interpretation
	ja	falsch: Verwechslung zwischen Achsenspiegelung und einer anderen Bewegung (in diesem Fall einer Verschiebung)
	nein	**korrekt**
Abbildung III.6-27	?	Die Aufgabe wird nicht verstanden.

6.10 GEOMETRISCHE ABBILDUNGEN AUSFÜHREN

RLP	**B Geometrische Abbildungen ausführen** ▪ **Ausführen von Bewegungen (selbst, mit anderen oder mit Objekten) nach mündlichen, bildlichen und schriftlichen Anweisungen** ▪ Erzeugen von Spiegelbildern (z. B. mit dem Spiegel, durch Klecksen)

Das Ausführen von Bewegungen wird untersucht, indem bei der Aufgabe „Verschiebung“ (2 Items) auf einem Kästchenraster ein bzw. drei Kästchen nach Vorgabe (zwei nach links und eins nach unten) verschoben werden und auf das Zielkästchen geklickt wird. Auch hier wird erfasst, ob die Begriffe „rechts“ und „links“ sicher angewendet werden können.

Tabelle III.6-26: Aufgabenbeispiel „Verschiebung“ (Niveaustufe B)

Ma_B_RF_511-1_A Verschiebung	Auswahl	Interpretation
 Abbildung III.6-28	**1**	**korrekt**
	andere	falsch: Vertauschung rechts und links
	?	falsch

7. NIVEAUSTUFE B: FÖRDERINHALTE AUS DEN AUSWERTUNGEN

Sebastian Wartha, Axel Schulz, Christiane Benz & Sophia Bayer

7.1 ZAHLZERLEGUNGEN SOWIE ADDITION UND SUBTRAKTION IM ZR 10 AUTOMATISIEREN (ZZ)

Ein automatisiertes, müheloses Abrufen aller Zahlzerlegungen sowie Plus- und Minusaufgaben im Zahlenraum bis 10 ist die Grundlage und Voraussetzung für die Überwindung von Zählprozessen und den Aufbau von operativen Additions- und Subtraktionsstrategien (Häsel-Weide, 2016).

Große und lang anhaltende Schwierigkeiten beim Rechnenlernen (häufig umschrieben mit Begriffen wie „Dyskalkulie“ oder „Rechenstörung“) und eingeschränkte Zahlvorstellungen, auch im großen Zahlenraum, lassen sich häufig auf ein mangelhaftes Beherrschen des Zahlenraums bis 10 zurückführen (Gaidoschik, 2010; Schipper, 2009).

Ausgabe:
Grundlage sind alle Aufgaben zu den Zahlzerlegungen der 10 und der 8 sowie die Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 10. Bei diesen 20 Items werden die Eingaben sowohl auf Korrektheit als auch auf Geschwindigkeit überprüft. Wenn mehr als drei Items falsch oder mehr als sechs Items besonders langsam bearbeitet wurden, wird der Förderinhalt ausgegeben. „Besonders langsam“ ist eine Bearbeitung, wenn sie langsamer als das langsamste Fünftel der Normierungsstichprobe ist.

Tabelle III.7-1: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes ZZ (Niveaustufe B)

Anzahl falsch:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10-20	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (ZZ)	43 %	22 %	12 %	6 %	4 %	3 %	2 %	1 %	1 %	1 %	5 %	3400
Bewertung	Unauffällig: 83 %				Auffällig: 17 %							

Sehr langsam:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10-20	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (ZZ)	23 %	15 %	12 %	8 %	7 %	6 %	5 %	4 %	5 %	3 %	12 %	3400
Bewertung	Unauffällig: 76 %							Auffällig: 24 %				

Die Ausgabe des Förderinhaltes orientiert sich an der inhaltlichen Überlegung, dass eine langsame Bearbeitung ab einem Viertel der gestellten Aufgaben als problematisch für den weiteren Lernerfolg bewertet werden kann. Beide Analysen werden mit „oder“ verknüpft. Der Förderinhalt wird in 32 Prozent der Fälle (N=3400) ausgegeben.

Ergänzende prozessorientierte Diagnose und Fördervorschläge

Tabelle III.7-2: Ergänzende prozessorientierte Diagnose (ZZ, Niveaustufe B)

Aufgabe	Beobachtungen
Ich sage eine Zahl, du sagst, wie viel bis 9 [7, 8, 10] fehlt: 2, 7, 1, 5.	▪ Müssen die Zahlzerlegungen zählend bestimmt werden? ▪ Muss lange nachgedacht werden oder wird das Ergebnis mühelos und schnell bestimmt?
Wie rechnest du 9 – 7? Wie rechnest du 3 + 6?	▪ Werden die Rechenaufgaben zählend oder automatisiert und mühelos bestimmt? ▪ Wird der Zusammenhang zwischen Zahlzerlegung und Rechenaufgabe genutzt?
Wie rechnest du 7 + 8? Wie rechnest du 14 – 8?	▪ Werden Zahlzerlegungen beim Rechnen eingesetzt oder wird gezählt?
Zeige mir die Rechenaufgaben am Rechenrahmen.	▪ Wird am Rechenrahmen schnell und unter Nutzung der Strukturen geschoben oder gezählt? ▪ Werden die Zahlzerlegungen auf handelnder Ebene eingesetzt?
Zeige mir 8 Finger.	▪ Werden Zerlegungen wie 5 + 3 „schnell“ gezeigt oder gezählt?

Tabelle III.7-3: Fördervorschläge (ZZ, Niveaustufe B)

Ziel	Förderung
Strukturnutzung statt Zählen	▪ Zahlen bis 10 am Rechenrahmen schnell einstellen und schnell ablesen (Nutzung des Farbwechsels bei der Fünferstruktur thematisieren)
Lernen der Zahlzerlegungen	▪ Alle Zahlzerlegungen bis 10 über die Nutzung der Fünferstruktur lernen (z. B. 9 ist am Rechenrahmen eingestellt, Stift zwischen zwei Perlen – Benennung beider Anzahlen)
Automatisieren der Zahlzerlegungen	▪ Automatisierungsübungen durch rasches Abfragen der Zahlzerlegungen und Zeitmessung: Wie viele werden in einer Minute geschafft?
Nutzen der Zahlzerlegungen beim Rechnen	▪ Thematisieren, welche Zahlzerlegungen welchen Plus- und Minusaufgaben entsprechen ▪ Am Rechenrahmen zeigen, welche Zerlegung bei welcher Aufgabe eingesetzt wird

Literatur zum Weiterlesen:

Benz, C., & Schulz, A. (2013). Zahlzerlegungen. *Fördermagazin Grundschule, 4,* 32-36.

Hasemann, K., & Gasteiger, H. (2014). *Anfangsunterricht Mathematik: Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II* (3., überarb. u. erw. Aufl.). Berlin: Springer Spektrum, S. 121 f.

PIKAS. (o. J.). *Informationen*. Abgerufen von *https://pikas.dzlm.de/260* (Zugriff am 20.06.2021).

PIKAS. (o. J.). *Übungsaufgaben 1+1, 1-2.* Abgerufen von *https://pikas.dzlm.de/node/593* und */594* (Zugriff am 20.06.2021).

Rathgeb-Schnierer, E., & Rechtsteiner, C. (2018). *Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln: Grundlagen – Förderung – Beispiele*: *Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II*. Berlin, Heidelberg: Springer, S. 164-166, 171 ff.

Rückert, S., Stopp, M., & Wartha, S. (2015). Zusammen Zahlen zerlegen. *Fördermagazin Grundschule, 4,* 30-38.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2015). *Handbuch für den Mathematikunterricht* (Druck A). Braunschweig: Schroedel Westermann, S. 36 f.

Schipper, W., Wartha, S., & Schroeders, N. (2011). *BIRTE 2: Bielefelder Rechentest für das 2. Schuljahr: Handbuch zur Diagnostik und Förderung*. Braunschweig: Schroedel, S. 130 ff.

Wartha, S., Hörhold, J., Kaltenbach, M., & Schu, S. (2019). *Grundvorstellungen aufbauen: Rechenprobleme überwinden*. Braunschweig: Westermann, S. 14 ff.

7.2 KARDINALE ZAHLVORSTELLUNGEN AUFBAUEN (KA)

Tragfähige Zahlvorstellungen sind wichtig, um Zahlen in Beziehung setzen zu können und sie zu interpretieren (Schipper, 2009). Kardinale Zahlvorstellungen ermöglichen die Beurteilung der Zahl als Mengenangabe.

Eine Zahlvorstellung ermöglicht, dass gesprochene (dreiundvierzig) und geschriebene (43) Zahlsymbole mit Mengendarstellungen (4 Zehnerstangen und 3 Einerwürfel) verknüpft werden (Wartha & Schulz, 2012).

Können kardinale Zahlvorstellungen nicht aktiviert werden, so ist es schwer, gesagte oder geschriebene Zahlsymbole zu interpretieren. Insbesondere Größenangaben können nicht bewertet oder gedeutet werden, wenn Zahlvorstellungen nicht aufgebaut sind (Lehrer, 2003).

Ausgabe:
Grundlage sind die Bearbeitungen der Aufgaben „Zahlauffassung“, „Schnelles Sehen“, „Mengen klicken“ und „Anzahlvergleich“.

Der Förderinhalt wird ausgegeben, wenn mehr als acht der 23 Items falsch gelöst wurden.

Tabelle III.7-4: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes KA (Niveaustufe B)

Anzahl falsch:	0-2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12-23	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (KA)	6 %	8 %	12 %	14 %	14 %	13 %	9 %	8 %	5 %	4 %	7 %	3421
Bewertung	Unauffällig: 76 %							Auffällig: 24 %				

Ergänzende prozessorientierte Diagnose und Fördervorschläge

Tabelle III.7-5: Ergänzende prozessorientierte Diagnose (KA, Niveaustufe B)

Aufgabe	Beobachtungen
Wie legst du die Zahl 67 mit Zehnersystemmaterial?	▪ Werden die Stellenwerte richtig erkannt? Werden Zehnerstangen für Zehner und Einerwürfel für Einer verwendet? ▪ Kann das Material in der Vorstellung oder nur konkret eingesetzt werden?
Wie kannst du aus der 67 eine 75 legen?	▪ Wird die 75 „neu“ gebildet oder können Zahlbeziehungen genutzt werden?
Stelle dir vor, hier liegen sieben Zehnerstangen und acht Einer-würfel. Wie heißt die Zahl?	▪ Wird die Zahl richtig gebildet und werden die Stellenwerte korrekt zugeordnet?
Stell dir vor, es kommen zwei Zehnerstangen dazu und ein Einerwürfel wird weggenommen. Wie heißt die Zahl jetzt?	▪ Können Beziehungen zwischen den Zahlen genutzt werden (oder wird z. B. gezählt)?
Wie entscheidest du, welche Zahl größer ist: 37 oder 45?	▪ Werden die Stellenwerte richtig interpretiert? Wird über die Anzahl der Objekte im größten Stellenwert (hier: mehr Zehner bei 45 als bei 37) argumentiert?

Tabelle III.7-6: Fördervorschläge (KA, Niveaustufe B)

Ziel	Förderung
Zahlen kardinal darstellen	▪ Am Zehnersystemmaterial/Rechenrahmen sollen mündlich dik-tierte Zahlen dargestellt werden. Der Darstellungsprozess wird versprachlicht und zunehmend in der Vorstellung durchgeführt – z. B. an einem „Luftrechenrahmen“.
Zahlen kardinal auffassen	▪ Kärtchen mit bildlichen Darstellungen (Zehnersystemmaterial/ Rechenrahmen) werden angeboten und die Anzahl soll genannt werden. ▪ Zuordnungsspiele (Zahlwort, Zahlsymbol und Bildliche Darstellung) durchführen ▪ Gibt es mehrere Beschreibungen/Rechenaufgaben zur gleichen Zahl (z. B. 42: 40 + 2, 20 + 20 + 2, 10 + 32 …)?
Schnelles Sehen	▪ Am strukturierten Rechenrahmen werden Zahlen dargestellt und nur kurz gezeigt. Die Darstellung wird beschrieben und die Zahl benannt.
Zahlbeziehungen nutzen	▪ „Zahl des Tages“ (zu einer Zahl sollen verschiedene Eigenschaften genannt werden) und „Zahlen des Tages“ (zu zwei Zahlen werden Gemeinsamkeiten und Unterschiede beschrieben)
Zahlen vergleichen	▪ Legen der Zahlen mit Zehnersystemmaterial. Klären, dass „mehr“ nicht mehr Objekte, sondern „mehr Holz“ bedeutet. Wenn bei 45 „mehr liegt“ als bei 37, dann ist die Zahl 45 „größer“ als 37.

Literatur zum Weiterlesen:

Hasemann, K., & Gasteiger, H. (2014). *Anfangsunterricht Mathematik: Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II* (3., überarb. u. erw. Aufl.). Berlin: Springer Spektrum, S. 113 ff.

PIKAS. (o. J.). *Modul 3.1: Zahlverständnis entwickeln.* Abgerufen von *https://pikas.dzlm.de/material-pik/haus-34-ausgleichende-f%C3%B6rderung/haus-3-fortbildungsmaterial/modul-31-zahlverst%C3%A4ndnis* (Zugriff am 20.06.2019).

Rathgeb-Schnierer, E., & Rechtsteiner, C. (2018). *Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln: Grundlagen – Förderung – Beispiele: Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II*. Berlin, Heidelberg: Springer, S. 142 f., 146.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2015). *Handbuch für den Mathematikunterricht* (Druck A). Braunschweig: Schroedel Westermann, S. 54 ff.

Schipper, W., Wartha, S., & Schroeders, N. (2011). *BIRTE 2: Bielefelder Rechentest für das 2. Schuljahr: Handbuch zur Diagnostik und Förderung*. Braunschweig: Schroedel, S. 117 ff., 126 ff.

Wartha, S., Hörhold, J., Kaltenbach, M., & Schu, S. (2019). *Grundvorstellungen aufbauen: Rechenprobleme überwinden*. Braunschweig: Westermann, S. 39 ff.

7.3 TRAGFÄHIGES STELLENWERTVERSTÄNDNIS AUFBAUEN (SW)

Zahlen sind nicht nur eine Aneinanderreihung von Ziffern. Vielmehr werden die Ziffern hinsichtlich ihrer Wertigkeit an der jeweiligen Position (Einer oder Zehner) interpretiert: „45" bedeutet nicht 4 und 5 Plättchen, sondern z. B. 4 Zehnerstangen und 5 Einerwürfel oder 3 Zehner und 15 Einer. Stellenwertverständnis kann beschrieben werden als die Fähigkeit, vor dem Hintergrund eines Bündelungssystems flexibel zwischen Zahlwort, geschriebenem Zahlsymbol und Mengendarstellung zu übersetzen.

Wenn kein tragfähiges Stellenwertverständnis aufgebaut ist, können keine tragfähigen Zahlvorstellungen zu zwei- und mehrstelligen Zahlen entwickelt werden (Fromme, 2016). Die Ziffern bei mehrstelligen Zahlen werden erst unter Berücksichtigung der Stellenwerte zu der zu interpretierenden Zahl (van de Walle & Lovin, 2006).

Ausgabe:

Die Grundlage für die Ausgabe des Förderinhaltes sind falsche Lösungen, die mit einem Zahlendreher oder über falsches Bündeln bzw. über die Angabe der Objekte ungeachtet ihrer Stellenwerte (z. B. 2 Zehner, 3 Einer = 5) erklärt werden können. Die Anzahl aller Fehler dieser Art im Gesamttest wird ermittelt. Nicht nur die Aufgaben zur kardinalen und ordinalen Zahlauffassung, sondern auch die Aufgaben zum Vergleichen, zum Bestimmen von Nachbarzahlen und die Rechenaufgaben werden herangezogen und in diesem Zusammenhang analysiert.

Tabelle III.7-7: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes SW (Niveaustufe B)

In der Normierungsstichprobe wurde der Förderinhalt in 26 Prozent der Fälle ausgegeben.

Anzahl falsch:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10-15	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (SW)	38 %	22 %	14 %	10 %	6 %	4 %	3 %	2 %	1 %	0 %	0 %	3714
Bewertung	Unauffällig: 74 %			Auffällig: 26 %								

Ergänzende prozessorientierte Diagnose und Fördervorschläge

Tabelle III.7-8: Ergänzende prozessorientierte Diagnose (SW, Niveaustufe B)

Aufgabe	Beobachtungen
Ich diktiere Zahlen und du schreibst sie auf: 78, 63 …	▪ Wird invers oder in Schreibrichtung geschrieben? ▪ Werden Zahlendreher gemacht oder ist die Zahl korrekt? ▪ Muss lange nachgedacht werden oder gelingt das Schreiben mühelos?
Wie viele Zehner hörst du bei der Zahl? 68, 74, 14 … Woran erkennst du die Zehner?	▪ Können die Zehner sicher bestimmt werden? ▪ Wird das Bestimmen der Zehner mit der Endung „-zig“/„-ßig“ begründet?
Ich sage dir eine Zahl und du legst sie mit Zehnersystemmaterial. 62 …	
Kannst du 57 auch legen, wenn es nur 4 Zehnerstangen gibt?	▪ Wird der fehlende Zehner durch 10 Einer kompensiert?
Welche Zahl liegt hier mit Zehnersystemmaterial? Sage sie und schreibe sie auf. Begründe. (7 Z und 5 E; 5 Z und 13 E)	▪ Werden die Zahlwörter richtig gebildet oder macht die Schülerin / der Schüler Zahlendreher? ▪ Werden Bündelungen richtig vorgenommen?

Tabelle III.7-9: Fördervorschläge (SW, Niveaustufe B)

Ziel	Förderung
Stellenwerte im Zahlwort hören	▪ Hinweis auf das „-zig“ im Zahlwort ▪ Diktieren zweistelliger Zahlen – Angabe der Anzahl der Zehner ▪ Thematisieren der inversen Sprechweise: „sieben und vierzig = sieben plus vierzig = vierzig plus sieben“ ▪ Zahlwortkarten auseinanderschneiden und Legen der Zahlwortbestandteile mit Zehnersystemmaterial (erst Z, dann E)
Zahlendreher überwinden	▪ Zahlen „hören“ (vgl. oben), Identifizieren der Stellenwerte ▪ Stellenwerttafeln – erst Zehner, dann Einer eintragen
In Schreibrichtung schreiben lernen	▪ Taschenrechnerdiktat

Bündeln und Entbündeln	▪ Nichtkanonische Zahldarstellungen (z. B. 3 Zehner und 15 Einer) mit Zehnersystemmaterial darstellen und auffassen ▪ Der Darstellungsprozess wird versprachlicht und zunehmend „in der Vorstellung" durchgeführt.

Literatur zum Weiterlesen:

Fromme, M., Wartha, S., & Benz, C. (2011). Grundvorstellungen zur Subtraktion. *Grundschulmagazin, 4*, 35-40.

Hasemann, K., & Gasteiger, H. (2014). *Anfangsunterricht Mathematik: Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II* (3., überarb. u. erw. Aufl.). Berlin: Springer Spektrum, S. 108.

PIKAS. (o. J.). *Modul 3.4: Entwicklung des Stellenwertverständnisses.* Abgerufen von *https://pikas.dzlm.de/material-pik/haus-34-ausgleichende-f%C3%B6rderung/haus-3-fortbildungsmaterial/modul-34-entwicklung-des* (Zugriff am 20.06.2019).

Rathgeb-Schnierer, E., & Rechtsteiner, C. (2018). *Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln: Grundlagen – Förderung – Beispiele: Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II*. Berlin, Heidelberg: Springer, S. 96 f.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2015). *Handbuch für den Mathematikunterricht* (Druck A). Braunschweig: Schroedel Westermann, S. 46 ff.

Schipper, W., Wartha, S., & Schroeders, N. (2011). *BIRTE 2: Bielefelder Rechentest für das 2. Schuljahr: Handbuch zur Diagnostik und Förderung*. Braunschweig: Schroedel, S. 121 ff.

Wartha, S., Hörhold, J., Kaltenbach, M., & Schu, S. (2019). *Grundvorstellungen aufbauen: Rechenprobleme überwinden*. Braunschweig: Westermann, S. 39 ff.

7.4 ORDINALE ZAHLVORSTELLUNGEN AUFBAUEN (OR)

Zahlen werden nicht nur als Anzahlen, sondern auch als Positionen dargestellt. Viele Zahlbeziehungen (zum Beispiel 69 und 71) werden über ordinale Bezüge („nahe beieinander") beschrieben. Das zentrale Arbeitsmittel ist der Zahlenstrahl, da hier die Position der Zahlen in Beziehung zu anderen Zahlen veranschaulicht und diskutiert werden kann.

Werden keine tragfähigen ordinalen Zahlvorstellungen aufgebaut, so können Zahlen nicht im Sinne von Positionen bzw. Abständen interpretiert werden. Problematisch ist auch das Bestimmen von Nachbarzahlen und Nachbarzehnern.

Ausgabe:

Grundlage sind alle Aufgaben zur Zahldarstellung und -auffassung am Zahlenstrahl sowie die Aufgaben zur Bestimmung von Nachbarzahlen (Nachbareiner und -zehner). Wenn bei den Nachbarzahlen die Bezeichnungen „davor" und „danach" verwechselt werden, so wird das bei diesem Förderinhalt nicht als Fehler interpretiert.

Der Förderinhalt wird ausgegeben, wenn mehr als zehn der 22 Items falsch bearbeitet werden.

Tabelle III.7-10: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes OR (Niveaustufe B)

Anzahl falsch:	0	1-2	3-4	5-8	9-10	11-15	16-20	21	22	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (OR)	7 %	21 %	21 %	20 %	4 %	10 %	14 %	2 %	1 %	3424
Bewertung	Unauffällig: 73 %					Auffällig: 27 %				

Ergänzende prozessorientierte Diagnose und Fördervorschläge

Tabelle III.7-11: Ergänzende prozessorientierte Diagnose (OR, Niveaustufe B)

Aufgabe	Beobachtungen
Beschreibe, wie du die 87 am Zahlenstrahl findest. Gibt es noch andere Möglichkeiten, sie zu finden?	▪ Werden die Stellenwerte richtig zugeordnet? Werden die „Achtziger-Zahlen“ richtig im 9. Zehner oder falsch im 8. Zehner gesucht? ▪ Wie flexibel ist die Schülerin / der Schüler, z. B. Beziehungen zur 100 oder 90 zu nutzen? Werden die Fünfer in der Skalierung genutzt oder wird alles gezählt? Wo beginnt der Zählprozess (bei 0 oder bei 1)?
Eine Zahl ist am Zahlenstrahl markiert. Wie findest du heraus, welche Zahl das ist?	▪ Werden die Stellenwerte richtig zugeordnet? Werden die „Achtziger-Zahlen“ richtig im 9. Zehner oder falsch im 8. Zehner gesucht?
Gibt es noch andere Möglichkeiten, sie zu bestimmen?	▪ Wie flexibel ist die Schülerin / der Schüler, z. B. Beziehungen zur 100 oder 90 zu nutzen? Werden die Fünfer in der Skalierung genutzt oder wird alles gezählt? Wo beginnt der Zählprozess (bei 0 oder bei 1)?
Kannst du den Weg zur Zahl mit Plus- und Minusaufgaben beschreiben?	▪ Kann die Schülerin / der Schüler das Finden der 87 über „100 – 10 = 90, 90 – 3 = 87“ beschreiben oder werden Zählprozesse deutlich? ▪ Welche Zahlen werden genutzt? Nur Zehner- oder auch Fünferzahlen?

Tabelle III.7-12: Fördervorschläge (OR, Niveaustufe B)

Ziel	Förderung
Zahlenstrahl kennenlernen	▪ Klären der großen, mittelgroßen und kleinen Markierungen. Wo ist die 1, wo ist die 0? Welche Zahlen sind an den mittelgroßen Markierungen? Etc.
Zahlen ordinal darstellen und auffassen	▪ Zahlenkarten (in Wort und Symbol) werden einem großen Zahlenstrahl zugeordnet. Wichtig sind die Dokumentation von verschiedenen Wegen und die Diskussion darüber, welche Wege besonders effektiv sind. ▪ Die „Wege zur Zahl“ können mit Pfeilbögen und Plus- und Minus-operatoren beschrieben werden (die 93 wird gefunden, indem von der 100 zuerst minus 5 und dann minus 2 gesprungen wird).
Typische Fehler kennenlernen und überwinden	▪ Warum ist die 33 nicht im dritten Zehner beim dritten Strich? ▪ Welche Zahl steht im fünften Zehner beim sechsten Strich?

Nachbarzahlen bestimmen	▪ Am Zahlenstrahl zeigen, an welcher Markierung die Nachbareiner/Nachbarzehner liegen. Nennen und begründen der gesuchten Zahl und Beschreiben der Lage (93 liegt zwischen 90 und 100, sie liegt näher an der 90 als an der 100)

Literatur zum Weiterlesen:

Hasemann, K., & Gasteiger, H. (2014). *Anfangsunterricht Mathematik: Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II* (3., überarb. u. erw. Aufl.). Berlin: Springer Spektrum, S. 115 f.

Rathgeb-Schnierer, E., & Rechtsteiner, C. (2018). *Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln: Grundlagen – Förderung – Beispiele: Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II*. Berlin, Heidelberg: Springer, S. 151, 160 f.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2015). *Handbuch für den Mathematikunterricht* (Druck A). Braunschweig: Schroedel Westermann, S. 62 ff.

Schipper, W., Wartha, S., & Schroeders, N. (2011). *BIRTE 2: Bielefelder Rechentest für das 2. Schuljahr: Handbuch zur Diagnostik und Förderung*. Braunschweig: Schroedel, S. 120 f.

Wartha, S., Hörhold, J., Kaltenbach, M., & Schu, S. (2019). *Grundvorstellungen aufbauen: Rechenprobleme überwinden*. Braunschweig: Westermann, S. 73 ff.

7.5 ÜBERWINDEN FEHLERHAFTER ZÄHLENDER VORGEHENSWEISEN (ZF)

Zählprozesse sind zu Schuleingang noch erwartungskonform. Jedoch sollen diese spätestens im ersten Drittel des zweiten Schuljahres überwunden und immer mehr Strukturen beim Zahlendarstellen und -auffassen und beim Rechnen genutzt werden (Häsel-Weide, Nührenbörger, Moser Opitz, & Wittich, 2013). Zählprozesse be- bzw. verhindern das Nutzen von Strukturen (z. B. Dezimalsystem) und damit den Aufbau von tragfähigen Zahlvorstellungen und Rechenstrategien. Fehlerhafte Zählstrategien zeigen sich insbesondere durch Fehler um plus/minus 1 und weisen darauf hin, dass auch das Zählen nicht sicher beherrscht wird (Schulz, 2014). Dies erschwert den Aufbau der nötigen Kompetenzen zur Überwindung des Zählens (Memorieren der Zahlzerlegungen) zusätzlich (Gaidoschik, 2010).

Ausgabe:

Zur Ausgabe des Förderinhaltes werden Zählfehler um plus/minus 1 über den Gesamttest ausgewertet. Hierbei werden nicht nur Zahlzerlegungen und weitere Rechenaufgaben analysiert, sondern auch Aufgaben zur Zahldarstellung und -auffassung.

Der Förderinhalt wird ausgegeben, wenn mehr als drei Zählfehler festgestellt werden.

Tabelle III.7-13: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes ZF (Niveaustufe B)

Anzahl falsch:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10-14	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (ZF)	21 %	24 %	18 %	13 %	10 %	6 %	4 %	2 %	1 %	1 %	0 %	3714
Bewertung	Unauffällig: 76 %				Auffällig: 24 %							

Ergänzende prozessorientierte Diagnose und Fördervorschläge

Tabelle III.7-14: Ergänzende prozessorientierte Diagnose (ZF, Niveaustufe B)

Aufgabe	Beobachtungen
Schnelles Sehen am Rechenrahmen (ZR 10 und ZR 100): Beschreibe, was du gesehen hast. Welche Zahl war das?	▪ Welche Strukturen kann die Schülerin / der Schüler nutzen? Werden die Farbwechsel bei 5 und bei 50 berücksichtigt? Werden ganze Zehner als solche genutzt? ▪ Nennt die Schülerin / der Schüler „nur“ eine Zahl oder kann sie/er das gesehene Bild auch beschreiben? Welche Strukturen werden für die Beschreibung genutzt?
Schnelles Einstellen am Rechenrahmen. Mit einem Plastiklineal können mehrere Zehner auf einmal geschoben werden: Wie oft musst du schieben, um 6 (70, 26 …) einzustellen?	▪ Welche Strukturen kann die Schülerin / der Schüler nutzen? Wird der Farbwechsel bei 5 und bei 50 berücksichtigt? Werden ganze Zehner als solche genutzt? Wie viele Zehner schiebt die Schülerin / der Schüler auf einmal? Kann bei 98 auch die 100 genutzt werden?
Zahlzerlegungen	▪ Vgl. Förderinhalt ZZ (Zahlzerlegungen sowie Addition und Subtraktion im ZR 10 automatisieren).

Tabelle III.7-15: Fördervorschläge (ZF, Niveaustufe B)

Ziel	Förderung
Quasisimultane Zahlauffassung	▪ Zunächst langes, dann nur kurzes Zeigen von Punktemustern und Perlen am Rechenrahmen. Der Fokus liegt auf der strukturierten Beschreibung der Punkte, nicht nur auf der Gesamtanzahl der gesehenen Punkte.
Strukturnutzen beim Zahlendarstellen	▪ Diskussion verschiedener Wege, wie z. B. 35 am Rechenrahmen eingestellt werden kann: alle Perlen einzeln, die Zehner einzeln, dann 5 auf einmal, drei Zehner auf einmal, die 5 auf einmal … ▪ Ziel: die Zahl mit möglichst wenig „Schüben“ einstellen
Automatisieren der Zahlzerlegungen	▪ Vgl. Förderinhalt ZZ (Zahlzerlegungen sowie Addition und Subtraktion im ZR 10 automatisieren).

Literatur zum Weiterlesen:

Häsel-Weide, U., Nührenbörger, M., Moser Opitz, E., & Wittich, C. (2013). *Ablösung vom zählenden Rechnen: Fördereinheiten für heterogene Lerngruppen*. Seelze-Velber: Kallmeyer Friedrich.

Hasemann, K., & Gasteiger, H. (2014). *Anfangsunterricht Mathematik: Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II* (3., überarb. u. erw. Aufl.). Berlin: Springer Spektrum, S. 158 f.

Rathgeb-Schnierer, E., & Rechtsteiner, C. (2018). *Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln: Grundlagen – Förderung – Beispiele: Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II*. Berlin, Heidelberg: Springer, S. 103, 164 ff.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2015). *Handbuch für den Mathematikunterricht* (Druck A). Braunschweig: Schroedel Westermann, S. 57.

Wartha, S., Hörhold, J., Kaltenbach, M., & Schu, S. (2019). *Grundvorstellungen aufbauen: Rechenprobleme überwinden*. Braunschweig: Westermann, S. 14 ff.

7.6 RELEVANTE ARBEITSMITTEL UNTER BERÜCKSICHTIGUNG DER GEGEBENEN STRUKTURMERKMALE UND KONVENTIONEN NUTZEN (ST)

Arbeitsmittel sind die konkrete Grundlage für gedankliche Modelle (Lorenz, 1992). Sie sind nötig, um mathematische Inhalte nichtsymbolisch darzustellen. Lernende sollen an ihnen lernen, mathematische Inhalte zu verbalisieren und sie für Argumentationen heranzuziehen. Eine zentrale Voraussetzung ist, dass der strukturelle Aufbau von Arbeitsmitteln bekannt ist (Lüken, 2010).

Schwierigkeiten beim Aufbau der Arbeitsmittel können sowohl bei Rechenrahmen und Zehnersystemmaterial (5 wird als 10 oder *vice versa* interpretiert) als auch beim Zahlenstrahl festgestellt werden. Häufige Fehler sind die Vermischung von kardinalem und ordinalem Zahlaspekt: z. B. werden 30er-Zahlen im dritten Zehner vermutet. Am Zahlenstrahl können ebenfalls die Markierungsstriche kardinal gedeutet werden: Der vierte Strich wird als 4 und nicht korrekt als 3 gedeutet.

Ausgabe:
Grundlage sind alle Aufgaben, bei denen auf den Rechenrahmen, den Zahlenstrahl und die Zehnersystemblöcke zur Zahldarstellung und -auffassung zurückgegriffen wird. Hier werden typische Fehler zur fehlerhaften Strukturnutzung erfasst. Der Förderinhalt wird ausgegeben, wenn wenigstens drei Fehler gemacht wurden.

Tabelle III.7-16: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes ST (Niveaustufe B)

Anzahl falsch:	0	1	2	3	4	5	6	7	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (ST)	27 %	27 %	25 %	13 %	6 %	1 %	1 %	0 %	3743
Bewertung	Unauffällig: 79 %			Auffällig: 21 %					

Ergänzende prozessorientierte Diagnose und Fördervorschläge

Tabelle III.7-17: Ergänzende prozessorientierte Diagnose (ST, Niveaustufe B)

Aufgabe	Beobachtungen
Beschreibe, wie du mit Zehnersystem-material die Zahl 46 darstellst. Welche Zahl ist mit Zehnersystemmaterial gelegt (z. B. 36)?	▪ Werden Zehnerstangen als 10 oder als 5 interpretiert? Wenn Einerwürfel in 5er-Bündel gelegt werden, werden diese als 5 oder als 10 interpretiert?
Schnelles Sehen am Rechenrahmen mit Fünferstruktur in Einern und Zehnern	▪ Werden Zehnerstangen als 10 oder als 5 interpretiert? Wird der Farbwechsel bei 5 als 5 oder als 10 interpretiert?
Beschreibe, wie du die Zahl 37 am Zahlenstrahl findest. Welche Zahl ist am Zahlenstrahl markiert? Erkläre.	▪ Wird 37 im dritten oder (korrekt) im vierten Zehner gesucht? Ist es der siebte Strich nach 30?

Tabelle III.7-18: Fördervorschläge (ST, Niveaustufe B)

Ziel	Förderung
Nutzen der richtigen Struktur des Arbeitsmittels	▪ Besprechung des Aufbaus des Arbeitsmittels, Gegenüberstellung der verschiedenen Strukturen ▪ Vgl. Förderinhalte KA (Kardinale Zahlvorstellungen aufbauen/ Rechenrahmen und Zehnersystemmaterial) und OR (Ordinale Zahlvorstellungen aufbauen/Zahlenstrahl).

Literatur zum Weiterlesen:

Hasemann, K., & Gasteiger, H. (2014). *Anfangsunterricht Mathematik: Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II* (3., überarb. u. erw. Aufl.). Berlin: Springer Spektrum, S. 158.

PIKAS. (o. J.). *Modul 3.5: Guter Einsatz von Darstellungsmitteln.* Abgerufen von *https://pikas.dzlm.de/material-pik/ausgleichende-f%C3%B6rderung/haus-3-fortbildungs-material/modul-35-guter-einsatz-von* (Zugriff am 20.06.2019).

Rathgeb-Schnierer, E., & Rechtsteiner, C. (2018). *Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln: Grundlagen – Förderung – Beispiele: Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II.* Berlin, Heidelberg: Springer, S. 135 f.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2015). *Handbuch für den Mathematikunterricht* (Druck A). Braunschweig: Schroedel Westermann, S. 62 ff.

Schulz, A., & Wartha, S. (2011). Materialeinsatz im Mathematikunterricht: Risiken und Chancen. *MNU Primar*, *3 (2)*, 49-56.

7.7 GRUNDVORSTELLUNGEN ZU RECHENOPERATIONEN AUFBAUEN (GV)

Grundvorstellungen zu Rechenoperationen ermöglichen eine inhaltliche Deutung der Operationszeichen – beispielsweise in Rechengeschichten oder Alltagssituationen (Rasch, 2016). Die Bearbeitung von Textaufgaben über Rechenterme gelingt höchstens dann, wenn Grundvorstellungen aktiviert werden können, wenn also die Bedeutung der Operationszeichen genutzt werden kann (Franke & Ruwisch, 2010).

Können keine Grundvorstellungen aktiviert werden, so können Textaufgaben nicht sicher gelöst werden. Stattdessen orientieren sich Lernende häufig an den in der Aufgabe vorkommenden Zahlen oder Oberflächenmerkmalen wie Signalwörtern („mehr bedeutet immer plus") (Franke & Ruwisch, 2010). Ein weiterer Hinweis auf mangelhafte Grundvorstellungen ist, wenn bei überbestimmten Aufgaben zur Bestimmung des Ergebnisses irrelevante Zahlen herangezogen werden (Maaß, 2011).

Ausgabe:
Grundlage für die Ausgabe des Förderinhaltes sind die neun Items der Textaufgaben, bei denen der passende Term ausgewählt werden muss (Rechenkompetenzen nicht erforderlich) sowie die sechs Items der Aufgabe „Operationsmodell", bei denen der Zusammenhang zwischen Bild und einem Rechenausdruck bewertet werden soll. Der Förderinhalt wird ausgegeben, wenn mehr als sieben der 15 Items falsch gelöst wurden.

Tabelle III.7-19: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes GV (Niveaustufe B)

Anzahl falsch:	0-1	2-3	4	5	6	7	8	9	10-11	12-13	14-15	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (GV)	4 %	9 %	6 %	8 %	9 %	11 %	10 %	9 %	17 %	14 %	3 %	3276
Bewertung	Unauffällig: 47 %						Auffällig: 53 %					

Bei diesem Inhalt weicht die Minimalzahl der Fehler für die Ausgabe des Förderinhaltes von der Regelung „mehr als eine halbe Standardabweichung über dem Mittelwert der Normierungsstichprobe" ab. Nach dieser Regelung müsste eine Schülerin oder ein Schüler in 15 Items mindestens zehn Fehler machen, um als auffällig zu gelten. Operationsvorstellungen sind jedoch die Grundlage für ein verständnisorientiertes Mathematiklernen, insbesondere in Alltagssituationen, sodass der Cut-off-Wert bei der Hälfte der gestellten Items festgelegt wurde.

Ergänzende prozessorientierte Diagnose und Fördervorschläge
Tabelle III.7-20: Ergänzende prozessorientierte Diagnose (GV, Niveaustufe B)

Aufgabe	Beobachtungen
Ich lese dir eine Textaufgabe vor und du rechnest sie am Taschenrechner aus.	▪ Gelingt die Übersetzung in den mathematischen Term? Gelingt sie auch in Situationen, in denen der Unterschied bestimmt werden soll? Gelingt die Übersetzung auch bei überbestimmten Aufgaben?
Wie erkennst du, dass du hier minus (...) rechnen musst?	▪ Orientiert sich die Schülerin / der Schüler an der inneren Struktur der Aufgabe („da fehlt was" / „da kommt was weg") oder an Oberflächenmerkmalen wie Signalwörtern (hier steht „weniger").
Kannst du eine Rechengeschichte erfinden, die zu 42 – 38 passt?	▪ Werden nur Wegnehm-Situationen oder auch Situationen des Unterschiedbestimmens erfunden?

Tabelle III.7-21: Fördervorschläge (GV, Niveaustufe B)

Ziel	Förderung
Klärung von Fachbegriffen wie „mehr als“	▪ Verknüpfung von Fachbegriffen „mehr als“ oder „weniger als“ mit Handlungen bzw. Bildern. Klären, wie diese Bilder und Handlungen mit Subtraktions- oder Additionstermen beschrieben werden können
Klärung von Situationstypen und passenden Termen	▪ Systematische Thematisierung von Situationstypen zur Addition und Subtraktion und Begründung für Zusammenhänge erarbeiten. Passung zwischen Rechengeschichten und Modellen (z. B. Punktefeld bei Multiplikation und Division) und anschließend zwischen den Rechengeschichten und Termen besprechen, z. B. durch: ▪ Rechengeschichten nachspielen, Operationen beschreiben und Term finden (bewusst statische und dynamische Situationen finden) ▪ zu Bildern Geschichten erzählen, Operation beschreiben und Term finden ▪ zu Termen Geschichten erfinden
Welche Rechnung passt?	▪ Zuordnungsspiel Rechengeschichte – Bild – Term. Diskussion darüber, wie die Rechenoperation im Bild (nicht im Text!) gesehen werden kann ▪ Diskussion darüber, was das Bild mit der Rechengeschichte zu tun hat

Literatur zum Weiterlesen:

Hasemann, K., & Gasteiger, H. (2014). *Anfangsunterricht Mathematik: Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II* (3., überarb. u. erw. Aufl.). Berlin: Springer Spektrum, S. 160.

PIKAS. (o. J.). *Modul 3.2: Operationsverständnis aufbauen.* Abgerufen von *https://pikas.dzlm.de/material-pik/haus-34-ausgleichende-f%C3%B6rderung/haus-3-fortbildungsmaterial/modul-32* (Zugriff am 20.06.2019).

Rasch, R. (2016). *Textaufgaben für Grundschulkinder zum Denken und Knobeln: Mathematische Probleme lösen – Strategien entwickeln* (1. Aufl.). Seelze-Velber: Klett Kallmeyer Friedrich.

Rathgeb-Schnierer, E., & Rechtsteiner, C. (2018). *Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln: Grundlagen – Förderung – Beispiele: Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II.* Berlin, Heidelberg: Springer, S. 188 f., 249 ff.

Schipper, W., Wartha, S., & Schroeders, N. (2011). *BIRTE 2: Bielefelder Rechentest für das 2. Schuljahr: Handbuch zur Diagnostik und Förderung*. Braunschweig: Schroedel, S. 154 ff.

7.8 MIT ZAHLEN STATT MIT ZIFFERN RECHNEN KÖNNEN (ZR)

Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 100 sollen über gestützte Kopfrechenstrategien bearbeitet werden. Die Verwendung von Strategien, die Zahlen in Gebrauch nehmen, sind weniger fehleranfällig und sorgen eher für den Aufbau von tragfähigen Zahlvorstellungen als Ziffernstrategien, bei denen die Stellenwerte einzeln verrechnet und anschließend verknüpft werden (Benz, 2005).

Werden die Zahlen des Rechenausdrucks in Ziffern zerlegt, um sie zu berechnen, so birgt dies das Risiko, dass Zahlvorstellungen nur unzureichend ausgebildet werden können (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner, 2018). Wird der Förderinhalt ausgegeben, so wurden fehlerhafte Ziffernstrategien registriert.

Ausgabe:

Dieser Förderinhalt wird ausgegeben, wenn bei wenigstens einer der sechs Rechenaufgaben zur Addition und Subtraktion falsche Lösungen eingetragen wurden, die auf ziffernweises Rechnen schließen lassen (z. B. 41 – 39 = 18). Andere Fehler werden hier nicht berücksichtigt.

Tabelle III.7-22: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes ZR (Niveaustufe B)

Anzahl falsch:	0	1	2	3-6	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (ZR)	81 %	13 %	6 %	0 %	3714
Bewertung	Unauffällig: 81 %	Auffällig: 19 %			

Ergänzende prozessorientierte Diagnose und Fördervorschläge

Tabelle III.7-23: Ergänzende prozessorientierte Diagnose (ZR, Niveaustufe B)

Aufgabe	Beobachtungen
Wie rechnest du 63 – 18?	▪ Werden die Zahlen in die Stellenwerte zerlegt oder wird die Zahl 18 schrittweise von der 63 subtrahiert? ▪ Treten beim Berechnen der Teilschritte Zählprozesse auf oder können die Zahlzerlegungen eingesetzt werden? ▪ Kann die Schülerin / der Schüler alternative Strategien einsetzen?

Tabelle III.7-24: Fördervorschläge (ZR, Niveaustufe B)

Ziel	Förderung
Zahlen- statt Ziffernrechnen	▪ Darstellung und Diskussion von Rechenwegen am (leeren) Rechenstrich ▪ NICHT an Zehnersystemmaterialien darstellen, denn diese legen ziffernweise Strategien nahe ▪ Beschreibung und Begründung der Operationsrichtung und der Schritte

Literatur zum Weiterlesen:

Hasemann, K., & Gasteiger, H. (2014). *Anfangsunterricht Mathematik: Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II* (3., überarb. u. erw. Aufl.). Berlin: Springer Spektrum, S. 129 ff.

PIKAS – Modul 3.3 Erarbeitung nicht zählender Rechenstrategien. Abgerufen von *https://pikas.dzlm.de/material-pik/haus-34-ausgleichende-f%C3%B6rderung/haus-3-fortbildungsmaterial/modul-33-erarbeitung-nicht* (Zugriff am 20.06.2019).

Rathgeb-Schnierer, E., & Rechtsteiner, C. (2018). *Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln: Grundlagen – Förderung – Beispiele: Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II*. Berlin, Heidelberg: Springer, S. 194 ff., 211 ff.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2015). *Handbuch für den Mathematikunterricht* (Druck A). Braunschweig: Schroedel Westermann, S. 77 ff.

Wartha, S., Hörhold, J., Kaltenbach, M., & Schu, S. (2019). *Grundvorstellungen aufbauen: Rechenprobleme überwinden*. Braunschweig: Westermann, S. 52 ff.

7.9 TRAGFÄHIGE STRATEGIEN ZUR ADDITION UND SUBTRAKTION NUTZEN (PM)

Tragfähige Strategien zur Lösung von Additions- und Subtraktionsaufgaben nehmen Zahlen (und nicht Ziffern) in Gebrauch (Selter & Zannetin, 2018). Somit tragen sie zur Vertiefung von Zahl- und Operationsvorstellungen bei. Sie ermöglichen den Lernenden im Alltags- und Berufsleben beim genauen und überschlagenden Rechnen auf Zahlbeziehungen und Operationseigenschaften zurückgreifen zu können.

Sind keine tragfähigen Rechenstrategien aufgebaut, so werden Zahlen häufig nur als Ziffernkombinationen betrachtet und nach Schemata verrechnet (Schulz, 2014). Eine negative Folge ist, dass auch in realitätsnahen Kontexten keine Zahlbeziehungen (z. B. beim Schätzen von Ergebnissen) und keine Zahlvorstellungen aktiviert werden können.

Ausgabe:
Grundlage für die Ausgabe des Förderinhaltes sind die sechs Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 100. Wenn mehr als drei Items falsch gelöst sind, wird der Förderinhalt ausgegeben.

Tabelle III.7-25: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes PM (Niveaustufe B)

Anzahl falsch:	0	1	2	3	4	5	6	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (PM)	8 %	12 %	16 %	15 %	14 %	14 %	21 %	3498
Bewertung	Unauffällig: 51 %				Auffällig: 49 %			

Bei der Ausgabe des Förderinhaltes zu Additions- und Subtraktionsstrategien wird von der Regel „eine halbe Standardabweichung über dem Mittelwert der Normierungsstichprobe“ abgewichen. Nach dieser Regel würde der Förderinhalt nur ausgegeben werden, wenn alle sechs Items falsch gelöst worden wären. Die gestellten Aufgaben sind jedoch der zentrale Lerninhalt der Jahrgangsstufe 2. Rechenstrategien im Zahlenraum über 100 bauen direkt darauf auf. Daher wird der Förderinhalt bereits ausgegeben, wenn mehr als die Hälfte der gestellten Items falsch gelöst wurde.

Ergänzende prozessorientierte Diagnose und Fördervorschläge

Tabelle III.7-26: Ergänzende prozessorientierte Diagnose (PM, Niveaustufe B)

Aufgabe	Beobachtungen
Wie rechnest du 61 – 7? Wie rechnest du 78 + 6? Kannst du die Rechnung am Rechenrahmen zeigen?	▪ Wird gezählt oder werden Zahlzerlegungen genutzt? Werden die Stellenwerte sicher zugeordnet? ▪ Werden die Strategien am Arbeitsmittel wie im Kopf durchgeführt? Wo treten Zählprozesse auf und bei welchen Schritten können Strukturen genutzt werden? Muss der Rechenrahmen konkret zur Verfügung stehen oder kann er „im Kopf“ verwendet werden?

Wie rechnest du 73 – 20? Kannst du die Rechnung mit Zehnersystem-material zeigen?	▪ Wird die Analogie zu 7 – 2 genutzt oder wird (in Zehner- oder gar Einerschritten) gezählt? Werden die Stellenwerte korrekt zugeordnet? ▪ Werden die Strategien am Arbeitsmittel wie im Kopf durchgeführt? Wo treten Zählprozesse auf und bei welchen Schritten können (dezimale) Strukturen genutzt werden? Muss das Zehnermaterial konkret zur Verfügung stehen oder kann es „im Kopf" verwendet werden?
Wie rechnest du 74 – 36?	▪ Rechnet die Schülerin / der Schüler mit Zahlen unter Nutzung von Zahlbeziehungen oder mit Ziffern? Werden die Stellenwerte berücksichtigt? Treten Zählprozesse bei Teilschritten auf?
Wie rechnest du 71 – 69?	▪ Kann zusätzlich die Grundvorstellung zur Subtraktion als Unterschiedbestimmung aktiviert werden?
Kannst du die Rechnungen am Rechenstrich zeigen?	▪ Kann eine operative Strategie dokumentiert werden? Entspricht die Strategie am Rechenstrich der Strategie beim Kopfrechnen? Wird die „Ergänzungsaufgabe" durch den Abstand der beiden Zahlen 71 und 69 veranschaulicht?

Tabelle III.7-27: Fördervorschläge (PM, Niveaustufe B)

Ziel	Förderung
Überwinden von Zählprozessen	▪ Vgl. Förderinhalt ZZ (Zahlzerlegungen sowie Addition und Subtraktion im ZR 10 automatisieren).
Nicht sichere Nutzung des Stellenwertsystems	▪ Vgl. Förderinhalt SW (Tragfähiges Stellenwertverständnis aufbauen).
Strukturen der Arbeitsmittel werden nicht sicher genutzt	▪ Vgl. Förderinhalt ST (Relevante Arbeitsmittel unter Berücksichtigung der gegebenen Strukturmerkmale und Konventionen nutzen).
Kopfrechenstrategie an Arbeitsmitteln thematisieren	▪ Welche Zahlzerlegung passt zu welcher Aufgabe (Zahlzerlegungen als Punktestreifen zu Rechenaufgaben zuordnen)? ▪ Effektive Nutzung (nicht zählend, Stellenwerte berücksichtigend) der Arbeitsmittel klären und Strategie daran zeigen, versprachlichen und üben
Auch gedankliche Verwendung der Arbeitsmittel	▪ Rechenstrategien nicht nur am konkreten Material beschreiben, sondern auch am vorgestellten Arbeitsmittel. Ausgehend von einer versprachlichten Handlung am Arbeitsmittel soll zunehmend die gedankliche Durchführung unterstützt werden.

Literatur zum Weiterlesen:

PIKAS. (o. J.). *Modul 3.3: Erarbeitung nicht zählender Rechenstrategien.* Abgerufen von *https://pikas.dzlm.de/material-pik/haus-34-ausgleichende-f%C3%B6rderung/haus-3-fortbildungsmaterial/modul-33-erarbeitung-nicht* (Zugriff am 20.06.2019).

PIKAS. (o. J.). *Modul 5.2: Rechnen auf eigenen Wegen.* Abgerufen von *https://pikas.dzlm.de/material-pik/themenbezogene-individualisierung/haus-5-fortbildungs-material/modul-52-rechnen-auf* (Zugriff am 20.06.2019).

Rathgeb-Schnierer, E., & Rechtsteiner, C. (2018). *Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln: Grundlagen – Förderung – Beispiele: Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II*. (3., überarb. u. erw. Aufl.). Berlin, Heidelberg: Springer, S. 108 f., 221 ff.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2015). *Handbuch für den Mathematikunterricht* (Druck A). Braunschweig: Schroedel Westermann, S. 77 ff.

Schipper, W., Wartha, S., & Schroeders, N. (2011). *BIRTE 2: Bielefelder Rechentest für das 2. Schuljahr: Handbuch zur Diagnostik und Förderung*. Braunschweig: Schroedel, S. 141 ff.

Wartha, S., Forcher, C., Finke, L., & Zimmermann, M. (2018). Mach den Unterschied: Wegnehmende oder unterschiedbestimmende Strategien bei Subtraktionsaufgaben bewusst auswählen. *Mathematik differenziert, 1*, 22-30.

Wartha, S., Hörhold, J., Kaltenbach, M., & Schu, S. (2019). *Grundvorstellungen aufbauen: Rechenprobleme überwinden*. Braunschweig: Westermann, S. 52 ff., 73 ff.

7.10 MULTIPLIKATIONS- UND DIVISIONSAUFGABEN RICHTIG LÖSEN (MD)

Das automatisierte Abrufen der Kernaufgaben des kleinen Einmaleins ist die Grundlage für die Nutzung dieser Aufgaben zur Berechnung von weiteren Einmaleinsaufgaben über das Assoziativ- und vor allem das Distributivgesetz. „Nicht-Kernaufgaben“ sollen durch Beziehungen ausgehend von den Kernaufgaben abgeleitet werden. So bilden sich multiplikative Zahlvorstellungen aus (24 kann in 3 Achter, 4 Sechser, 2 Zwölfer ... zerlegt werden), die für die Division und Teilbarkeit von Zahlen wichtig sind (Padberg & Benz, 2011).

Werden Aufgaben des Einmaleins zählend (Aufsagen der Reihe) gelöst, so wird das für den Zahlenraum über Hundert unverzichtbare Distributivgesetz nicht genutzt. Außerdem verhindern Zählprozesse das Nutzen von Zusammenhängen und Vernetzungen zwischen den Aufgaben (Gaidoschik, 2014).

Ausgabe:
Grundlage für die Ausgabe des Förderinhaltes sind die neun Items der Multiplikations- und Divisionsaufgabe. Der Hinweis wird ausgegeben, wenn mehr als vier Items falsch gelöst wurden.

Tabelle III.7-28: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes MD (Niveaustufe B)

Anzahl falsch:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (MD)	19 %	16 %	13 %	10 %	8 %	7 %	7 %	6 %	7 %	7 %	3451
Bewertung	Unauffällig: 66 %					Auffällig: 34 %					

Ergänzende prozessorientierte Diagnose und Fördervorschläge

Tabelle III.7-29: Ergänzende prozessorientierte Diagnose (MD, Niveaustufe B)

Aufgabe	Beobachtungen
Wie löst du 9 – 2, 6 · 5, 7 · 5? Wie löst du 4 · 8, 7 · 6?	▪ Auswendig oder über Zählprozesse? ▪ Auswendig, über Kernaufgaben oder Zählprozesse?
Wie löst du 30 : 5, 18 : 5? Wie löst du 48 : 6?	▪ Schnell über Umkehraufgabe, Ableiten oder Zählprozesse? ▪ Schnell über Umkehraufgabe, Ableiten oder Zählprozesse?
Am Punktefeld ist 7 · 8 dargestellt. Wie viele Punkte sind das?	▪ Welche Strukturen werden genutzt und wo wird gezählt: 5er-Struktur, 10er-Strukur, 25-Struktur?
Lege den Stift so auf das Punktefeld, dass zwei Malaufgaben entstehen, die du sofort lösen kannst.	▪ Wie wird die Aufgabe 7 · 8 in Teilaufgaben zerlegt? Welche Kernaufgaben können zur Lösung herangezogen werden? Ist klar, wie die entstandenen Teilaufgaben genutzt werden können? Schafft die Schülerin / der Schüler das auch ohne Punktefeld?

Tabelle III.7-30: Fördervorschläge (MD, Niveaustufe B)

Ziel	Förderung
Automatisieren der Kernaufgaben	▪ Alle Malaufgaben werden auf Kärtchen geschrieben: Sortiere: Aufgaben, die du sofort weißt und Aufgaben, bei denen du nachdenken musst. ▪ Aufgaben am Punktefeld darstellen und Strukturen nutzen statt zählen
Ableiten der anderen Malaufgaben	▪ Am Punktefeld Malaufgaben darstellen und mit Stift so unterteilen, dass auswendig gewusste Aufgaben entstehen. Zusammenhänge zwischen den „leichten“ und schweren Aufgaben besprechen und dokumentieren (z. B. 7 · 8 = 5 · 8 + 2 · 8)
Zusammenhang Multiplikation und Division nutzen	▪ Bei 48 : 8 wird ein Punktefeld so abgedeckt, dass immer 8 Punkte in einer Zeile sichtbar sind. Wie muss eine zweite Folie gelegt werden, damit 48 Punkte zu sehen sind? --> 6 Zeilen

Literatur zum Weiterlesen:

Gaidoschik, M. (2014). *Einmaleins verstehen, vernetzen, merken: Strategien gegen Lernschwierigkeiten* (1. Aufl.). Seelze-Velber: Klett Kallmeyer Friedrich.

Hasemann, K., & Gasteiger, H. (2014). *Anfangsunterricht Mathematik: Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II* (3., überarb. u. erw. Aufl.). Berlin: Springer Spektrum, S. 133 ff.

KIRA – Modul Multiplikation und Division. (o. J.). Abgerufen von *https://kira.dzlm.de/zahlen-und-operationen/zahl-und-operationsvorstellungen/multiplikation-und-division-lernst%C3%A4nde-und* (Zugriff am 20.06.2019).

PIKAS. (o. J.). *Modul 3: Umgang mit Rechenschwierigkeiten. Einmaleins.* Abgerufen von *https://pikas.dzlm.de/node/595*, *Einsdurcheins*: *https://pikas.dzlm.de/material-pik/ausgleichende-f%C3%B6rderung/haus-3-unterrichts-material/%C3%BCben/11-richtig-%C3%BCben-0* (Zugriff am 20.06.2019).

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2015). *Handbuch für den Mathematikunterricht* (Druck A). Braunschweig: Schroedel Westermann, S. 101 ff.

Schulz, A. (2017). Multiplikation verstehen – durch Anschauungsmaterial zu Grundvorstellungen. *Mathematik lehren, 201*, 17-22.

7.11 GEOMETRISCHE OBJEKTE AUFGRUND IHRER EIGENSCHAFTEN ERKENNEN (BE)

Geometrische Begriffe beschreiben die Einteilung ebener und räumlicher Objekte. „Wir sprechen von einem Begriff, wenn damit nicht nur ein einzelner Gegenstand – oder auch ein singuläres Ereignis usw. – bezeichnet wird, sondern eine Kategorie, eine Klasse assoziiert wird, in die der konkrete Gegenstand einzuordnen ist.“ (Franke & Reinhold, 2016, S. 116).

Im geometrischen Kontext können Objekte, Eigenschaften und Relationen in Begriffsklassen beschrieben werden. Hierbei sind

- Objektbegriffe, z. B. Viereck, Dreieck, Quadrat, Würfel,
- Eigenschaftsbegriffe z. B. quadratisch, rund, rechtwinklig, parallel,
- Relationsbegriffe z. B. gleich lang, senkrecht auf, parallel zu.

Ohne ein Begriffsverständnis ist eine Kommunikation über geometrische Objekte nicht zielführend (Hasemann & Gasteiger, 2014, S. 176). Auch sind zahlreiche Begriffe grundlegend für die Begriffsbildung weiterer geometrischer Objekte. Insbesondere werden Körper häufig durch die Eigenschaften ihrer Begrenzungsflächen beschrieben.

Charakteristisch für die Begriffsbildung ist die Organisation der Begriffe in hierarchische Beziehungen (Breidenbach, 1964).

Aus Objektbegriffen kann durch Hinzufügen weiterer Eigenschaften eine neue (Unter-)Klasse gebildet werden. Dieses Spezifizieren zeigt sich zum Beispiel im „Haus der Vierecke“: „Ein Quadrat ist ein Rechteck mit lauter gleich langen Seiten.“ Der hier verwendete Oberbegriff Rechteck kann seinerseits hervorgegangen sein als Eigenschaftsbegriff: „Ein Rechteck ist ein Viereck mit drei rechten Winkeln.“ Es werden hier weitere Begriffe wie Winkel, Seiten herangezogen.

Typische Aufgabenstellungen zur Untersuchung des Begriffsverständnisses sind:

- Hierarchische Struktur: Ist ein Würfel auch ein Quader? Ist ein Quadrat auch ein Rechteck?
- Nicht prototypische Darstellungen zu den geometrischen Objekten: Ein Quadrat, dessen Seiten nicht parallel zu den Blatträndern sind

Die Bearbeitung dieser Aufgaben kann zeigen, ob das Begriffsverständnis auf abstrahierend-relationalem Denken (van Hiele & van Hiele, 1986) basiert.

Ausgabe:
Für die Ausgabe des Förderinhaltes werden alle Items der Aufgaben „Begriffsbildung“ (21 Items), „Begrenzung“ (5 Items) und „Faltwinkel“ (4 Items) herangezogen. Bei der „Begriffsbildung“ werden folgende geometrische Objekte untersucht: Würfel (4 Items), Quader (5 Items), Viereck (5 Items), Dreieck (3 Items) und Rechteck (4 Items).

Der Förderinhalt wird ausgegeben, wenn mehr als elf Fehler gemacht wurden. Das bedeutet, dass bei elf Fehlern noch kein expliziter Förderinhalt ausgegeben wird, wenn also beispielsweise alle Antworten zu Rechtecken, Würfeln und Dreiecken falsch waren.

Tabelle III.7-31: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes BE (Niveaustufe B)

Anzahl falsch:	0-5	6	7	8	9	10	11	12	13	14-16	17-30	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (BE)	6 %	7 %	11 %	13 %	14 %	13 %	11 %	9 %	7 %	8 %	1 %	3098
Bewertung	Unauffällig: 75 %							Auffällig: 25 %				

Ergänzende prozessorientierte Diagnose und Fördervorschläge

Tabelle III.7-32: Ergänzende prozessorientierte Diagnose (BE, Niveaustufe B)

Aufgabe	Beobachtungen
Auswahl von Objekten bzw. ein Objekt vorlegen: Wo siehst du ▪ Dreiecke/Kreise/Vierecke/Quadrate/ Rechtecke? ▪ Quader, Würfel? ▪ Faltwinkel, keine Faltwinkel? Warum ist es ein Dreieck, …? Warum ist das kein Dreieck, ...? Vorlegen nicht prototypischer Objekte: Ist das ein Rechteck? Warum? Warum nicht?	▪ Kann die Schülerin / der Schüler die verschiedenen geometrischen Figuren erkennen und seine Auswahl erklären? ▪ Werden relevante Eigenschaften und Relationen zur Erklärung genutzt oder wird mit „dem Aussehen“ argumentiert?“ ▪ Werden die hierarchischen Beziehungen berücksichtigt (auch Quadrate sind Vierecke, auch Würfel sind Quader)? ▪ Werden die Objekte auch erkannt, wenn sie nicht prototypisch sind/liegen? ▪ Werden dreidimensionale Objekte (Würfel) mit Begriffen zu zweidimensionalen Objekten (Quadrat) bezeichnet?
Zeichne ein Rechteck (Quadrat, ...) – worauf achtest du? Zeichne noch ein anderes Rechteck (…).	▪ Zeichnet die Schülerin / der Schüler das geforderte Objekt? Wählt sie/er nur prototypische Darstellungen? ▪ Werden relevante Eigenschaften und Relationen zur Erklärung genutzt oder wird mit „dem Aussehen“ argumentiert?“
Ist ein Quadrat auch ein Rechteck? Ein Viereck? Ist ein Quader immer auch ein Würfel? Ist ein Viereck auch ein Würfel? Warum? Warum nicht?	▪ Können die hierarchischen Beziehungen auch ohne die konkreten Objekte begründet werden?

Tabelle III.7-33: Fördervorschläge (BE, Niveaustufe B)

Ziel	Förderung

Abstrahieren von Eigenschaften	▪ Sortieren von Objekten, Beschreiben der Gemeinsamkeiten, nach denen die Sortierung vorgenommen wurde. Zunächst ohne Richtig und Falsch
	▪ Aussortieren („eins passt nicht – welches – warum?") von Objekten
	▪ Vergleichen – Vorlegen von zwei Objekten (Gemeinsamkeiten und Unterschiede beschreiben)
	▪ Sammeln und Dokumentieren der gewählten Begriffe
	▪ Finden der Eigenschaften an Objekten des Alltags, z. B. Erkennen eines rechten Winkels mithilfe des Faltwinkels:
	  ▪ Finde mithilfe des Faltwinkels rechte Winkel im Klassenraum.
	  ▪ Zeige, wie du es machst.

Spezifizieren von Objekten	▪ Aus einer Klasse von Objekten (z. B. Dreiecke) einige mit vorgegebenen Eigenschaften aussortieren (z. B. ein Faltwinkel passt in eine Ecke) ▪ Aus einer Klasse von Objekten (z. B. flächige Figuren) einige mit vorgegebener Bezeichnung aussortieren (z. B. alle Rechtecke) ▪ Können die aussortierten Objekte auch noch anders bezeichnet werden (z. B. Quadrat)? ▪ Wie kannst du prüfen, ob es ein (Rechteck …) ist?
Konstruieren von Objekten	▪ Bauen, Legen, Falten, Zeichnen, Spannen (Geobrett) von vorgegebenen Objekten (z. B. nicht quadratische Rechtecke und quadratische Rechtecke) ▪ Ergänzen von begonnenen Zeichnungen zu einem vorgegebenen Objekt: Worauf musst du achten?

Diese Übungen können sowohl mit konkret-sichtbaren als auch mit nur fühlbaren (in blickdichtem Beutel) oder nur gedanklich beschriebenen Objekten durchgeführt werden. Ausgangspunkt für jeden Lernprozess sind immer die konkreten Objekte.

Literatur zum Weiterlesen:

Franke, M., & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule: Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II* (3. Aufl.). Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Hasemann, K., & Gasteiger, H. (2014). *Anfangsunterricht Mathematik: Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II* (3., überarb. u. erw. Aufl.). Berlin: Springer Spektrum, S. 174 ff., 184 f.

Rasch, R. (2018). Ebene Figuren im Geometrieunterricht. *Mathematik differenziert, 4*, 6-9.

Wollring, B. (2016). Wie entstehen geometrische Begriffe? Mentale Übungen an explodierenden Würfeln und schmelzenden Kugeln. *Mathematik differenziert, 1*, 6-9.

7.12 EBENE FIGUREN AUF ACHSENSYMMETRIE UNTERSUCHEN SOWIE EIGENSCHAFTEN DIESER SYMMETRIE ERKENNEN UND NUTZEN (SY)

Die Entwicklung eines Symmetrieverständnisses ist von zentraler Bedeutung. Dies hat vor allem zwei Gründe:

- Die Eigenschaft der Symmetrie kann zahlreiche geometrische Objekte charakterisieren und ist somit zentraler Bestandteil für die Begriffsbildung.
- Die Achsenspiegelung ist die erste und grundlegende Kongruenzabbildung. Alle Kongruenzabbildungen können auf Achsenspiegelungen zurückgeführt werden.

Das Symmetrieverständnis befähigt somit zur Untersuchung geometrischer Objekte auf Symmetrie und ermöglicht die Durchführung symmetrischer Abbildungen.

Hierbei kann die Spiegelachse am Original anliegen, dann entsteht durch die Spiegelung eine in sich geschlossene achsensymmetrische Figur. Wenn die Spiegelachse nicht direkt anliegt, so entsteht durch die Spiegelung eine zweite Figur, die zur ersten deckungsgleich ist.

Wenn Objekte auf Symmetrie untersucht werden sollen, ist eine mögliche Vorgehensweise, die Symmetrieachse(n) und die Spiegelung zu rekonstruieren.

Ausgehend von den Zusammenhängen zwischen Bild und Original bei der Achsenspiegelung können folgende Eigenschaften für spiegelsymmetrische Figuren identifiziert werden:

- Alle Punkte der Spiegelfigur liegen von der Spiegelachse gleich weit entfernt wie die Punkte der Originalfigur.
- Die (gedachte) Verbindungslinie zwischen diesen Punkten liegt senkrecht zur Spiegelachse (Götz & Schulz, 2018; Ruwisch, 2013).
- Winkel- und Längenbeziehungen bleiben erhalten.

Ohne Symmetrieverständnis können daher Objekte nicht sicher auf Symmetrie untersucht werden. Insbesondere kann nicht angegeben werden, ob bzw. wie viele Symmetrieachsen vorhanden sind. Dies ist sehr problematisch für die Objektbegriffsentwicklung. Außerdem können ohne Symmetrieverständnis, Spiegelungen und damit die grundlegendsten geometrischen Abbildungen nicht durchgeführt werden.

Ausgabe:
Für die Ausgabe des Förderinhaltes werden die fünf Items der Aufgabe „Achsenanzahl“, die zwei Items der Aufgabe „Spiegeln“ (auf Kästchen wird so geklickt, dass eine achsensymmetrische Figur entsteht) und die sechs Items der Aufgabe „Achsenspiegelung“ untersucht.

Werden mehr als sieben der 13 Items falsch bearbeitet, wird der Förderinhalt ausgegeben.

Tabelle III.7-34: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes SY (Niveaustufe B)

Anzahl falsch:	0-2	3	4	5	6	7	8	9	10	11-13	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (SP_SY)	2 %	5 %	10 %	17 %	20 %	18 %	14 %	9 %	3 %	2 %	3254
Bewertung	Unauffällig: 72 %						Auffällig: 28 %				

Ergänzende prozessorientierte Diagnose und Fördervorschläge

Tabelle III.7-35: Ergänzende prozessorientierte Diagnose (SY, Niveaustufe B)

<table>
<tr><th>Aufgabe</th><th>Beobachtungen</th></tr>
<tr><td>Einfach, mehrfach und nicht symmetrische Figuren vorlegen:
Sortiere: Symmetrisch oder nicht symmetrisch? Begründe. Zeichne Spiegelachsen ein.</td><td rowspan="3">▪ Werden mehrfach symmetrische Figuren (z. B. Kreis oder Quadrat) überhaupt als symmetrisch erkannt?
▪ Wie wird die Symmetrie überprüft bzw. widerlegt:
  ▪ Werden Objekte konkret oder in der Vorstellung gefaltet?
  ▪ Wird mit Längen und Abständen gearbeitet und argumentiert?
  ▪ Wird nur mit dem „Aussehen“ argumentiert?</td></tr>
<tr><td>Objekte mit eingezeichneten Geraden vorgeben:
Welche Geraden sind Symmetrie-achsen (Warum?), welche sind keine (Warum nicht?)?</td></tr>
<tr><td>Wie kannst du bei diesem Objekt herausfinden, ob es achsensymmetrisch ist?</td></tr>
<tr><td>Wie spiegelst du die Figur an der Achse? Beschreibe, wie du vorgehst.
Stelle dir vor, du stellst einen Spiegel auf den Strich. Wie muss das fertige Bild aussehen (insbesondere auch an Achsen, die nicht vertikal und horizontal sind)?</td><td>▪ Wird die Figur gespiegelt oder verschoben?
▪ Wird die Figur gedreht?
▪ Bleiben Abstände, Längen und Winkel erhalten?
▪ Wird zu einer neuen, aber nicht symmetrischen Figur ergänzt?
▪ Wird die vorgegebene Spiegelachse beachtet (insbesondere bei „schrägen“ Achsen)?</td></tr>
</table>

Alle bisherigen Punkte sowohl mit in sich geschlossenen Figuren (Spiegelachse am Objekt) als auch mit Figurenpaaren (Spiegelachse nicht am Objekt) durchführen.

Tabelle III.7-36: Fördervorschläge (SY, Niveaustufe B)

Ziel	Förderung
Achsen-spiegelungen handelnd durchführen	▪ Falten und schneiden: Anschließendes Aufklappen – die Faltkante ist Symmetrieachse –, diese kann am Original anliegen oder sich daneben befinden. Beobachtung: Es entsteht eine spiegelsymmetrische Figur oder zwei zueinander spiegelsymmetrische Figuren. ▪ Falten, durchstechen und aufklappen: Die Faltkante ist Symmetrieachse. ▪ Das Objekt ist auf Pauspapier vorgegeben: Das Papier wird gefaltet und die Figur wird abgepaust. Aufklappen. Die Faltkante ist Symmetrieachse. ▪ Spannen am Geobrett: achsensymmetrische Figuren oder zueinander symmetrische Flächen (Wo ist die Spiegelachse?) ▪ Spiegelachse(n) können vertikal, horizontal oder „schräg“ sein. ▪ Beschreibung der Eigenschaften der entstandenen Objekte ▪ Verbindungslinien zwischen markanten Punkten einzeichnen ▪ Fokus auf der Entfernung markanter Punkte von Original und Bild in Bezug auf die Spiegelachse legen
Achsen-spiegelungen zeichnerisch durchführen	▪ Ergänzen/Zeichnen von spiegelbildlichen Figuren auf Karopapier an oder außerhalb der Spiegelachse ▪ MIRA-Spiegel an oder neben Figuren legen und Bild im Spiegel nachzeichnen: Die Markierung beim Spiegel ist die Symmetrieachse.

	▪ Überprüfen von gezeichneten Figuren mit dem Spiegel (wird auf die Spiegelachse gestellt) ▪ Sowohl mit vertikaler oder horizontaler Spiegelachse als auch mit „schräger" Spiegelachse
Achsen-symmetrie anschaulich erkennen und begründen	▪ Finden der Spiegelachse(n) durch Falten und Schneiden: Diskussion folgender Impulse: ▪ Falte die Figur. Falte so, dass die Teile genau aufeinander passen. ▪ Falte so, dass die beiden Figuren auf Deckung kommen. ▪ Konkrete oder vorgestellte Faltlinien als Spiegelachsen annehmen und überprüfen (durch Falten oder Messen). Spiegelachsen sind entweder direkt am Objekt (eine achsensymmetrische Figur) oder zwischen den Objekten (zueinander achsensymmetrische Figuren). ▪ Passen beide Teile genau aufeinander? Beschreibe. ▪ Wo passen die Teile nicht aufeinander? Beschreibe. ▪ Erkennen, nutzen und nachweisen (durch Falten oder Messen), dass Punkte beider Hälften gleich weit von der Symmetrieachse entfernt liegen ▪ Einfach, mehrfach und nicht symmetrische Figuren nach symmetrisch oder nicht symmetrisch sortieren. Begründe. ▪ Zeichne Spiegelachsen ein. ▪ Hierbei können Spiegelachsen horizontal, vertikal oder (anspruchsvoll) „schräg" sein.
Untersuchen achsen-symmetrischer Figuren/Bilder	▪ Betrachtung einer achsensymmetrischen Figur bzw. zweier zueinander achsensymmetrischen Figuren und Diskussion folgender Impulse: ▪ Warum passen die Teile zusammen? ▪ Woran hast du erkannt, dass das Bild spiegelsymmetrisch ist? ▪ Wo kann die Spiegelachse sein, wo kann sie nicht sein? ▪ An welchen Punkten kann man schnell prüfen, ob gespiegelt wurde? ▪ Markieren von Original und Bild ▪ Erkennen, dass die Punkte von Original und Bild gleich weit von der Symmetrieachse entfernt liegen. ▪ Male das Original blau und das Bild rot an. ▪ Achte auf den Abstand zur Symmetrieachse. Bestimme den Abstand.

Literatur zum Weiterlesen:

Götz, D., & Schulz, A. (2018). Aus Fehlern lernen: Schülerlösungen als Ausgangspunkt für Diagnose und Förderung. *Grundschulmagazin, 4*, 33-37.

Hasemann, K., & Gasteiger, H. (2014). *Anfangsunterricht Mathematik*. *Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II*. Berlin: Springer Spektrum, S. 177, 189 f.

Müller, G. N., Wittmann, E. C., & Wolff, A. (2006). *Das kleine Formenbuch Teil 1: Legen, bauen, spiegeln* (1. Aufl.). Seelze-Velber: Kallmeyer Friedrich.

Ruwisch, S. (2013). Symmetrie – ein vielfältiger Begriff. *Mathematik differenziert, 3*, 10-13.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2015). *Handbuch für den Mathematikunterricht* (Druck A). Braunschweig: Schroedel Westermann, S. 135 ff., 169 ff.

Schulz, A. (2017). Symmetrie in freien Eigenproduktionen: Symmetrien selbst (er-)finden. *Fördermagazin Grundschule, 4*, 14-18.

Spiegel, H. (2006). *Spiegeln mit dem Spiegel: Programm Mathe 2000* (2. Aufl., 10. Dr.). Leipzig: Klett.

Wollring, B. (2006). Erwerben, Korrespondieren, Festhalten: Raumerfahrungen im Mathematikunterricht der Grundschule. *Grundschulmagazin, 5*, 8-12.

Wollring, B. (2006). Kindermuster und Pläne dazu – Lernumgebungen zur frühen geometrischen Förderung. In M. Grüßing & A. Peter-Koop (Hrsg.), *Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule: Beobachten, fördern, dokumentieren* (S. 80-102). Offenburg: Mildenberger.

7.13 RÄUMLICHE BEWEGUNGEN UND BEZIEHUNGEN MENTAL NACHVOLLZIEHEN UND VORSTELLEN UND MENTAL IM RAUM ORIENTIEREN (WV)

Die Fähigkeiten, den Raum und räumliche Objekte wahrzunehmen, sich darin und mit ihnen zu orientieren sowie konkret und gedanklich im Raum und mit räumlichen Objekten zu operieren, ist grundlegend für einen erfolgreichen Umgang mit alltäglichen und schulischen Situationen. Insbesondere „stellt die Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens eines der Hauptziele des Geometrieunterrichts dar“ (Franke & Reinhold, 2016, S. 39).

Räumliche Fähigkeiten können vor allem in drei Bereiche gegliedert werden. Diese hängen zusammen und können – beispielsweise zur Konstruktion von Fördermaßnahmen – noch weiter spezifiziert werden:

(1) Räumliche Beziehungen: Beziehungen zwischen Objekten werden erfasst bzw. vorgestellt. Wurde ein Objekt (gedanklich) gedreht oder gespiegelt? Beispiele: Wie viele Würfel sind im Würfelbauwerk verbaut? Berühren sich der rote und der gelbe Quader im Bauwerk?

(2) Räumliche Veranschaulichung: Gedankliches Operieren mit Objekten (Falten, Zerlegen, Verschieben), die somit ihre räumliche Beziehung zu anderen Objekten ändern. Beispielsweise: Ein Quadrat soll zunächst nach links und dann nach oben verschoben werden.

(3) Räumliches Orientieren: Orientierung im wahrgenommenen Raum sowie gedankliches Hineinversetzen in andere Perspektiven. Beispielsweise: Auf dem Tisch sind vier Spielsteine und Lea sitzt links von dir – welchen Spielstein sieht sie links/hinten?

Beim räumlichen Vorstellungsvermögen werden nun räumliche Objekte auch gedanklich repräsentiert und verändert. Insbesondere die gedankliche Veränderung von Objekten wird untersucht, indem aufgrund eines Bildes Rückschlüsse auf nicht sichtbare Objekte getroffen werden müssen (Würfelbauwerke).

Ohne Raumvorstellung sind grundlegende Situationen des Alltags nicht zu bewältigen: Wie wird sich ein fahrendes Auto weiterbewegen? Wie gelingt eine Orientierung auf Landkarten und Plänen? Auch im Unterricht greifen Inhalte jenseits des Mathematikunterrichts auf räumliche Kompetenzen zurück: Im Sachunterricht werden räumliche Situationen zweidimensional im Bild dargestellt, beim Sport findet eine Orientierung an Markierungen etc. statt. Selbstverständlich sind tragfähige Kompetenzen zur Raumvorstellung unverzichtbar für ein erfolgreiches Weiterlernen im Geometrieunterricht. Das konkrete und zunehmen auch gedankliche In-Beziehung-Stellen geometrischer Objekte ist ein Leitgedanke des Geometrieunterrichts (Franke & Reinhold, 2016, S. 80).

Ausgabe:
Die Grundlage für die Ausgabe des Förderinhaltes sind die Bearbeitungen der Aufgaben „Bausteine“ (4 Items), „Würfelbauwerke“ (3 Items), „Verschiebung“ (2 Items) und „Spielfigur“ (5 Items). Werden mehr als fünf Fehler gemacht, wird der Förderinhalt ausgegeben.

Tabelle III.7-37: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes WV (Niveaustufe B)

Anzahl falsch:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10-14	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (WV)	1 %	6 %	13 %	13 %	18 %	20 %	14 %	7 %	5 %	2 %	1 %	3283
Bewertung	Unauffällig: 71 %					Auffällig: 29 %						

Ergänzende prozessorientierte Diagnose und Fördervorschläge
Tabelle III.7-38: Ergänzende prozessorientierte Diagnose (WV, Niveaustufe B)

Aufgabe	Beobachtungen
Hebe deine linke Hand. Wo ist meine rechte Hand (über Eck oder gegenüber sitzend)? Woher weißt du, dass das meine rechte Hand ist?	▪ Weiß die Schülerin / der Schüler, wo (an ihr/ihm selbst) rechts und links ist? ▪ Wie geht die Schülerin / der Schüler vor, um sich in eine andere Perspektive zu versetzen (oder überträgt sie/er die eigene Sichtweise direkt?) ▪ Wie kann dieses „Eindenken“ in ein Gegenüber begründet werden?
Konkretes Nachbauen von Würfelbauwerken, die als Bauplan oder Schrägbild vorgegeben sind	▪ Wie wird beim Bauen vorgegangen? ▪ Kann eine zweidimensionale Darstellung im Raum interpretiert werden? ▪ Kann vor dem Bauprozess bereits die Anzahl der nötigen Würfel bestimmt werden? ▪ Werden „versteckte“ Würfel berücksichtigt?
Vergleichen von Bildern von Bauwerken aus verschiedenen Perspektiven: Kann das das gleiche Bauwerk sein? Begründe.	▪ Wie werden Unterschiede und Gemeinsamkeiten identifiziert? ▪ Womit werden Differenzen begründet? ▪ Ist die Schülerin / der Schüler in der Lage, sich in eine andere Perspektive zu versetzen?
Auf einem Raster (Schachbrett) wird eine Spielfigur nach den Anweisungen „links, rechts, vor, zurück“ bewegt.	▪ Kann die Schülerin / der Schüler die Begriffe in Bewegungen umsetzen? ▪ Orientiert sich die Schülerin / der Schüler an der eigenen Perspektive oder an der Perspektive der Spielfigur?

Tabelle III.7-39: Fördervorschläge (WV, Niveaustufe B)

Ziel	Förderung
Beziehungen zwischen Objekten untersuchen und beschreiben ▪ bei realen Objekten ▪ bei Abbildungen realer Objekte ▪ beim Vergleich von Objekten und Abbildungen	▪ Bauwerke nach einer realen Vorlage nachbauen ▪ Untersuchungen an konkreten Bauwerken (z. B. aus Würfeln oder Quadern, ein- oder mehrfarbig) ▪ Beschreibungen (Wortspeicher: neben, auf, zwischen, hinter, rechts unten …) ▪ Fotos von Bauwerken machen und Objektzusammenhänge am Bild beschreiben ▪ Bauwerke nach bildlicher Vorlage nachbauen und beschreiben ▪ Bauwerke nach mündlichen Beschreibungen bauen (z. B. Partnerdiktat) ▪ Vergleichen der Zusammenhänge zwischen Bild und konkretem Bauwerk (z. B. anhand markanter Merkmale). Hilfestellung: zunächst farbige Würfel nutzen ▪ Bestimmung der Anzahl verbauter Würfel ▪ Zielführende Strategie: markante Punkte am Objekt und in den Abbildungen identifizieren und für Vergleiche nutzen, Zerlegen in Schichten oder Stangen
Zerlegen und Zusammensetzen von geometrischen Figuren	▪ Ein Blatt wird zerschnitten (1x, 2x …). ▪ Das zerschnittene Blatt soll zur Ausgangsfigur wieder zusammen-gesetzt werden. ▪ Hierbei Orientierung an den Merkmalen des Ausgangsblattes (Rechteck). ▪ Beschreibung der Vorgehensweise ▪ Bei welchen Schnitten kann die Ausgangsform leicht gefunden werden, wann ist es schwer? ▪ Tangram oder weitere Legepuzzles: ▪ Konkretes Auslegen von vorgegebenen leeren oder vorstrukturierten Umrissen mit verschiedenen ebenen Figuren ▪ Weitere Fördermöglichkeiten: Vgl. Förderinhalt SY (Ebene Figuren auf Achsensymmetrie untersuchen sowie Eigenschaften dieser Symmetrie erkennen und nutzen). ▪ Würfelbauwerke nachbauen, zu Quadern (Würfeln) ergänzen. Worauf achtest du? Baue den vollständigen Quader daneben.

Bestimmung von Objekten aus anderer Perspektive	▪ Reale Situation nachspielen, in der die Schülerin / der Schüler verschiedene Perspektiven einnehmen kann. Z. B. sitzen sich Schülerinnen und Schüler gegenüber oder „über Eck“ und beschreiben zunächst die Umgebung aus der eigenen Perspektive („ich sehe die Tafel rechts und die Lampe oben“), anschließend aus der Perspektive der anderen Schülerin oder des anderen Schülers („du siehst die Tafel links und die Lampe oben“).
	▪ Erarbeitung von Strategien:
	  ▪ Wo ist der rechte Arm der eigenen Person? Eindrehen in Gedanken in die andere Person. Anwendung „Wo ist rechts?“ für die andere Person
	  ▪ Fotos werden von derselben nachgebauten Situation aus unterschiedlichen Perspektiven aufgenommen (auch Fehler einbauen).

	▪ Sich in Situationen auf Bildern hineinversetzen (z. B. Aufgabe „Spielfigur“)
Bewegungen auf der Ebene nachvollziehen, durchführen und beschreiben	▪ Eine Spielfigur wird auf ein Schachbrett gestellt. ▪ Nach Anweisung soll sie aus der Perspektive der Schülerin / des Schülers nach rechts, links … bewegt werden. ▪ Die Spielfigur wird bewegt und die Schülerin / der Schüler soll die Bewegung mit den Begriffen „rechts, links …“ beschreiben. ▪ Die Spielfigur soll gedanklich bewegt werden (drei Felder nach links und zwei nach vorne) und das Zielfeld bestimmt werden. ▪ Hilfsvokabular: Norden, Süden, Westen, Osten (vgl. Spiel Schauen und Bauen)

Literatur zum Weiterlesen:

Etzold, H. (2015). *Klötzchen: Version 3.0* [Mobile application software]. Abgerufen von *https://itunes.apple.com/de/app/klötzchen/id1027746349?mt=8* (Zugriff am 20.06.2021).

Hasemann, K., & Gasteiger, H. (2014). *Anfangsunterricht Mathematik*. *Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II*. Berlin: Springer Spektrum, S. 153.

Müller, G. N., Röhr, M., & Wittmann E. Ch. (1997). *Schauen und Bauen. Geometrische Spiele mit Quadern*. Leipzig: Klett.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2015). *Handbuch für den Mathematikunterricht* (Druck A). Braunschweig: Schroedel Westermann, S. 147 ff.

Spiegel, H., & Spiegel, J. (2003). *Potz-Klotz: 2 bis 6 Spieler, ab 7 Jahren*. *Spiegels Spiele*. Seelze-Velber: Kallmeyer.

Wollring, B. (2016). Wie entstehen geometrische Begriffe? Mentale Übungen an explodierenden Würfeln und schmelzenden Kugeln. *Mathematik differenziert, 1*, 6-9.

7.14 LITERATUR

Benz, C. (2005). Erfolgsquoten, Rechenmethoden, Lösungswege und Fehler von Schülerinnen und Schülern bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 100. *Texte zur mathematischen Forschung und Lehre* (Bd. 40). Hildesheim: Franzbecker.

Benz, C., & Schulz, A. (2013). Zahlzerlegungen. *Fördermagazin Grundschule, 4,* 32-36.

Benz, C., Peter-Koop, A., & Grüßing, M. (2015). *Frühe mathematische Bildung: Mathematiklernen der Drei- bis Achtjährigen*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Breidenbach, W. (1964). *Raumlehre in der Volksschule* (7. Aufl.). Hannover: Schroedel.

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education, 15 (3)*, 179. Abgerufen von *https://doi.org/10.2307/748348* (Zugriff am 26.06.2021).

Etzold, H. (2015). *Klötzchen: Version 3.0* [Mobile application software]. Abgerufen von *https://itunes.apple.com/de/app/klötzchen/id1027746349?mt=8* (Zugriff am 26.06.2021).

Franke, M., & Ruwisch, S. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule: Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II.* (2. Aufl.). Heidelberg: Spektrum.

Franke, M., & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule: Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II.* (3. Aufl.). Berlin: Springer Spektrum.

Fromme, M., Wartha, S., & Benz, C. (2011). Grundvorstellungen zur Subtraktion. *Grundschulmagazin, 4*, 35-40.

Fromme, M. (2016). *Stellenwertverständnis im Zahlenraum bis 100: Theoretische und empirische Analysen*. Abgerufen von https://doi.org/10.1007/978-3-658-14775-4 (Zugriff am 26.06.2021).

Gaidoschik, M. (2010). *Wie Kinder rechnen lernen – oder auch nicht: Eine empirische Studie zur Entwicklung von Rechenstrategien im ersten Schuljahr*. Frankfurt am Main: Lang.

Gaidoschik, M. (2014). *Einmaleins verstehen, vernetzen, merken: Strategien gegen Lernschwierigkeiten* (1. Aufl.). Seelze-Velber: Klett Kallmeyer Friedrich.

Götz, D., & Schulz, A. (2018). Aus Fehlern lernen: Schülerlösungen als Ausgangspunkt für Diagnose und Förderung. *Grundschulmagazin, 4*, 33-37.

Gray, E. M. (1991). An analysis of diverging approaches to simple arithmetic: Preference and its consequences. *Educational Studies in Mathematics, 22 (6)*, 551-574. Abgerufen von https://doi.org/10.1007/BF00312715 (Zugriff am 26.06.2021).

Häsel-Weide, U., Nührenbörger, M., Moser Opitz, E., & Wittich, C. (2013). *Ablösung vom zählenden Rechnen: Fördereinheiten für heterogene Lerngruppen*. Seelze-Velber: Klett Kallmeyer Friedrich.

Häsel-Weide, U. (2016). Vom Zählen zum Rechnen: Struktur-fokussierende Deutungen in kooperativen Lernumgebungen. *Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts* (Bd. 21). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Hasemann, K., & Gasteiger, H. (2014). *Anfangsunterricht Mathematik: Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II* (3., überarb. u. erw. Aufl.). Berlin: Springer Spektrum. Abgerufen von https://doi.org/10.1007/978-3-642-40774-1 (Zugriff am 30.06.2021).

Kaufmann, S., & Wessolowski, S. (2006). *Rechenstörungen: Diagnose und Förderbausteine* (1. Aufl.). Seelze-Velber: Klett Kallmeyer Friedrich.

Krauthausen, G. (2018). *Einführung in die Mathematikdidaktik: Grundschule: Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II* (4. Aufl.). Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum. Abgerufen von https://doi.org/10.1007/978-3-662-54692-5 (Zugriff am 30.06.2021).

Lehrer, R. (2003). Developing understanding of measurement. In J. Kilpatrick, G. W. Martin & D. Schifter (Hrsg.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (S. 179-192). Reston, VA: NCTM.

Lorenz, J. H. (1992). *Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht: Mentales visuelles Operieren und Rechenleistung* (1. Aufl.). Göttingen: Hogrefe.

Lüken, M. (2010). The relationship between early structure sense and mathematical development in Primary School. In M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Hrsg.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, S. 241-248). Belo Horizonte, Brazil: PME.

Maaß, K. (2011). *Mathematisches Modellieren in der Grundschule*. Abgerufen von http://i.bsbb.eu/1032 (Zugriff am 30.06.2021).

Maier, A., & Benz, C. (2014). Children's constructions in the domain of geometric competencies (in two different instructional settings). In U. Kortenkamp, B. Brandt, C. Benz, G. Krummheuer, S. Ladel & R. Vogel (Hrsg.), *Early mathematics learning: Selected papers of the POEM Conference 2012* (S. 173-188). New York: Springer.

Müller, G. N., Röhr, M. & Wittmann, E. Ch. (1997). *Schauen und Bauen. Geometrische Spiele mit Quadern.* Leipzig: Klett.

Müller, G. N., Wittmann, E. C., & Wolff, A. (2006). *Das kleine Formenbuch Teil 1: Legen, bauen, spiegeln* (1. Aufl.). Seelze-Velber: Kallmeyer Friedrich.

Padberg, F., & Benz, C. (2011). *Didaktik der Arithmetik* (4. Aufl.). Heidelberg: Spektrum.

Rasch, R. (2016): *Textaufgaben für Grundschulkinder zum Denken und Knobeln: Mathematische Probleme lösen – Strategien entwickeln* (1. Aufl.). Seelze-Velber: Klett Kallmeyer Friedrich.

Rasch, R. (2018). Ebene Figuren im Geometrieunterricht. *Mathematik Differenziert, 4,* 6-9.

Rathgeb-Schnierer, E., & Rechtsteiner, C. (2018). *Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln: Grundlagen – Förderung – Beispiele: Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II*. Berlin, Heidelberg: Springer. Abgerufen von *https://doi.org/10.1007/978-3-662-57477-5* (Zugriff am 30.06.2021).

Reinhold, S. (2018). Geometrische Abbildungen in der Vorstellung: Relevanz und (individuelle) Strategien von Grundschulkindern. In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Inhalte im Fokus: Mathematische Strategien entwickeln: Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2018. Mathematikdidaktik Grundschule* (S. 41-56). Bamberg.

Riley, M. S., Greeno, J. G., & Heller, J. I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In H. P. Ginsburg (Hrsg.), *The development of mathematical thinking* (S. 153-196). New York: Academic Press.

Roth, J., & Wittmann, G. (2014): Ebene Figuren und Körper. In H.-G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth, …, G. Wittmann (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (2. Aufl., S. 123-156). Berlin: Springer Spektrum.

Rückert, S., Stopp, M., & Wartha, S. (2015). Zusammen Zahlen zerlegen. *Fördermagazin Grundschule, 4,* 30-38.

Ruwisch, S. (2013). Symmetrie: ein vielfältiger Begriff. *Mathematik differenziert, 3*, 10-13.

Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Braunschweig: Schroedel.

Schipper, W., Wartha, S., & Schroeders, N. (2011). *BIRTE 2: Bielefelder Rechentest für das 2. Schuljahr: Handbuch zur Diagnostik und Förderung*. Braunschweig: Schroedel.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2015). *Handbuch für den Mathematikunterricht* (Druck A). Braunschweig: Schroedel Westermann.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2017). *Handbuch für den Mathematikunterricht*. Braunschweig: Schroedel Westermann.

Schulz, A., & Wartha, S. (2011). Materialeinsatz im Mathematikunterricht: Risiken und Chancen. *MNU Primar, 3 (2),* 49-56.

Schulz, A. (2014). *Fachdidaktisches Wissen von Grundschullehrkräften: Diagnose und Förderung bei besonderen Problemen beim Rechnenlernen*. Heidelberg: Springer.

Schulz, A. (2017a). Multiplikation verstehen: Durch Anschauungsmaterial zu Grundvorstellungen*. Mathematik lehren, 201*, 17-22.

Schulz, A. (2017b). Symmetrie in freien Eigenproduktionen: Symmetrien selbst (er-)finden. *Fördermagazin Grundschule, 4*, 14-18.

Selter, C., & Zannetin, E. (2018): *Mathematik unterrichten in der Grundschule: Inhalte – Leitideen – Beispiele* (1. Aufl.). Seelze-Velber: Klett Kallmeyer Friedrich.

Spiegel, H., & Spiegel, J. (2003*). Potz-Klotz: 2 bis 6 Spieler, ab 7 Jahren. Spiegels Spiele.* Seelze-Velber: Kallmeyer.

Spiegel, H. (2006). *Spiegeln mit dem Spiegel: Programm Mathe 2000* (2. Aufl., 10. Dr.). Leipzig: Klett.

Van Hiele, P. M., & van Hiele, D. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education* (Developmental psychology series). Orlando, Fla.: Academic Press.

Van de Walle, J. A., & Lovin, L. H. (2006). Teaching student-centered mathematics. *The Van de Walle Professional Mathematics Series* (Vols. 1, 2, 3). Boston, Mass.: Pearson, Allyn and Bacon.

Wartha, S., & Schulz, A. (2012). *Rechenproblemen vorbeugen: Grundvorstellungen aufbauen: Zahlen und Rechnen bis 100* (1. Aufl.). Berlin: Cornelsen.

Wartha, S., Forcher, C., Finke, L., & Zimmermann, M. (2018). Mach den Unterschied: Wegnehmende oder unterschiedbestimmende Strategien bei Subtraktionsaufgaben bewusst auswählen. *Mathematik differenziert, 1,* 22-30.

Wartha, S., Hörhold, J., Kaltenbach, M., & Schu, S. (2019). *Grundvorstellungen aufbauen – Rechenprobleme überwinden.* Braunschweig: Westermann.

Wollring, B. (2006a). Erwerben, Korrespondieren, Festhalten. Raumerfahrungen im Mathematikunterricht der Grundschule. *Grundschulmagazin, 5,* 8-12.

Wollring, B. (2006b). Kindermuster und Pläne dazu – Lernumgebungen zur frühen geometrischen Förderung. In M. Grüßing & A. Peter-Koop (Hrsg.), *Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule: Beobachten, fördern, dokumentieren* (S. 80-102). Offenburg: Mildenberger.

Wollring, B. (2016). Wie entstehen geometrische Begriffe? Mentale Übungen an explodierenden Würfeln und schmelzenden Kugeln. *Mathematik differenziert, 1*, 6-9.

8. NIVEAUSTUFE C: BEZUG ZUM RAHMENLEHRPLAN UND AUFGABENAUSWAHL

Axel Schulz, Sebastian Wartha & Christiane Benz

8.1 ZAHLEN AUFFASSEN UND DARSTELLEN

RLP	**C Zahlen auffassen und darstellen** ▪ **Darstellen von natürlichen Zahlen bis 1 Mio. [ggf. bis 10 000] als Bild, als Wort, mit Ziffern (auch in der Stellenwerttafel)** ▪ **Wechsel zwischen den Zahldarstellungen natürlicher Zahlen bis 1 Mio. [ggf. bis 10 000]** ▪ **Erklären der Stellenwerte und deren Zusammenhänge mithilfe des Prinzips der wiederholten Bündelung** ▪ Schätzen von Anzahlen größer als 100 mithilfe von Rastern und Vergleichsmengen

Die Kompetenz „Zahlen auffassen und darstellen" sowie der Wechsel zwischen Zahldarstellungen von Zahlen im Zahlenraum bis 1 Million können durch folgende Übersetzungen zwischen Zahlwort, Zahlsymbol und Mengendarstellung (vgl. Tabelle III.8-1) am strukturierten Arbeitsmittel untersucht werden.

Tabelle III.8-1: Übersetzungen zwischen Mengendarstellung, Zahlwort, Zahlsymbol im ZR bis 1 Million

Übersetzung	Umsetzung	Untersuchung bei *ILeA Plus*
Zahlwort → Zahlsymbol	Die diktierte Zahl wird in einer Stellenwerttafel notiert.	Aufgabe „Stellenwerttafel" (122)
Zahlwort → Menge	Die diktierte Zahl wird am Zehnersystem-Material dargestellt.	Aufgabe „Zahldarstellung" (121)
Menge → Zahlwort	Die am Material dargestellte Zahl wird ausgesprochen.	Wird nicht untersucht.
Menge → Zahlsymbol	Die am Material dargestellte Zahl wird notiert.	Aufgabe „Zahlauffassung" (111) (Beispiel siehe unten)
Zahlsymbol → Zahlwort	Eine notierte Zahl wird ausgesprochen.	Wird nicht untersucht.
Zahlsymbol → Menge	Die notierte Zahl wird am Zehnersystem-Material dargestellt.	Wird nicht untersucht.
Zahlsymbol (Stellenwerttafel) → Zahlsymbol (Taschenrechner)	Eine in der Stellenwerttafel vorgegebene Zahl wird notiert.	Aufgabe „Stellengerecht notieren" (123) (Beispiel siehe unten)

Das strukturierte Arbeitsmittel, das hierbei genutzt wird, sind die Zehnersystemblöcke, da mit diesen das Prinzip der fortgesetzten Bündelung und der Zusammenhang zwischen den einzelnen Stellenwerten gut veranschaulicht werden kann (Gaidoschik, 2003; Scherer & Moser Opitz, 2010, S. 210). Die Zahlauffassung und Zahldarstellung am Zahlenstrahl wird an anderer Stelle untersucht (vgl. RLP Zahlen ordnen, Teil III, Kap. 8.2)

Mithilfe der vorliegenden Aufgaben kann insbesondere untersucht werden, ob das Prinzip der fortgesetzten Bündelung und die Bedeutung unbesetzter Stellen verstanden und genutzt werden. Zudem können hier Zahlendreher identifiziert werden.

Über das Verstehen und Nutzen des Stellenwertprinzips hinaus können die Schülerantworten in den Aufgaben „Zahlauffassung“ (7 Items) und „Zahldarstellung“ (4 Items) Hinweise geben, ob die Struktur des Arbeitsmittels Zehnersystemblöcke angemessen gedeutet und genutzt werden kann. Auch das Lesen und Notieren von Zahlen in der Stellenwerttafel wird bei ***ILeA plus*** mithilfe der Aufgaben „Stellengerecht notieren“ (6 Items) und der Aufgabe „Stellenwerttafel“ (4 Items) überprüft.

Tabelle III.8-2: Aufgabenbeispiel „Zahlauffassung“ (Niveaustufe C)

Ma_C_ZO_111_B Zahlauffassung Ma_C_ZO_111_G	Offene Eingabe	Interpretation
 Abbildung III.8-1	**213**	**korrekt**
	1 113	Die 11 Zehner werden ungebündelt notiert.
	113	Eine Ziffer der 11 Zehner bleibt unberücksichtigt.
	231	Zahlendreher
	313	Strukturfehler: 5 Zehner werden als 1 Hunderter gedeutet.
 Abbildung III.8-2	**1 032**	**korrekt**
	132 10 032 100 032 1 302	Die Rolle oder Position der Null als Platzhalter scheint noch unklar.
	1 023	Zahlendreher

Tabelle III.8-3: Aufgabenbeispiel „Stellengerecht notieren“ (Niveaustufe C)

Ma_C_ZO_123_E Stellengerecht notieren Ma_C_ZO_123_F	Offene Eingabe	Interpretation
 Abbildung III.8-3	**42 357**	**korrekt**
	411 357	13 Hunderter werden ungebündelt notiert.
	41 187	3 Hunderter werden der Zehner-stelle zugeordnet, 10 Hunderter werden nicht gebündelt.
	41 357	Die 10 Hunderter bleiben bei der Notation unberücksichtigt.
 Abbildung III.8-4	**10 240**	**korrekt**
	124 1 024 1 240 102 040 100 240	Die Rolle der Null bei der Notation von Zahlen ist noch unklar.

Tabelle III.8-4: Aufgabenbeispiel „Zahldarstellung“ (Niveaustufe C)

Ma_C_ZO_121_E Zahldarstellung	Offene Eingabe	Interpretation
„2 043“ wird angesagt.  Abbildung III.8-5	**2 043**	**korrekt**
	2 034	Zahlendreher
	2 403	Bedeutung der Stellenwerte ist unklar.
	2 340	
	1 043	Zählfehler beim Klicken
	2 033	
	2 042	

Tabelle III.8-5: Aufgabenbeispiel „Stellenwerttafel“ (Niveaustufe C)

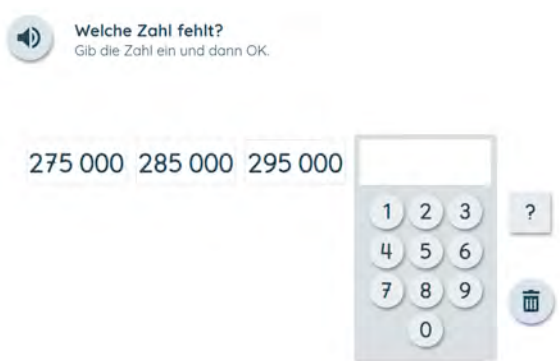
Ma_C_ZO_122_G Stellenwerttafel	Offene Eingabe	Interpretation
„30 068“ wird angesagt.  Abbildung III.8-6	**30 068**	**korrekt**
	30 086	Zahlendreher
	zusätzliche Endnullen, z. B. 30 bei den Zehntausendern	Bedeutung der Stellenwerttafel oder des stellen-weisen Notierens ist noch unklar.
	Eingabe von 68 an der Zehnerstelle: 30 680	
	Eingabe von Ziffern im falschen Stellenwert, z. B. 3 068	

8.2 ZAHLEN ORDNEN

RLP	**C Zahlen ordnen**
	▪ **Zählen bis 1 Mio. [ggf. bis 10 000] in verschiedenen Schritten vor- und rückwärts** ▪ **Vergleichen und Ordnen von natürlichen Zahlen bis 1 Mio. [ggf. bis 10 000]** ▪ **Angeben der Nachbarzahlen (Nachbarhunderter, Nachbartausender etc.)** ▪ Anwenden von Rundungsregeln

Das Zählen in Schritten wird in der Aufgabe „Zahlenfolgen“ (7 Items) über das Fortsetzen von Zahlenfolgen sowohl vorwärts als auch rückwärts überprüft (C. Selter, Prediger, Nührenbörger, & Hußmann, 2014). Hier variiert sowohl die Schrittgröße als auch der Zahlenraum. Zudem gibt es Items mit und ohne Überschreitung von Stufenzahlen. Da diese Aufgabe eine freie Eingabe der gesuchten Zahl fordert, können mit dieser Aufgabe auch Probleme bei der Notation großer Zahlen (vor allem mit der Null als Platzhalter) identifiziert werden.

Tabelle III.8-6: Aufgabenbeispiel „Zahlenfolgen“ (Niveaustufe C)

Ma_C_ZO_211_D Zahlenfolgen	Offene Eingabe	Interpretation
 Abbildung III.8-7	**305 000**	**korrekt**
	300 000 315 000	falsche Schrittgröße
	30 500	Die Rolle der Null bei der Notation von Zahlen ist noch unklar.
	10 000	Die Schrittgröße wird als Ergebnis eingegeben (nicht die nächste Zahl).

Das Vergleichen von Zahlen wird mit zwei ähnlichen Aufgaben überprüft (Aufgaben „Zahlvergleich anschaulich“ und „Zahlvergleich symbolisch“, insgesamt 11 Items). Einerseits sollen zwei Zahlen in der Darstellung mit Zehnersystem-Material, andererseits zwei notierte Zahlen (z. B. 205 000 und 200 578) miteinander verglichen werden. Die Schülerinnen und Schüler müssen dafür jeweils entscheiden, welches Relationszeichen passt: <, =, > (Selter et al., 2014). Hierbei werden auch nichtkanonische Zahldarstellungen präsentiert, deren Vergleich Hinweise auf das Verständnis des Bündelungsprinzips geben kann (Schipper, Ebeling, & Dröge, 2017, S. 50).

Tabelle III.8-7: Aufgabenbeispiele „Zahlvergleich anschaulich“, „Zahlvergleich symbolisch“ (Niveaustufe C)

<table>
<tr><th>Ma_C_ZO_221_C Zahlvergleich anschaulich
Ma_C_ZO_222_F Zahlvergleich symbolisch</th><th>Offene Eingabe</th><th>Interpretation</th></tr>
<tr><td rowspan="3">

Abbildung III.8-8</td><td>=</td><td>korrekt</td></tr>
<tr><td>></td><td>Nur die Anzahl der Hunderter wird berücksichtigt.</td></tr>
<tr><td><</td><td>Die Menge der gegebenen Objekte wird berücksichtigt.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">

Abbildung III.8-9</td><td>></td><td>korrekt</td></tr>
<tr><td><</td><td>Die Anzahl der durch Nullen besetzten Stellen bleibt unberücksichtigt.</td></tr>
<tr><td>=</td><td>keine Interpretation</td></tr>
</table>

Das Vergleichen und Ordnen von Zahlen wird mit zwei Aufgaben am Zahlenstrahl (insgesamt 14 Items) untersucht. Bei diesen Aufgaben sollen Zahlen am Zahlenstrahl dargestellt und aufgefasst werden. Zudem wird hier geprüft, ob Zahlen in Relation zu anderen Zahlen gedeutet werden können und ob ein wichtiges Arbeitsmittel des Mathematikunterrichts genutzt werden kann (Schulz, 2018b). Als Auswahlantworten wurden jeweils Zahlen angeboten, denen typische Fehlerstrategien zugrunde liegen (falsche Interpretationen der Struktur des Arbeitsmittels, Probleme mit der Identifikation der entsprechenden Stellenwerte, Zahlendreher).

Bei der Zahlauffassung Zahlenstrahl (7 Items) markiert ein Pfeil eine Position am Zahlenstrahl (bis 1 000 und bis 1 Mio.) und es werden verschiedene Auswahlantworten vorgegeben. Die richtige soll ausgewählt werden. Bei der Aufgabe „Zahldarstellung Zahlenstrahl“ (7 Items) wird eine Zahl mündlich diktiert. An einem vorgegebenen Zahlenstrahl sind verschiedene Positionen markiert und die richtige soll ausgewählt werden.

Tabelle III.8-8: Aufgabenbeispiele „Zahlauffassung Zahlenstrahl“, „Zahldarstellung Zahlenstrahl“ (Niveaustufe C)

<table>
<tr><th>Ma_C_ZO_223-2_C Zahlauffassung Zahlenstrahl
Ma_C_ZO_224-2_A Zahldarstellung Zahlenstrahl</th><th>Auswahl</th><th>Interpretation</th></tr>
<tr><td rowspan="3">

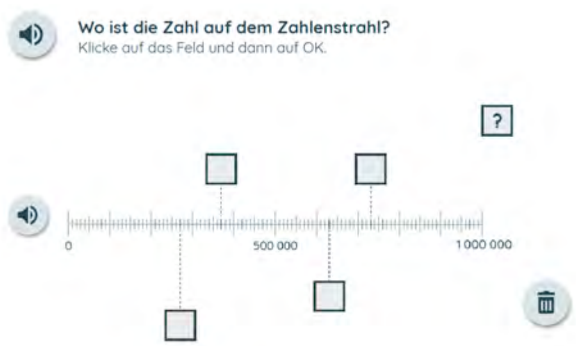
Abbildung III.8-10</td><td>340</td><td>Die Stellenwerte bleiben unberücksichtigt. (Ggf.: Die Rolle der Null bei der Notation von Zahlen ist noch unklar.)</td></tr>
<tr><td>300 004
300 400
304 000</td><td>Die Relation der Stellenwerte ist falsch. (Ggf.: Die Rolle der Null bei der Notation von Zahlen ist noch unklar.)</td></tr>
<tr><td>340 000</td><td>korrekt</td></tr>
<tr><td rowspan="4">„370 000“ wird angesagt.


Abbildung III.8-11</td><td>270 000</td><td>siebter Strich im „dritten Hunderttausender“</td></tr>
<tr><td>370 000</td><td>korrekt</td></tr>
<tr><td>630 000</td><td>Zahlendreher und dritter Strich im „siebten Hunderttausender“</td></tr>
<tr><td>730 000</td><td>Zahlendreher</td></tr>
</table>

Bei den beiden Aufgaben „Nachbarzahlen“ (insgesamt 14 Items) wird das Eintippen benachbarter Hunderter und Tausender gefordert (Selter et al., 2014). Dabei wurde bewusst auf die missverständlichen Begriffe „Vorgänger und Nachfolger“ verzichtet. Es wird eine Zahl diktiert und über zwei Eingabefelder sollen die jeweiligen Nachbarzahlen eingegeben werden. Durch die offene Eingabe können verschiedene Fehlvorstellungen identifiziert werden. Wie immer können nicht alle fehlerhaften Eingaben eindeutig auf eine Fehlvorstellung schließen lassen.

Tabelle III.8-9: Aufgabenbeispiel „Nachbarzahlen“ (Niveaustufe C)

Ma_C_ZO_231-1 Nachbarzahlen Ma_C_ZO_231-2_A	Offene Eingabe	Interpretation
„45 907“ wird angesagt.  Abbildung III.8-12	Eingabe für „Hunderter davor“	
	45 900	**korrekt**
	45 000	Tausender davor
	45 907	Diktierte Zahl wird eingegeben.
	900	Nur der „Hunderter“ wird eingegeben, nicht die ganze Zahl.
	45 906	Einer davor
	45 807	Minus Hundert wird gerechnet.
	45 800	Hunderter wird übersprungen.
„12 097“ wird angesagt.  Abbildung III.8-13	Eingabe für „Tausender davor“	
	12 000	**korrekt**
	11 000	Tausender wird übersprungen.
	12 097	Diktierte Zahl wird eingegeben.
	11 097	Minus Tausend wird gerechnet.
	13 000	Tausender danach

8.3 ZAHLBEZIEHUNGEN SCHREIBEN

RLP	C Zahlbeziehungen schreiben
	▪ **Prüfen und Begründen der Teilbarkeit natürlicher Zahlen (z. B. 27 ist nicht durch 5 teilbar, weil beim Teilen ein Rest bleibt)** ▪ Nutzen der Regeln für die Teilbarkeit durch 2, 5, 10 und 100 ▪ Angeben von Vielfachen und Teilern einer Zahl ▪ Nennen und Erkennen von Quadratzahlen (bis 100)

Bei der Untersuchung von Zahleigenschaften spielt im Zahlenraum bis 1 Million vor allem die Teilbarkeit durch 2, 5, 10 und 100 eine zentrale Rolle (Betzold, 2012; Philipp, 2015; Schipper, Ebeling, & Dröge, 2018, S. 71). Bei der Aufgabe „Teilbarkeit“ (11 Items) wird untersucht, ob eine Zahl sicher auf ihre Teilbarkeit durch 5 oder durch 100 hin geprüft werden kann.

Tabelle III.8-10: Aufgabenbeispiel „Teilbarkeit“ (Niveaustufe C)

Ma_C_ZO_331-1_E Teilbarkeit	Eingabe	Interpretation
	**teilbar**	**korrekt**
Abbildung III.8-14	nicht teilbar	Die Endstellenregel ist noch unklar. Die Teilbarkeit kann bei großen Zahlen nicht überprüft werden. Das Grundkonzept der Teilbarkeit ist noch unklar.

8.4 OPERATIONSVORSTELLUNGEN ENTWICKELN

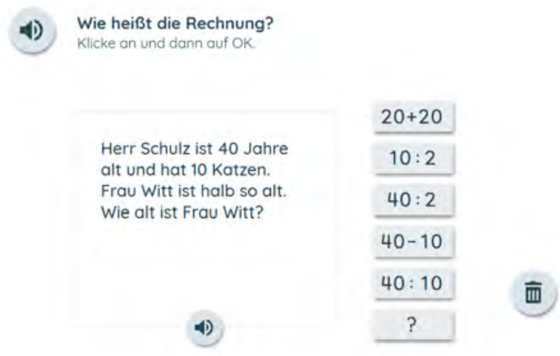
RLP	**C Operationsvorstellungen entwickeln**
	▪ **Sichern von Vorstellungen zu den Grundrechenoperationen in statischen und dynamischen Situationen im Zahlenraum der natürlichen Zahlen bis 1 Mio. [ggf. bis 10 000]** ▪ **Wechseln zwischen Rechengeschichte, Notation, Handlung, Bild zu den Grundrechenoperationen im Zahlenraum der natürlichen Zahlen bis 1 Mio. [ggf. bis 10 000]** ▪ Darstellen und Beschreiben der Zusammenhänge zwischen den vier Grundrechenoperationen im Zahlenraum der natürlichen Zahlen bis 1 Mio. [ggf. bis 10 000] ▪ **Beschreiben der vier Grundrechenoperationen (auch unter Verwendung der Fachbegriffe)**

Die Untersuchung der Grundvorstellungen zu den Rechenoperationen (Carpenter & Moser, 1984; Riley, Greeno, & Heller, 1983; Schipper, 2009, S. 100) erfolgt über die Aufgabe „Textaufgaben“ (9 Items). Zentral ist hierbei, dass nicht gerechnet werden soll. Operationsvorstellungen sollen unabhängig von Rechenfertigkeiten untersucht werden. Daher soll bei der Aufgabe ausgewählt werden, mit welchem Rechenausdruck das Ergebnis bestimmt werden kann. Das Ergebnis selbst soll nicht bestimmt werden.

Eine zentrale Voraussetzung für die Bearbeitung von Rechenaufgaben ist die Unterscheidung von relevanten und unnötigen Zahlenangaben (Franke & Ruwisch, 2010). Bei überbestimmten Aufgaben kommen mehr Zahlen in der Aufgabenstellung vor, als für den Rechenausdruck benötigt werden. Hier sollen die relevanten Angaben identifiziert werden und der passende Rechenausdruck in Bezug auf Zahlen und Operationszeichen gewählt werden (Maaß, 2011).

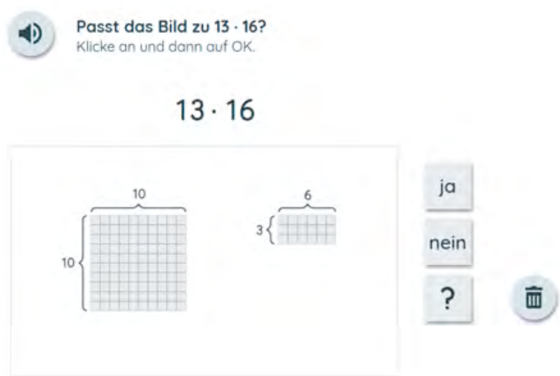
Außerdem wurde darauf geachtet, dass Oberflächenmerkmale wie „Signalwörter“ eher auf falsche Rechenoperationen schließen lassen bzw. dass bei einigen Aufgaben nicht alle an der Rechnung beteiligten Zahlen als identisches Zahlsymbol im Text vorkommen („halb so alt“ muss übersetzt werden mit „: 2“).

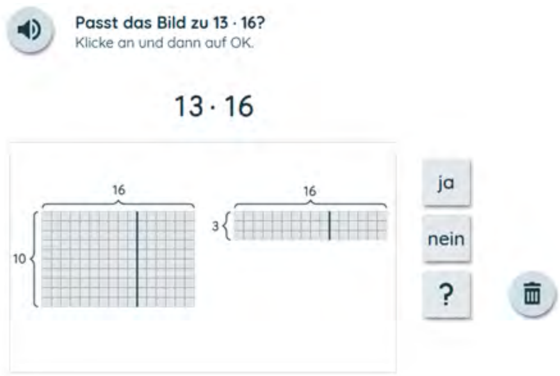
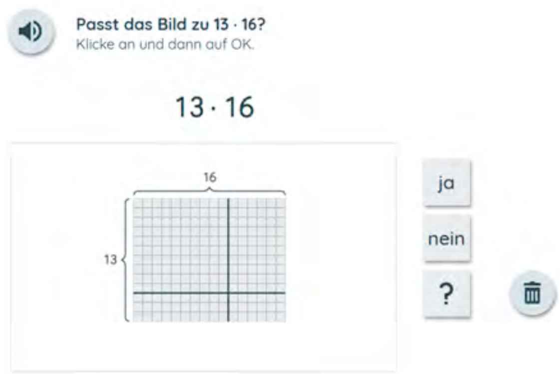
Tabelle III.8-11: Aufgabenbeispiel „Textaufgaben“ (Niveaustufe C)

Ma_C_ZO_411_I Textaufgaben	Eingabe	Interpretation
 Abbildung III.8-15	20 + 20	Diese Rechnung kann nicht direkt aus der Geschichte abgeleitet werden. Das Ergebnis müsste schon bekannt sein.
	10 : 2	Überbestimmte Angaben werden genutzt (Hälfte von 10 Katzen).
	40 : 2	**korrekt (Hälfte von 40 Jahren)**
	40 – 10	Überbestimmte Angaben werden genutzt, die Rechenoperation Subtraktion verkleinert („halb so alt“ deutet auf weniger als 40 hin).
	40 : 10	Überbestimmte Angaben werden genutzt, die Rechenoperation Division verkleinert („halb so alt“ deutet auf weniger als 40 hin).

Operationsvorstellungen werden ebenfalls durch die Übersetzung zwischen Rechenausdruck und bildlicher Darstellung mit der Aufgabe „Operationsmodell“ (5 Items) untersucht. Hierzu werden zu der Aufgabe 13 · 16 verschiedene bildliche Darstellungen präsentiert und es soll entschieden werden, ob das Bild einer Darstellung dem Rechenausdruck entspricht (Kuhnke, 2013; Selter et al., 2014).

Tabelle III.8-12: Aufgabenbeispiel „Operationsmodell“ (Niveaustufe C)

Ma_C_ZO_412_A Operationsmodell Ma_C_ZO_412_C MA_C_ZO_412_E	Auswahl	Interpretation
 Abbildung III.8-16	ja	Falsch: Die beteiligten Zahlen werden nur im jeweiligen Stellenwert miteinander multipliziert. Die Teilrechnungen 10 · 3 und 6 · 10 fehlen.
	nein	**korrekt**

 Abbildung III.8-17	**ja**	**korrekt**
	nein	Falsch: Die Möglichkeit des Zerlegens von Multiplikationsaufgaben in Teilaufgaben scheint noch unklar zu sein (Distributivgesetz).
 Abbildung III.8-18	**ja**	**korrekt**
	nein	Falsch: Die Rechteckdarstellung von Multiplikationsaufgaben scheint nicht bekannt zu sein.

Die Beschreibung von Zusammenhängen zwischen den Rechenoperationen wird bei ***ILeA plus*** nicht erfasst. Es können jedoch Aussagen gemacht werden, wenn Umkehroperationen offenkundig nicht genutzt werden (siehe Detailauswertungen der Schülerinnen und Schüler).

Zudem wird mit der Aufgabe „Fachsprache" (3 Items) geprüft, ob Fachbegriffe verstanden werden. Hierzu werden die Schülerinnen und Schüler unter Verwendung von Fachbegriffen aufgefordert, einfache Rechenaufgaben zu lösen. Dabei ist das Zahlenmaterial so einfach gewählt, dass das Rechnen hier nicht die Hauptanforderung darstellt.

Tabelle III.8-13: Aufgabenbeispiel „Fachsprache" (Niveaustufe C)

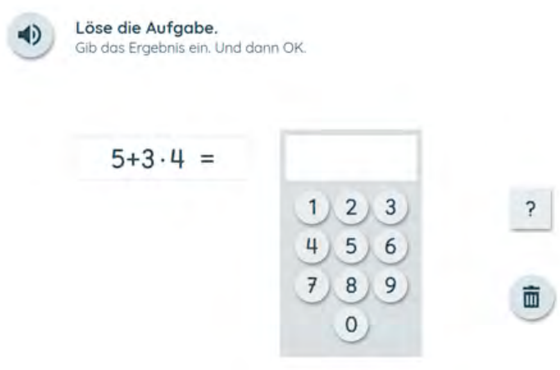
Ma_C_ZO_441_A Fachsprache	Offene Eingabe	Interpretation
 Abbildung III.8-19	**9**	**korrekt**
	18	Multiplikation statt Addition
	3	Subtraktion statt Addition
	2	Division statt Addition
	63	Bilden einer zweistelligen Zahl aus den gegebenen Ziffern

8.5 RECHENVERFAHREN UND -STRATEGIEN ANWENDEN

RLP	**C Rechenverfahren und -strategien anwenden** ▪ **Nutzen, Darstellen, Beschreiben von Zahlbeziehungen und Rechengesetzen für vorteilhaftes Rechnen und halbschriftliche Rechenverfahren (Kommutativgesetz, Assoziativgesetz, Distributivgesetz, gleich- und gegensinniges Verändern, „kleines 1x1“ und bekannte Teilbarkeitsregeln)** ▪ **Verknüpfen mehrerer Grundrechenoperationen unter Beachtung der Punkt-vor-Strich-Regel und der Klammerregeln im Bereich der natürlichen Zahlen** ▪ Nutzen der Teilbarkeitsregeln (für 2, 5, 10 und 100) ▪ **situationsangemessenes Verwenden von bekannten Rechenverfahren und -strategien** ▪ **flexibles automatisiertes Lösen der Aufgaben des „kleinen 1x1“** ▪ Ausführen der schriftlichen Rechenverfahren der Addition, Subtraktion und Multiplikation sowie Beschreiben und Erklären einzelner Rechenschritte in nachvollziehbarer Weise ▪ **Überschlagen, Abschätzen und Überprüfen von Rechenergebnissen**

Das Verknüpfen von Grundrechenarten unter Beachtung der Punkt-vor-Strich-Regel und der Klammerregeln wird geprüft, indem die Aufgabe „Rechenregeln“ (4 Items) gelöst werden soll. Dabei ist die Aufgabenstruktur so gewählt, dass eine Nicht-Beachtung der entsprechenden Regeln zu Fehllösungen führt. Außerdem wurde darauf geachtet, dass die benötigten rechnerischen Fertigkeiten möglichst gering gehalten sind.

Tabelle III.8-14: Aufgabenbeispiel „Rechenregeln“ (Niveaustufe C)

Ma_C_ZO_531_A Rechenregeln	Offene Eingabe	Interpretation
 Abbildung III.8-20	**17**	**korrekt**
	32	Es wird von links nach rechts gerechnet.
	20	Die 3 wird nicht berücksichtigt.
	12	Die 5 wird nicht berücksichtigt.

Das flexible bzw. automatisierte und schnelle Lösen von Aufgaben des „kleinen Einmaleins“ wird mit der Aufgabe „Kopfrechnen: Kleines Einmaleins“ (10 Items) überprüft. Weitere Hinweise zur Relevanz automatisierter Grundaufgaben finden sich bei Gaidoschik (2014) und Schulz (2017, 2018a). Hierbei kann Verschiedenes beobachtet werden. Eine langsame Bearbeitungszeit deutet darauf hin, dass die Aufgaben noch nicht sicher automatisiert sind. Zudem wird überprüft, ob nur eine von jeweils zwei Umkehraufgaben (6 · 7 und 42 : 6) richtig gelöst wird. Ist dies nicht der Fall, kann davon ausgegangen werden, dass die Umkehraufgabe nicht zur Lösung der entsprechenden Aufgabe herangezogen wird.

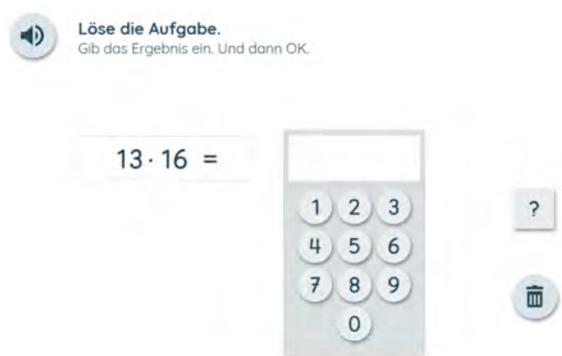
Tabelle III.8-15: Aufgabenbeispiel „Kopfrechnen: Kleines Einmaleins“ (Niveaustufe C)

Ma_C_ZO_541_D **Kopfrechnen: Kleines Einmaleins**	**Offene Eingabe**	**Interpretation**
 Abbildung III.8-21	**48**	**korrekt**
	56	nächstes Ergebnis der 8er-Reihe (ggf. Reihe durchgezählt oder falsch automatisiert)
	46	falsch automatisiert (Perseverationsfehler: Die 6 aus der Aufgabe wird ins Ergebnis übernommen.)
	49	Ergebnis aus einer anderen Einmaleins-Reihe
	42	voriges Ergebnis der 6er-Reihe (ggf. Reihe durchgezählt oder falsch automatisiert)

Das situationsangemessene Nutzen vorteilhafter Rechenstrategien unter Nutzung von Zahlbeziehungen und Rechengesetzen kann über eine Software nicht erfasst werden (Schipper, Wartha, & Schroeders, 2011) Dies gelingt nur, indem die Lösungsprozesse zum Beispiel im Gespräch durch die Methode des „Lauten Denkens“ beobachtet werden (Selter & Spiegel, 1997).

Bei typischen Fehlern können jedoch Hinweise gegeben werden, inwiefern die Strategie nicht zielführend ist und welche Fehlvorstellungen möglicherweise vorliegen (Radatz, 1980). Daher können in diesem Bereich nur defizitorientierte Hinweise gegeben werden, wenn offenkundig nicht tragfähige Strategien zur Bearbeitung der Aufgabe „Kopfrechnen: Rechnen im ZR bis 1 000“ (8 Items) herangezogen wurden.

Tabelle III.8-16: Aufgabenbeispiel „Kopfrechnen: Rechnen im ZR bis 1 000“ (Niveaustufe C)

MA_C_ZO_541_T **Kopfrechnen: Rechnen im ZR bis 1 000** **MA_C_ZO_541_O, MA_C_ZO_541_U**	**Offene Eingabe**	**Interpretation**
 Abbildung III.8-22	**208**	**korrekt**
	118	Die beteiligten Zahlen werden nur im jeweiligen Stellenwert miteinander multipliziert (10 · 10 und 3 · 6). Die Teilrechnungen 10 · 6 und 3 · 10 werden nicht berücksichtigt.
	28	Nur die Einerzahlen werden multipliziert (3 · 6), dann wird ein Teil eines Faktors addiert: 18 plus 10.
	38	Nur die Einerzahlen werden multipliziert (3 · 6), dann werden die verbleibenden Zehnerzahlen addiert: 18 plus 10 plus 10.

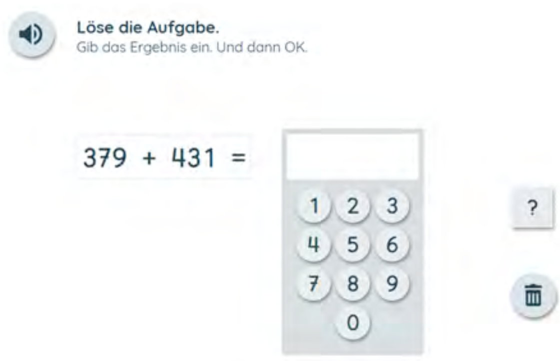


Abbildung III.8-23

810	**korrekt**
800	Zehnerüberschreitung wird nicht beachtet oder vergessen. Hinweis auf ziffernweises Vorgehen
900	Der Übertrag wird in der falschen Stelle vorgenommen.
710	Die Hunderterüberschreitung wird nicht beachtet oder vergessen. Hinweis auf ziffernweises Vorgehen

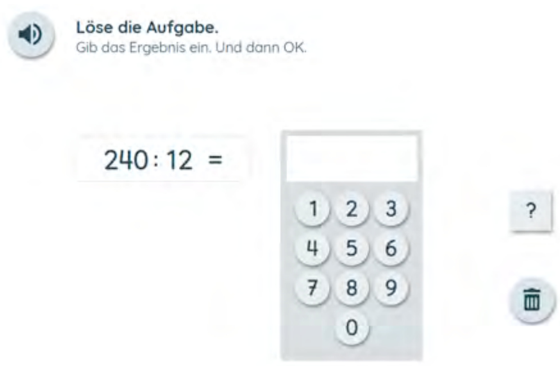


Abbildung III.8-24

20	**korrekt**
12	Bildung der Hälfte von 240, anschließend Division durch 10 (Perseverationsfehler: 12 ist die Hälfte von 24, daher wird mit der Hälfte gerechnet.)
120	Bildung der Hälfte von 240 (Perseverationsfehler: 12 ist die Hälfte von 24, daher wird mit der Hälfte gerechnet.)
2	Endnullen bzw. Stellenwerte bleiben unberücksichtigt.

8.6 GEOMETRISCHE OBJEKTE UND IHRE EIGENSCHAFTEN BESCHREIBEN

RLP	**C Geometrische Objekte und ihre Eigenschaften beschreiben**
	▪ **Erkennen, Benennen und Beschreiben geometrischer Körper (Kugel, Würfel, Quader) in der Umwelt und am Modell unter Verwendung wesentlicher Merkmale** ▪ **Erkennen, Benennen und Beschreiben ebener Figuren (auch Parallelogramm, Trapez, Drachenviereck, Raute) in der Umwelt und am Modell unter Verwendung wesentlicher Merkmale (auch Symmetrie sowie Radius, Durchmesser)** ▪ **Unterscheiden von Strecken, Strahlen und Geraden** ▪ **Erkennen und Beschreiben von symmetrischen Figuren (auch dreh- und verschiebe-symmetrische Figuren)**

In ***ILeA plus*** wird mit der Aufgabe „Objektbeschreibung“ (8 Items) anhand ausgewählter geometrischer Körper und ebener Figuren untersucht, inwiefern charakteristische Eigenschaften der jeweiligen Objekte zu deren Identifizierung genutzt werden können (Weigand, 2014, S. 111). Es werden Objektbeschreibungen vorgegeben und die Schülerinnen und Schüler sollen aus einer Auswahl das passende Objekt anklicken. Hierbei werden bei einer Aufgabe Abbildungen der Objekte präsentiert und bei der anderen die entsprechenden Begriffe. Auf diese Weise kann zusätzlich erfasst werden, ob es einen Unterschied macht, wenn das Objekt als Bild oder wenn sein benennender Begriff präsentiert wird.

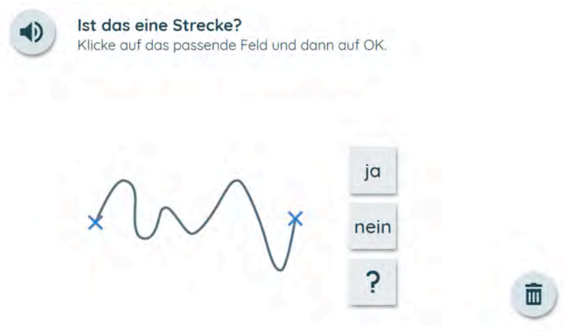
Tabelle III.8-17: Aufgabenbeispiel „Objektbeschreibung“ (Niveaustufe C)

Ma_C_RF_112-1A Objektbeschreibung Ma_C_RF_112-2B	Auswahl	Interpretation
 Abbildung III.8-25	Bild oben links	Identifikation der Seitenfläche eines Quaders → Übergeneralisierung
	Bild oben rechts	Nur die Eigenschaft „8 Ecken“ wird berücksichtigt.
	Bild unten links	**korrekt**
	Bild unten rechts	Identifikation der Seitenfläche eines Quaders → Übergeneralisierung
 Abbildung III.8-26	Quadrat	Unsicherheit durch Ähnlichkeit der Begriffe Quadrat und Quader
	Achteck	Nur die Eigenschaft „8 Ecken“ wird berücksichtigt.
	Quader	**korrekt**
	Rechteck	Begriffsunklarheit: „Rechteck“ als Begriff für Quader

Darüber hinaus wird mit den Aufgaben „Vierecke“ (8 Items) und „Gerade, Strecke, Strahl“ (6 Items) überprüft, ob den Begriffen Parallelogramm, Trapez, Strecke, Strahl und Gerade korrekte Abbildungen zugeordnet werden können. Dabei wird auch untersucht, ob hierarchische Beziehungen zwischen Vierecken verstanden werden (z. B. ein Quadrat ist immer auch ein Parallelogramm, siehe auch Teil III, Kap. 2.5 und 6.6) (Franke & Reinhold, 2016, S. 128). Darüber hinaus werden nicht typische Parallelogramme bzw. Trapeze präsentiert (z. B. die Basis des Trapezes ist nicht horizontal angeordnet).

Tabelle III.8-18: Aufgabenbeispiele „Vierecke“, „Gerade, Strecke, Strahl“ (Niveaustufe C)

MA_C_RF_121-1A Vierecke MA_C_RF_121-2C MA_C_RF_131-2B Gerade, Strecke, Strahl	Auswahl	Interpretation
 Abbildung III.8-27	ja	Falsch: Möglicherweise wird ausgehend von den zwei parallelen Seiten auf den Begriff Parallelogramm geschlossen.
	nein	**korrekt**

 Abbildung III.8-28	**ja**	**korrekt**
	nein	Falsch: Die untypische Lage lenkt von der Betrachtung der relevanten Eigenschaften ab.
 Abbildung III.8-29	ja	Falsch: Hinweis auf umgangssprachliche Verwendung des Begriffs Strecke.
	nein	**korrekt**

In der Aufgabe „Eigenschaften" (6 Items) sollen Figuren auf ihre Symmetrie untersucht werden. Dazu werden verschiedene Figuren präsentiert und die Schülerinnen und Schüler sollen entscheiden, ob und welche Art von Symmetrie jeweils vorliegt (Franke & Reinhold, 2016, S. 257). Dabei werden auch Figuren präsentiert, die sowohl achsen- als auch dreh-symmetrisch sind. Auf diese Weise kann überprüft werden, ob zwischen Achsen- und Dreh-symmetrie differenziert werden kann.

Tabelle III.8-19: Aufgabenbeispiel „Eigenschaften" (Niveaustufe C)

MA_C_RF_141_D Eigenschaften MA_C_RF_141_E	Auswahl	Interpretation
 Abbildung III.8-30	nur achsen-symmetrisch	Die Wahrnehmung der Achsensymmetrie ist dominant, andere Symmetrien bleiben unberücksichtigt.
	nur dreh-symmetrisch	Die Wahrnehmung der Drehsymmetrie ist dominant, andere Symmetrien bleiben unberücksichtigt.
	achsen- und dreh-symmetrisch	**korrekt**
	nicht achsen- und nicht dreh-symmetrisch	Möglicherweise führt die untypische Darstellung des Quadrats zu dieser Fehleinschätzung.

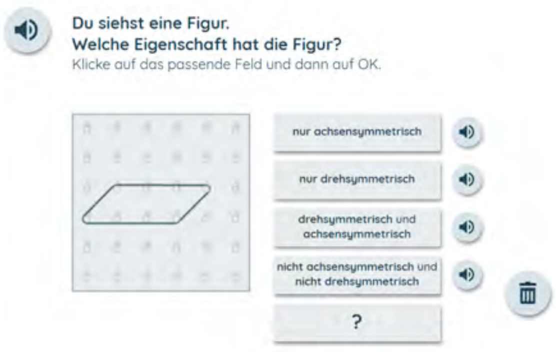
<table>
<tr><td rowspan="4">

Abbildung III.8-31</td><td>nur achsen-symmetrisch</td><td>Die Regelmäßigkeit der Figur lässt auf Achsensymmetrie schließen.</td></tr>
<tr><td>nur dreh-symmetrisch</td><td>korrekt</td></tr>
<tr><td>achsen- und dreh-symmetrisch</td><td>Die Regelmäßigkeit der Figur lässt auch auf Achsensymmetrie schließen.</td></tr>
<tr><td>nicht achsen- und nicht dreh-symmetrisch</td><td>Die fehlende Achsensymmetrie lässt auf das Fehlen anderer Symmetrien schließen.</td></tr>
</table>

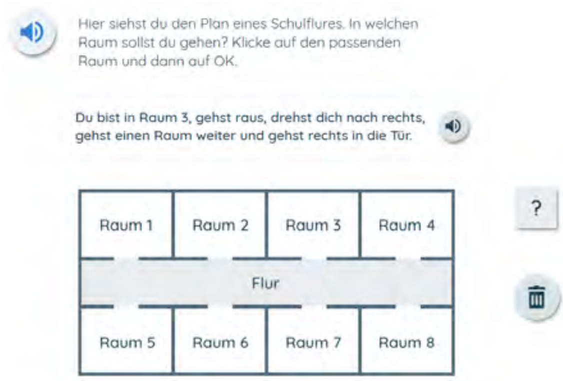
8.7 BEZIEHUNGEN ZWISCHEN GEOMETRISCHEN OBJEKTEN BESCHREIBEN

<table>
<tr><td>RLP</td><td>C Beziehungen zwischen geometrischen Objekten beschreiben

Beschreiben der Lagebeziehungen von Objekten (auch Orientierung auf Karten, Stadtplänen und Lageskizzen)
Beschreiben der Lagebeziehung von Geraden und Strecken (auch als Kanten)
Beschreiben der Lage- und Größenbeziehungen gegenüberliegender bzw. angrenzender Seiten oder Flächen bei ebenen oder räumlichen geometrischen Objekten (auch Erkennen von Würfel- und Quadernetzen)
Beschreiben der Beziehung zwischen Würfel und Quader
Beschreiben der Beziehungen zwischen Vierecken (Haus der Vierecke)
</td></tr>
</table>

In der Aufgabe „Lageplan“ (2 Items) wird das Beschreiben von Lagebeziehungen bzw. das Nutzen von Raum-Lage-Beschreibungen überprüft, indem sich die Schülerinnen und Schüler auf einem einfachen Lageplan orientieren müssen (Franke & Reinhold, 2016, S. 213). Hierbei spielt vor allem die Verwendung der Begriffe „rechts“ und „links“ eine Rolle. Zudem wird in einer der Aufgaben ein Perspektivwechsel gefordert, was bedeutet, dass der Lageplan nicht in Blickrichtung genutzt werden kann.

Tabelle III.8-20: Aufgabenbeispiel „Lageplan“ (Niveaustufe C)

Ma_C_RF_211_B Lageplan	Auswahl	Interpretation
 Abbildung III.8-32	**Raum 2**	**korrekt**
	Raum 8	keine Perspektivübernahme beim ersten Schritt, aber Perspektivübernahme beim zweiten Schritt
	Raum 4	konsequentes Verwechseln von links und rechts (mit konsequenter Perspektivübernahme)
	Raum 1	„Einen Raum weiter“ wird interpretiert als „einen Raum überspringen“.

Das Beschreiben von Lagebeziehungen von Strecken wird in der Aufgabe „Raum-Lage“ (2 Items) mit der Abbildung eines Würfels geprüft. Die Schülerinnen und Schüler sollen hier zu einer vorgegebenen Kante eine senkrechte bzw. eine parallele Kante identifizieren. Dabei werden auch nicht direkt benachbarte Kanten berücksichtigt. Das heißt, es gibt zwei passende Parallelen und sechs passende Senkrechten. Daher kann bei dieser Aufgabe vor allem identifiziert werden, wenn eine Schülerin oder ein Schüler die Senkrechten bzw. Parallelen nicht bestimmen kann. Das Schrägbild des Würfels ist zudem so gewählt, dass in der Abbildung keine rechten Winkel zu sehen sind (Schipper et al., 2018, S. 145). Für die Identifikation der Senkrechten kann daher nicht auf das Bild zurückgegriffen werden, sondern der Würfel und dessen Eigenschaften müssen mental rekonstruiert werden.

Tabelle III.8-21: Aufgabenbeispiel „Raum-Lage“ (Niveaustufe C)

Ma_C_RF_221_A Raum-Lage	Auswahl	Interpretation
 Abbildung III.8-33	**eine Senkrechte Kante**	**korrekt**
	eine andere Kante	ggf. Vertauschung der Begriffe „senkrecht“ und „parallel“
	Es gibt keine passende Kante.	Das Fehlen rechter Winkel bei fehlender Interpretation des Schrägbildes lässt auf das Fehlen von Senkrechten schließen.

Die Kenntnisse der Beziehungen zwischen verschiedenen Vierecken („Haus der Vierecke“) lassen darauf schließen, dass Begriffe, Eigenschaften und deren Zusammenhänge verstanden sind und genutzt werden können (Franke & Reinhold, 2016, S. 128; Weigand, 2014, S. 120). Bei der Aufgabe „Vierecke“ (8 Items) wird am Beispiel der Begriffe Parallelogramm und Trapez untersucht, ob die Beziehungen zwischen Vierecken erkannt werden.

Tabelle III.8-22: Aufgabenbeispiel „Vierecke“ (Niveaustufe C)

Ma_C_RF_121-1_C Vierecke	Auswahl	Interpretation
 Abbildung III.8-34	**ja**	**korrekt**
	nein	Falsch: Möglicherweise sind die Beziehungen im „Haus der Vierecke“ noch unklar. Möglicherweise auch übergeneralisierte Begriffsnutzung: „Das ist ein Rechteck (und kann deshalb nichts anderes sein).“ Die Eigenschaften einer Figur können noch nicht sicher zur Bestimmung genutzt werden.

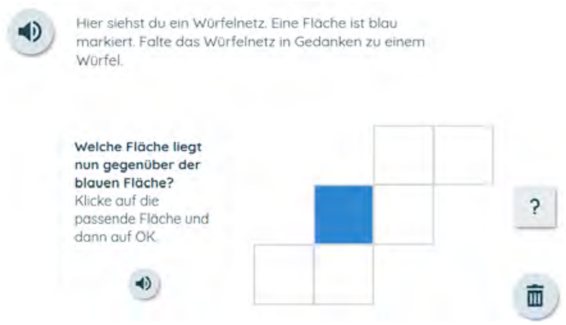
Das Erkennen von Würfel und Quadernetzen wird dem nächsten Inhaltsbereich „Geometrische Objekte darstellen“ zugeordnet (s. u.).

8.8 GEOMETRISCHE OBJEKTE DARSTELLEN

RLP	**C Geometrische Objekte darstellen** ▪ Herstellen von Bauplänen und Ansichten, z. B. zu Würfelbauten ▪ Herstellen von Modellen von Quadern und Würfeln (auch Kantenmodellen) ▪ **Herstellen von Würfel- und Quadernetzen** ▪ Herstellen ebener Figuren (z. B. Spannen von Drachenvierecken) ▪ Zeichnen ebener Figuren frei Hand und mithilfe von Zeichengeräten (Lineal, Geodreieck, Zirkel) überwiegend auf Blankopapier ▪ Zeichnen von Senkrechten und Parallelen mithilfe des Geodreiecks ▪ **Herstellen von achsensymmetrischen Figuren (z. B. Zeichnen auf Rasterpapier)**

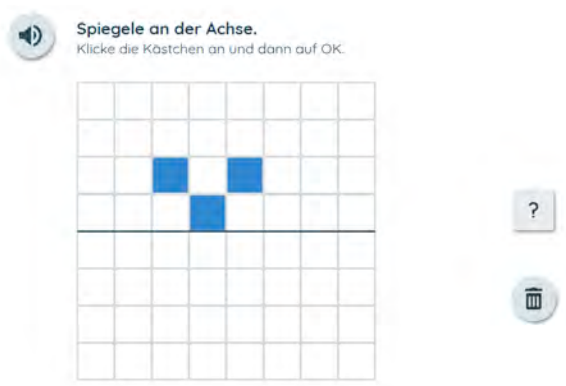
Die genannten Kompetenzen erfordern alle das Handeln mit konkreten Objekten und können daher indirekt durch ***ILeA plus*** erfasst werden. Das Arbeiten mit Würfel- und Quadernetzen wird mit den Aufgaben „Würfelnetz falten“ (3 Items), „Quadernetz“ (4 Items) und „Würfelnetz vervollständigen“ (2 Items) untersucht (vgl. auch Rahmenlehrplan „Beziehungen zwischen geometrischen Objekten beschreiben“). Hierbei geht es weniger um das Herstellen der Netze als vor allem um die Fähigkeit, vorgegebene Netze mental zu falten bzw. zu vervollständigen (Gaab & Lambert, 2015; Scherres, 2013).

Tabelle III.8-23: Aufgabenbeispiel „Würfelnetz falten“ (Niveaustufe C)

Ma_C_RF_231_C Würfelnetz falten	Offene Eingabe	Interpretation
 Abbildung III.8-35	**Quadrat oben rechts**	**korrekt**
	alle anderen	Das mentale Aufklappen des Würfelnetzes gelingt nicht sicher.

Das Herstellen achsensymmetrischer Figuren und das Zeichnen von Spiegelbildern zu vorgegebenen Figuren (vgl. RLP „Geometrische Abbildungen ausführen“) erfordern sehr ähnliche Kompetenzen (Götz & Schulz, 2018). Diese Kompetenzen werden in ***ILeA plus*** mit der Aufgabe „Spiegeln“ (3 Items) überprüft. Hierbei müssen Eigenschaften der Spiegelung an einer Achse berücksichtigt werden: Jeder Punkt der Spiegelung ist gleichweit von der Spiegelachse entfernt wie der jeweilige Punkt der Ausgangsfigur. Diese Punkte können durch eine senkrecht zur Spiegelachse liegende Strecke verbunden werden.

Tabelle III.8-24: Aufgabenbeispiel „Spiegeln“ (Niveaustufe C)

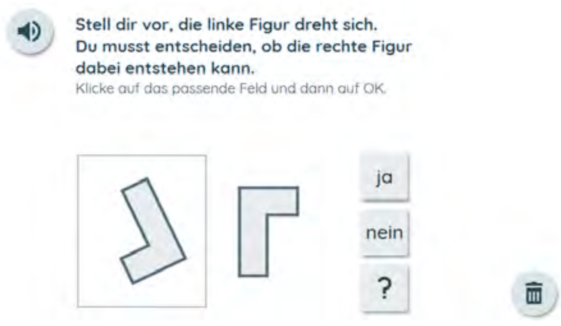
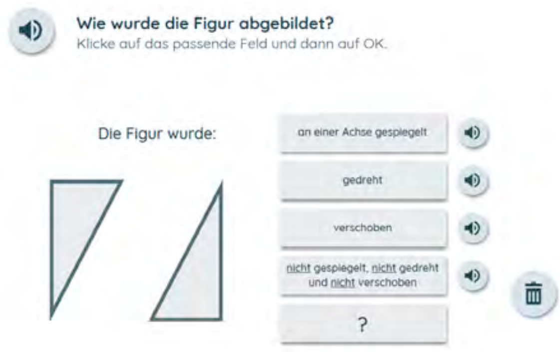
Ma_C_RF_531_A Spiegeln	Offene Eingabe	Interpretation
 Abbildung III.8-36	**korrekte Ergänzung**	**Die Eigenschaften der Achsenspiegelungen können umgesetzt werden.**
	Die Figur wird nach unten verschoben.	Die Begriffe Spiegeln und Verschieben werden vertauscht.
	anderes Bild	Die Eigenschaften der Achsenspiegelungen können nicht sicher umgesetzt werden.

8.9 GEOMETRISCHE ABBILDUNGEN UND IHRE EIGENSCHAFTEN NUTZEN

RLP	C Geometrische Abbildungen und ihre Eigenschaften nutzen
	▪ **Erkennen und Benennen gespiegelter, verschobener und gedrehter ebener Figuren** ▪ Beschreiben ausgewählter Eigenschaften von Spiegelungen an Geraden ▪ Erkennen und Begründen von vergrößerten und verkleinerten Figuren

Das Benennen von Eigenschaften gegebener Abbildungen wird mit den zwei Aufgaben „Rotation“ (4 Items) und „Abbildungen“ (4 Items) untersucht. Hier werden jeweils zwei Figuren vorgegeben. Bei einer der Aufgaben muss entschieden werden, ob die Figur durch Drehung (Rotation in der Ebene) zur Deckung gebracht werden kann. Bei der anderen Aufgabe muss angegeben werden, ob es sich bei der vorliegenden Abbildung um eine Drehung, eine Spiegelung an einer Achse, eine Verschiebung oder um nichts davon handelt. Zur erfolgreichen Bearbeitung dieser Aufgaben müssen die gegebenen Figuren mitunter mental bewegt werden.

Tabelle III.8-25: Aufgabenbeispiele „Rotation“, „Abbildungen“ (Niveaustufe C)

Ma_C_RF_411_A Rotation **Ma_C_RF_412_A Abbildungen**	**Auswahl**	**Interpretation**
 Abbildung III.8-37	ja	Falsch: ▪ Die Figur kann mental nicht gedreht werden. ▪ Der Begriff „dreht sich“ wird nicht angemessen genutzt. ▪ Die Ähnlichkeit der Figuren verhindert die genaue Untersuchung gemäß der Aufgabenstellung.
	nein	▪ **korrekt**
 Abbildung III.8-38	an einer Achse gespiegelt	▪ Begriffe vertauscht (Spiegeln und Drehen) ▪ Eigenschaften der Achsenspiegelung noch nicht sicher
	gedreht	**korrekt**
	verschoben	▪ Begriffe vertauscht (Drehen und Verschieben) ▪ Verschieben wird eher alltagssprachlich gedeutet: „Verschieben einer Figur auf dem Tisch“ und nicht als Verschieben entlang eines gegebenen linearen Vektors
	nichts davon	▪ Begriffe noch unklar ▪ Eigenschaften von Abbildungen noch unklar

8.10 GEOMETRISCHE ABBILDUNGEN AUSFÜHREN

RLP	**C Geometrische Abbildungen ausführen** ▪ Herstellen von Würfelbauten nach Vorgaben (z. B. nach Ansichten, Bauplänen und Schrägbildern) ▪ **Herstellen von schubsymmetrischen Figuren (z. B. von Bandornamenten)** ▪ **Zeichnen von Spiegelbildern auf Rasterpapier** ▪ **Vergrößern und Verkleinern von ebenen Figuren auf Rasterpapier**

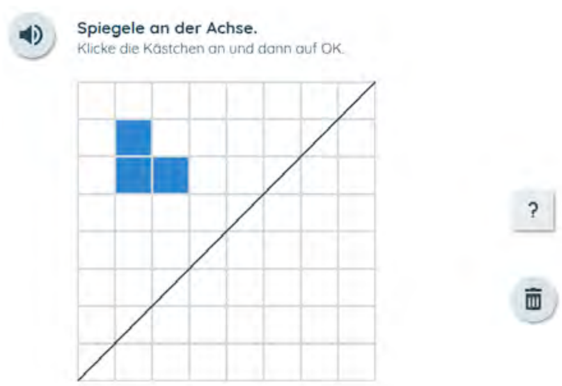
Das Herstellen von Würfelbauten kann mit ***ILeA plus*** nicht erhoben werden, wohl aber die Fähigkeit zum Herstellen schubsymmetrischer Figuren, am Beispiel einer einfachen Muster-folge. In der Aufgabe „Bandornament“ (2 Items) wird ermittelt, ob die entsprechende Grundfigur identifiziert wird und ob sie ansatzlos zur Fortsetzung des Musters genutzt werden kann. Die Kenntnisse der Eigenschaften einer schubsymmetrischen Figur werden hier nur indirekt gefordert (Schmidt-Thieme & Weigand, 2014, S. 186-194).

Tabelle III.8-26: Aufgabenbeispiel „Bandornament“ (Niveaustufe C)

Ma_C_RF_521_A Bandornament	Offene Eingabe	Interpretation
 Abbildung III.8-39	**korrekte Ergänzung**	**Die Grundeinheit wird richtig identifiziert. Der unregelmäßige Abbruch stellt dabei kein Problem dar.**
	fehlerhafte Ergänzung	Die Identifikation der Grundeinheit und/oder das Anknüpfen an den unregelmäßigen Abbruch bereiten noch Schwierigkeiten.

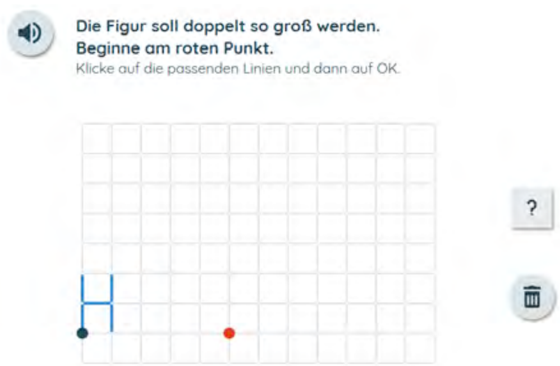
Das Herstellen achsensymmetrischer Figuren (vgl. Rahmenlehrplan „Geometrische Objekte darstellen“) und das Zeichnen von Spiegelbildern zu vorgegebenen Figuren erfordern sehr ähnliche Kompetenzen. Diese Kompetenzen werden in ***ILeA plus*** mit der Aufgabe „Spiegeln“ (3 Items) abgeprüft. Hierbei müssen Eigenschaften der Spiegelung an einer Achse berücksichtigt werden: Jeder Punkt der Spiegelung ist gleichweit von der Spiegelachse entfernt wie der jeweilige Punkt der Ausgangsfigur. Diese Punkte können durch eine senkrecht zur Spiegelachse liegende Strecke verbunden werden. Besonders herausfordernd sind Aufgaben, bei denen die Spiegelachse nicht parallel zum Bezugsrahmen (Bildschirm, Blattrand) liegt und/oder wenn die Strecken der Ausgangsfigur weder senkrecht noch parallel zur Spiegelachse liegen (vgl. Beispiel und Götz & Schulz, 2018).

Tabelle III.8-27: Aufgabenbeispiel „Spiegeln“ (Niveaustufe C)

Ma_C_RF_531_C Spiegeln	Offene Eingabe	Interpretation
 Abbildung III.8-40	**korrekte Ergänzung**	**Obwohl die gegebene Figur nicht sehr komplex ist, fordert die richtige Bearbeitung die genaue Kenntnis und Umsetzung der Eigenschaften bei Achsenspiegelungen und ist daher wenig intuitiv.**
	Die Figur wird verschoben und/oder gedreht.	Die Kongruenz der Abbildung wird berücksichtigt, nicht aber die Eigenschaften der Achsenspiegelung.
	anderes Bild	Die Eigenschaften der Achsenspiegelungen können nicht sicher umgesetzt werden.

Das Vergrößern und Verkleinern gegebener Figuren wird in ***ILeA plus*** in der Aufgabe „Vergrößern & Verkleinern“ (2 Items) mithilfe einer Strichzeichnung überprüft. Auf eine flächige Figur wurde verzichtet, da bei einer solchen der Flächeninhalt quadratisch ansteigt, bei linearen Figuren eine Verdopplung einzelner Strecken auch zu einer doppelt so großen Darstellung führt. Mit der vorliegenden Aufgabe wird zweierlei erfasst: Werden alle Strecken doppelt so lang gezeichnet und werden die Beziehungen zwischen den Strecken beibehalten (der Querstrich halbiert die beiden Seitenstriche)? Vor allem der zweite Aspekt ist für die Ähnlichkeit zwischen Grundfigur und vergrößerter Figur entscheidend (Franke & Reinhold, 2016, S. 358).

Tabelle III.8-28: Aufgabenbeispiel „Vergrößern & Verkleinern“ (Niveaustufe C)

Ma_C_RF_541_B Vergrößern & Verkleinern	Offene Eingabe	Interpretation
 Abbildung III.8-41	**korrekte Vergrößerung**	▪ **Strecken können verdoppelt werden.** ▪ **Relationen zwischen den Strecken werden erkannt und berücksichtigt.**
	fehlerhaftes Bild	▪ Verdopplung der einzelnen Strecken gelingt nicht. ▪ Relationen zwischen den Strecken werden nicht erkannt oder nicht berücksichtigt.
	identisches Bild	▪ Begriff „doppelt so groß“ unklar → doppelt bedeutet dasselbe noch einmal

9. NIVEAUSTUFE C: FÖRDERINHALTE AUS DEN AUSWERTUNGEN

Axel Schulz, Sebastian Wartha, Christiane Benz & Sophia Bayer

9.1 PRINZIP DES BÜNDELNS UND ENTBÜNDELNS ALS GRUNDLAGE DES STELLENWERTSYSTEMS VERSTEHEN (SB)

Zahlen sind nicht nur eine Aneinanderreihung von Ziffern, vielmehr werden die Ziffern hinsichtlich ihrer Wertigkeit an der jeweiligen Position (z. B. Hunderter oder Zehner) interpretiert: „4 705“ bedeutet nicht 4 und 7 und 5, sondern z. B. 4 Tausender, 7 Hunderter, 0 Zehner und 5 Einer. Die Grundlage für diese Deutung von Ziffern im Stellenwertsystem ist das Prinzip der fortgesetzten Bündelung, denn durch die fortgesetzte Bündelung entstehen die Stellenwerte (Einer, Zehner, Hunderter, Tausender ...) (Padberg & Benz, 2011, S. 83).

Wenn das Prinzip der fortgesetzten Bündelung nicht sicher verstanden wurde, besteht die Gefahr, dass kein tragfähiges Stellenwertverständnis aufgebaut wird und somit keine Grundvorstellungen zu Zahlen aktiviert werden können. Ohne ein Verständnis des Prinzips des Bündelns und Entbündelns gelingt im weiteren Lernprozess die Deutung von Dezimalbrüchen (Zehntel, Hundertstel, Tausendstel …) nicht (Padberg & Wartha, 2017; Schulz, 2014).

Ausgabe:
Dieser Förderinhalt beruht auf Fehlern bei der Deutung des Zehnersystem-Materials und der Stellenwerttafel über den Gesamttest verteilt. Ein häufiger Fehler hierbei ist die Eingabe der Zahl 214 bei der Darstellung von 2 Zehnern und 14 Einern. Ein anderer Fehler kann die Deutung von Zehnern als Hunderter oder Einer sein, in diesem Fall würde bei der Darstellung von 2 Hundertern, 3 Zehnern und 4 Einer die 9 eingetippt, weil es sich um neun Objekte handelt.

Der Förderinhalt wird ausgegeben, wenn in diesem Bereich mehr als drei Fehler gemacht werden.

Tabelle III.9-1: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes SB (Niveaustufe C)

Anzahl falsch:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (SB)	19 %	11 %	22 %	18 %	15 %	10 %	4 %	1 %	0 %	3255
Bewertung	Unauffällig: 70 %				Auffällig: 30 %					

Ergänzende prozessorientierte Diagnose und Fördervorschläge

Tabelle III.9-2: Ergänzende prozessorientierte Diagnose (SB, Niveaustufe C)

Aufgabe	Beobachtungen
24 Zehnerstangen vorlegen: Wie viele Zehner hat diese Zahl? Wie viele Hunderter hat diese Zahl? Begründe. Lege so hin, dass man sehen kann, wie viele Hunderter es sind.	▪ Gelingt die Bündelung sicher? ▪ Wird mit der Idee der Bündelung begründet? ▪ Werden die Zehner zu zwei Hundertern gruppiert? ▪ Werden jeweils 10 Zehner in einen Hunderter umgetauscht?
24 Zehner in einer Stellenwerttafel vorlegen: Wie viele Zehner hat diese Zahl? Wie viele Hunderter hat diese Zahl? Warum ist das so? Lege so hin, dass man sehen kann, wie viele Hunderter es sind.	▪ Gelingt die Bündelung sicher? ▪ Wird mit der Idee der Bündelung begründet? ▪ Werden nur einzelne Plättchen verschoben (und somit eine Wertänderung herbeigeführt) oder wird entsprechend getauscht (10 Zehner weg, dafür ein Hunderter in die entsprechende Spalte)?
1 Tausenderwürfel, 15 Hunderterplatten, 2 Zehnerstangen, 12 Einer vorlegen: Wie viele Tausender/Zehner hat diese Zahl? Warum? Lege so hin, dass man sehen kann, wie viele Tausender, Hunderter, Zehner, Einer es sind.	▪ Wird an allen Stellen gebündelt? ▪ Werden nur die bereits vorliegenden Tausender/ Zehner berücksichtigt? ▪ Werden nur Objekte gezählt? ▪ Wird an allen Stellen gebündelt? ▪ Wird gruppiert oder getauscht?
In der Stellenwerttafel: 1 Tausender 15 Hunderter, 2 Zehner, 12 Einer vorlegen: Wie viele Tausender/Zehner hat diese Zahl? Begründe. Lege so hin, dass man sehen kann, wie viele Tausender, Hunderter, Zehner, Einer es sind.	▪ Wird an allen Stellen gebündelt? ▪ Werden nur die bereits vorliegenden Tausender/ Zehner berücksichtigt? ▪ Werden nur Objekte ohne Rücksicht auf ihren Stellenwert gezählt? ▪ Werden nur einzelne Plättchen verschoben (und somit eine Wertänderung herbeigeführt), oder wird entsprechend getauscht (10 Zehner weg, dafür ein Hunderter in die entsprechende Spalte)?

Tabelle III.9-3: Fördervorschläge (SB, Niveaustufe C)

Ziel	Förderung
Bündelungsidee festigen und anwenden	▪ Unsortiertes Zehnersystem-Material (bestenfalls pro Stellenwert mehr als zwanzig Objekte) bündeln lassen ▪ Anzahl der Tausender, Hunderter, Zehner und Einer nach dem Bündeln notieren lassen ▪ Plättchen in eine Stellenwerttafel legen (bestenfalls pro Stellenwert mehr als zwanzig Objekte) und bündeln lassen
Bündeln und Entbündeln über benachbarte Stellenwerte hinweg	▪ Impulse: Wie viele Zehner sind in einem Tausender? Wie viele Hunderter sind in einem Zehntausender? ▪ Veranschaulichung am Zehnersystem-Material („Wie viele Zehnerstangen passen in einen Tausenderwürfel?“) ▪ Veranschaulichung an der Stellenwerttafel über die Vorstellung des sukzessiven Entbündelns

Literatur zum Weiterlesen:

PIKAS. (o. J.). *Entwicklung des Stellenwertverständnisses*. Abgerufen von *https://pikas.dzlm.de/198* (Zugriff am 20.06.2021).

PRIMAKOM. (o. J.). *Stellenwertverständnis*. Abgerufen von *http://primakom.dzlm.de/400* (Zugriff am 20.06.2021).

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2015). *Handbuch für den Mathematikunterricht: 2. Schuljahr*. Braunschweig: Bildungshaus, S. 46-54.

Schipper, W.; Ebeling, A., & Dröge, R. (2017). *Handbuch für den Mathematikunterricht: 3. Schuljahr*. Braunschweig: Bildungshaus, S. 46-54.

Schulz, A. (2014). *Fachdidaktisches Wissen von Grundschullehrkräften: Diagnose und Förderung bei besonderen Problemen beim Rechnenlernen*. Wiesbaden: Springer Spektrum, S. 180-194.

Selter, Ch., Prediger, S., Nührenbörger, M., & Hußmann, S. (Hrsg.). (2014). *Mathe sicher können: Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen: Natürliche Zahlen.* Berlin: Cornelsen, S. 21-39.

9.2 DAS STELLENWERTSYSTEM VERSTEHEN UND NUTZEN ZUM LESEN UND SCHREIBEN VON ZAHLEN (SN)

Dem Stellenwertsystem liegen drei Prinzipien zugrunde: das Prinzip der fortgesetzten Bündelung, das Prinzip des Stellenwerts und das Prinzip des Nennwerts. Die beiden letztgenannten regeln unsere Schreibweise von Zahlen: Die Stellenwerte haben beim Schreiben immer die gleiche Ordnung: Einer rechts, Zehner links daneben, Hunderter links daneben usw. Und die notierte Ziffer pro Stellenwert gibt die Anzahl der jeweiligen Bündel pro Stellenwert an. Leere Stellen werden durch die Null gekennzeichnet (Padberg & Benz, 2011, S. 82).

Beim Schreiben, Lesen und Deuten geschriebener Zahlen (z. B. 2 034) müssen diese grundlegenden Prinzipien verstanden sein und sicher angewendet werden, da sonst eine Kommunikation mit und über Zahlen nicht möglich ist.

Ausgabe:
Dieser Förderinhalt beruht auf Fehlern bei der Eingabe und dem Deuten von Zahlen über den Gesamttest, insbesondere wenn zu wenige oder zu viele Nullen notiert wurden bzw. wenn diese beim Deuten von Zahlen vernachlässigt wurden. Ein weiterer Fehlertyp, der charakteristisch für Probleme beim Deuten von Stellenwerten ist, sind Zahlendreher.

Der Förderinhalt wird ausgegeben, wenn in diesem Bereich mehr als drei Fehler gemacht werden.

Tabelle III.9-4: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes SN (Niveaustufe C)

Anzahl falsch:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (SN)	7 %	18 %	27 %	21 %	12 %	8 %	4 %	2 %	1 %	0 %	0 %	3255
Bewertung	Unauffällig: 73 %				Auffällig: 27 %							

Ergänzende prozessorientierte Diagnose und Fördervorschläge

Tabelle III.9-5: Ergänzende prozessorientierte Diagnose (SN, Niveaustufe C)

Aufgabe	Beobachtungen
Notierte Zahlen vorlegen und mit Zehnersystem-Material/an der Stellenwerttafel legen lassen	▪ Werden Nullen berücksichtigt?
	▪ Werden die passenden Stellenwerte/Anzahlen berücksichtigt?
	▪ Werden zu viele Stellen freigelassen?
Markierung einzelner Ziffern: Was bedeutet diese Ziffer hier? Begründe.	▪ Wird über die Position und den entsprechenden Stellenwert im Zahlzeichen begründet? ▪ Können Nullen angemessen gedeutet werden?
Zahlen mit Zehnersystem-Material/an der Stellenwerttafel vorlegen und dann notieren lassen	▪ Werden unbesetzte Stellen berücksichtigt? ▪ Werden die passenden Stellenwerte/Anzahlen berücksichtigt? ▪ Werden zu viele Nullen notiert?
Einzelne Stellenwerte am Material markieren: Wo finde ich dies hier in deinem Zahlzeichen? Warum?	▪ Wird über die Position und den entsprechenden Stellenwert im Zahlzeichen begründet? ▪ Können unbesetzte Stellen angemessen begründet werden?

Tabelle III.9-6: Fördervorschläge (SN, Niveaustufe C)

Ziel	Förderung
Prinzip des Stellenwerts verstehen und anwenden (geschriebene Zahlen lesen und deuten)	▪ Notierte Zahlen stellenweise mit Zehnersystem-Material in eine Sortiertafel legen und zunächst stellenweise vorlesen (z. B. drei Tausender, zwei Hunderter, null Zehner, vier Einer) ▪ Notierte Zahlen stellenweise mit Plättchen in eine Stellenwerttafel legen und vorlesen (z. B. drei Tausender, zwei Hunderter, null Zehner, vier Einer) ▪ Wie oben, ohne ausführliche Sprechweise, sondern in konventioneller Sprechweise: dreitausend-zweihundert-und-vier. Dabei die inverse Sprechweise bei Zehnern und Einer thematisieren
Veränderungen in der Stellenwerttafel	▪ Plättchen verschieben: Darstellung mit Zahl, mit Zehnersystemmaterial

Literatur zum Weiterlesen:

PIKAS. (o. J.). *Entwicklung des Stellenwertverständnisses*. Abgerufen von *https://pikas.dzlm.de/198* (Zugriff am 20.06.2021).

PRIMAKOM. (o. J.). *Stellenwertverständnis*. Abgerufen von *http://primakom.dzlm.de/400* (Zugriff am 20.06.2021).

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2015). *Handbuch für den Mathematikunterricht: 2. Schuljahr*. Braunschweig: Bildungshaus, S. 46-54.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2017). *Handbuch für den Mathematikunterricht: 3. Schuljahr*. Braunschweig: Bildungshaus, S. 46-55.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2018). *Handbuch für den Mathematikunterricht: 4. Schuljahr*. Braunschweig: Bildungshaus, S. 40 f., 52 f.

Schulz, A. (2014). *Fachdidaktisches Wissen von Grundschullehrkräften: Diagnose und Förderung bei besonderen Problemen beim Rechnenlernen*. Wiesbaden: Springer Spektrum, S. 180-194.

Selter, Ch., Prediger, S., Nührenbörger, M., & Hußmann, S. (Hrsg.). (2014). *Mathe sicher können: Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen: Natürliche Zahlen.* Berlin: Cornelsen, S. 21-39.

9.3 RELEVANTE ARBEITSMITTEL UNTER BERÜCKSICHTIGUNG DER GEGEBENEN STRUKTURMERKMALE UND KONVENTIONEN NUTZEN (ST)

Konkrete Anschauungen stellen die Grundlage für gedankliche Modelle dar. Sie sind nötig, um mathematische Inhalte nicht symbolisch darzustellen. Lernende sollen an ihnen lernen, mathematische Inhalte zu verbalisieren und sie für Argumentationen heranzuziehen. Eine zentrale Voraussetzung ist, dass der strukturelle Aufbau dieser Veranschaulichungen bekannt ist (Schulz, 2014, S. 68).

Schwierigkeiten bei der Deutung können bei verschiedenen Materialien auftreten. Ein häufiger Fehler ist die Vermischung von kardinalem und ordinalem Zahlaspekt am Zahlenstrahl. Dies geschieht, wenn z. B. die Zahl 270 im zweiten Abschnitt des Zahlenstrahls vermutet wird. Weitere Fehler am Zahlenstrahl können auftreten, wenn Skalierungsstriche nicht angemessen gedeutet werden (z. B. Fünfer statt Zehner oder Hunderter statt Tausender). Auch bei der

Deutung des Zehnersystem-Materials können strukturelle Fehler entstehen, wenn zum Beispiel 5 Zehner als ein Hunderter gedeutet werden.

Ausgabe:
Dieser Förderinhalt beruht auf Deutungsfehlern am Zehnersystem-Material, am Zahlenstrahl und an Rechteckdarstellungen zur Veranschaulichung von Multiplikationsaufgaben. Zur grundlegenden Deutung des Zehnersystem-Materials wird die erneute Thematisierung von Bündelung und Entbündelung empfohlen (vgl. Förderinhalt SB (Prinzip des Bündelns und Entbündelns als Grundlage des Stellenwertsystems verstehen)). Zur grundlegenden Deutung von Rechteckmustern wird die erneute Thematisierung von Veranschaulichungen zur Multiplikation empfohlen (vgl. Förderinhalt GV (Grundvorstellungen zu Rechenoperationen aufbauen und nutzen)).

Tabelle III.9-7: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes ST (Niveaustufe C)

Anzahl falsch:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10-15	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (ST)	7 %	3 %	4 %	9 %	10 %	11 %	13 %	12 %	10 %	9 %	12 %	3255
Bewertung	Unauffällig: 69 %								Auffällig: 31 %			

Ergänzende prozessorientierte Diagnose und Fördervorschläge

Tabelle III.9-8: Ergänzende prozessorientierte Diagnose (ST, Niveaustufe C)

Aufgabe	Beobachtungen
Zahlenstrahl vorlegen: Wo ist die Zahl 290 (…)? Wie gehst du vor? Welche Zahl ist hier? Begründe.	▪ Werden die Skalierungsstriche angemessen gedeutet? ▪ Werden Skalierungen verwechselt? Welche? ▪ Welche Skalierungsstriche werden sicher zur Orientierung genutzt?
Zehnersystem-Material vorlegen: Welche Zahl ist das? Begründe.	▪ Werden die einzelnen Objekte entsprechend ihrer Bündelungsgröße genutzt? ▪ Werden Stellenwerte verwechselt? Welche?
Rechteckmuster vorlegen: Welche Rechenaufgabe siehst du hier? Erkläre. Welche Malaufgaben siehst du hier? Erkläre.	▪ Entspricht die Deutung der Veranschaulichung? ▪ Werden nur Ausschnitte der Darstellung berücksichtigt? ▪ Werden nur Additionsaufgaben genannt?
Andere Veranschaulichungen vorlegen (z. B. Punktefelder, Quadrat-Strich-Punkt-Darstellungen, Rechenrahmen): Welche Aufgabe(n)/Zahl siehst du? Erkläre.	▪ Entspricht die Deutung der Veranschaulichung? ▪ Werden nur Ausschnitte der Darstellung berücksichtigt?

Tabelle III.9-9: Fördervorschläge (ST, Niveaustufe C)

Ziel	Förderung
Strukturierungs-merkmale erkennen und kennen	▪ Verschiedene Veranschaulichungen (Beispiele siehe unten) zum Gegenstand der Diskussion machen. Dabei Strukturierungsmerkmale identifizieren und deren Bedeutung klären ▪ Am Zahlenstrahl: Länge der Skalierungsstriche und Abstand der Skalierungsstriche, Anzahl der Skalierungsstriche ▪ Am Zehnersystem-Material: Form der Objekte, Anzahl der jeweils enthaltenen Einer, Zehner, Hunderter ▪ An Punktefeldern/Rechteckdarstellungen: Farbunterschiede, Anzahl der jeweiligen Punkte, Stärke der Linien in Rechteckmustern
Angemessene Deutung der Struktur von Ver-anschaulichungen	▪ Bedeutung von Strukturierungsmerkmalen diskutieren. Diese anschließend angemessen nutzen ▪ Am Zahlenstrahl: Warum sind die Skalierungsstriche unterschiedlich lang? Warum steht die 10 am elften Strich? Warum sind zwischen der 5 und der 10 nur vier Striche? ▪ Am Zehnersystem-Material: Warum ist eine Platte immer Einhundert? Warum gibt es Platten? ▪ An Punktefeldern (100, 200, 400)/Rechteckdarstellungen: Warum sind hier Farbunterschiede? Warum sind diese Striche im Rechtecks-Muster dicker als die anderen? Was wird betrachtet – alle Punkte/Quadrate, nur einige? Warum?

Literatur zum Weiterlesen:

PRIMAKOM. (o. J.). *Schnelles und strukturierendes Sehen*. Abgerufen von *http://primakom.dzlm.de/463* (Zugriff am 20.06.2021).

PRIMAKOM. (o. J.). *Zahlenraumerweiterung und Zahlenstrahl*. Abgerufen von *http://primakom.dzlm.de/410* (Zugriff am 20.06.2021).

Schulz, A. (2017). Multiplikation verstehen – durch Anschauungsmaterial zu Grundvorstellungen. *Mathematik lehren, 201*, 17-22.

Schulz, A., & Wartha, S. (2011). Materialeinsatz im Mathematikunterricht: Risiken und Chancen. *MNU Primar, 3 (2)*, 49-56.

Selter, Ch., Prediger, S., Nührenbörger, M., & Hußmann, S. (Hrsg.). (2014). *Mathe sicher können: Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen: Natürliche Zahlen.* Berlin: Cornelsen, S. 21-66.

Söbbeke, E., & Steenpaß, A. (2014). Deutungsaufgaben zu Anschauungsmitteln: Entdeckungen am Zahlenstrahl. *Mathematik differenziert, 4*, 10-13.

Söbbeke, E., & Steenpaß, A. (2010). Mathematische Deutungsprozesse zu Anschauungsmitteln unterstützen. In C. Böttinger, K. Bräuning, M. Nührenbörger, R. Schwarzkopf, E. Söbbeke (Hrsg.), *Mathematik im Denken der Kinder: Anregungen zur mathematikdidaktischen Reflexion* (S. 216-245). Seelze-Velber: Kallmeyer Friedrich.

9.4 ZAHLEN IN BEZIEHUNG ZU ANDEREN ZAHLEN SETZEN (ZB)

Zu einem tragfähigen Zahlverständnis gehört unter anderem die Fähigkeit, sicher zwischen verschiedenen Darstellungsebenen der Zahl wechseln zu können (vgl. Teil III, Kap. 8.1). Darüber hinaus kann von einem tragfähigen Zahlverständnis ausgegangen werden, wenn Zahlen in ihrer Beziehung zu anderen Zahlen gedeutet werden können, ggf. auch ohne Wechsel der Darstellungsebenen. Dieses Denken in Zahlbeziehungen wird vor allem in größeren Zahlenräumen relevant, in denen Veranschaulichungen (bis auf den Zahlenstrahl) unübersichtlich würden.

Probleme beim Verstehen von Zahlen in Beziehung zu anderen Zahlen können dazu führen, dass Rechenstrategien nicht entwickelt werden und Rechengesetze nicht verstanden oder genutzt werden können.

Ausgabe:
Dieser Förderinhalt beruht auf Fehlern beim Bestimmen von Vorgängern und Nachfolgern (auch Nachbarhundertern und -tausendern) (Aufgabe „Nachbarzahlen“). Auch Fehler beim Bestimmen von Größer-Kleiner-Relationen (Aufgabe „Zahlvergleich“) und beim Fortführen von Zahlenfolgen (Aufgabe „Zahlenfolgen“) sind ein Kennzeichen für Probleme beim Erkennen und Nutzen von Beziehungen zwischen gegebenen Zahlen.

Der Förderinhalt wird ausgegeben, wenn in diesem Bereich mehr als 13 Fehler gemacht werden.

Tabelle III.9-10: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes ZB (Niveaustufe C)

Anzahl falsch:	0	1-5	6-10	11	12	13	14	15	16	17-19	20-24	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (ZB)	9 %	20 %	21 %	5 %	4 %	4 %	5 %	6 %	5 %	12 %	9 %	3255
Bewertung	Unauffällig: 63 %						Auffällig: 37 %					

Ergänzende prozessorientierte Diagnose und Fördervorschläge
Tabelle III.9-11: Ergänzende prozessorientierte Diagnose (ZB, Niveaustufe C)

Aufgabe	Beobachtungen
Zahlenvergleich (am Material oder symbolisch): Welche Zahl ist größer? Begründe.	▪ Wird mit der Anzahl der Stellen bzw. den Stellenwerten argumentiert? ▪ Welche anderen Merkmale werden für die Begründung genutzt?
Zahlenreihen fortsetzen: Wie kann es weitergehen? Begründe. Nenne eine Regel.	▪ An welchen Merkmalen orientiert sich die Schülerin / der Schüler? Passt die gefundene Regel zu diesen Merkmalen? ▪ Kann der jeweilige Abstand ermittelt werden? ▪ Wird hieraus eine Regel abgeleitet? ▪ Kann mit Kenntnis der Regel die Reihe fortgesetzt werden?

Nachbarzahlen (Einer, Zehner, Hunderter, Tausender, Zehntausender): Wie heißen die Nachbarn? Begründe. Wie gehst du vor?	▪ Wird mit den benachbarten Stufenzahlen argumentiert? ▪ Werden Stufenzahlen übersprungen (Nachbartausender statt -hunderter)? ▪ Werden Stufenzahlen nicht erreicht (Nachbarhunderter statt -tausender)?

Tabelle III.9-12: Fördervorschläge (ZB, Niveaustufe C)

Ziel	Förderung
Zahlen vergleichen	▪ Zahlen am Zahlenstrahl oder dem Zehnersystem-Material darstellen ▪ Wo liegt mehr? Welche Zahl steht weiter rechts? ▪ Zahlen als Additionsaufgabe aus Stellenwerten notieren (3 426 = 3 000 + 400 + 20 + 6) und dann die Aufgaben vergleichen
Beziehungen herstellen und nutzen	▪ Aufgaben zu gegebenen Zahlen finden, begründen und notieren, z. B. 4 000 = 2 · 2 000 = 8 000 : 2 = 3999 + 1 = 3 500 + 500 = ...
Stufenzahlen identifizieren und nutzen	▪ Stellenwerte aufbauen/abbauen: ▪ Zahlen sukzessive immer auf den nächsten Stellenwert auffüllen bzw. abbauen (350 175 + 5 → 350 180 + 20 → 350 200 → + 800 → 351 000 + 9 000 → 360 000 + 40 000 → 400 000)

Literatur zum Weiterlesen:

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2017). *Handbuch für den Mathematikunterricht: 3. Schuljahr*. Braunschweig: Bildungshaus, S. 38-63.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2018). *Handbuch für den Mathematikunterricht: 4. Schuljahr*. Braunschweig: Bildungshaus, S. 27-57.

Selter, Ch., Prediger, S., Nührenbörger, M., & Hußmann, S. (Hrsg.). (2014). *Mathe sicher können: Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen: Natürliche Zahlen.* Berlin: Cornelsen, S. 21-66.

9.5 GRUNDVORSTELLUNGEN ZU RECHENOPERATIONEN AUFBAUEN UND NUTZEN (GV)

Grundvorstellungen zu Rechenoperationen ermöglichen eine inhaltliche Deutung der Operationszeichen – beispielsweise in Rechengeschichten, Alltagssituationen, Bildern oder Handlungen. Die Bearbeitung von Textaufgaben über Rechenterme gelingt dann, wenn Grundvorstellungen aktiviert werden können, wenn also die Bedeutung der Operationszeichen genutzt werden kann. Grundvorstellungen sind somit nicht nur relevant zum Lösen von Textaufgaben im Mathematikunterricht, sondern vor allem auch zur Bewältigung mathematisch geprägter Alltagssituationen (Wartha & Schulz, 2012).

Auch die inhaltsbezogene Kenntnis und Anwendung von Fachbegriffen (z. B. addieren, Produkt) ist ein relevanter Aspekt tragfähiger Grundvorstellungen.

Können keine Grundvorstellungen aktiviert werden, so können Textaufgaben und auch mathematisch geprägte Alltagssituationen nicht sicher gelöst bzw. bewältigt werden. Stattdessen orientieren sich Schülerinnen und Schüler an Oberflächenmerkmalen der Aufgaben wie sog. Signalwörtern („bekommen“ bedeutet immer plus), den in der Aufgabe vorkommenden Zahlen oder können Situationen gar nicht mathematisch deuten. Ein weiterer Hinweis auf mangelhafte Grundvorstellungen ist, wenn bei überbestimmten Aufgaben zur Bestimmung des Ergebnisses irrelevante Zahlen herangezogen werden.

Zudem können fehlende Grundvorstellungen angenommen werden, wenn Lernende nicht in der Lage sind, passende Veranschaulichungen zu vorgegebenen Termen zu identifizieren.

Können Fachbegriffe inhaltlich nicht angemessen genutzt werden, wird eine zielführende Kommunikation über mathematische Sachverhalte unter Nutzung dieser Begriffe erschwert.

Ausgabe:
Dieser Förderinhalt wird ausgegeben, wenn die Schülerin oder der Schüler Fehler beim Bestimmen von passenden Termen zu vorgegebenen Rechengeschichten (Aufgabe „Textaufgaben“) gemacht hat (9 Items). Rechenkompetenzen sind hierbei nicht relevant. Auch Fehler bei der Zuordnung von passenden Veranschaulichungen zu vorgegebenen Termen (Aufgabe „Operationsmodell“, 5 Items) sind Grundlage für diesen Förderinhalt, ebenso wie die Kenntnis grundlegender Fachbegriffe (Aufgabe „Fachsprache“, 3 Items).

Der Förderinhalt wird ausgegeben, wenn in diesem Bereich mehr als acht Fehler gemacht werden.

Tabelle III.9-13: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes GV (Niveaustufe C)

Anzahl falsch:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10-17	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (GV)	7 %	1 %	2 %	5 %	8 %	11 %	11 %	12 %	10 %	9 %	15 %	3255
Bewertung	Unauffällig: 76 %									Auffällig: 24 %		

Ergänzende prozessorientierte Diagnose und Fördervorschläge

Tabelle III.9-14: Ergänzende prozessorientierte Diagnose (GV, Niveaustufe C)

Aufgabe	Beobachtungen
Textaufgaben vorgeben: (mit und ohne Fragestellung) Was musst du rechnen? Begründe. Was kannst du bei dieser Aufgabe rausbekommen? Was musst du dafür rechnen? Warum?	▪ Passt die Rechnung zu Text und Fragestellung? ▪ Woran orientiert sich die Schülerin / der Schüler? ▪ Kann die Grundsituation identifiziert werden? ▪ Werden die passenden Angaben und Operationen genutzt? Kann eine angemessene Fragestellung formuliert werden? ▪ Kann die entsprechende Grundsituation identifiziert werden? ▪ Werden die passenden Angaben und Operationen genutzt?
Term vorgeben: Erfinde passende Rechengeschichten. Begründe. Erstelle eine Skizze zur Rechnung. Erkläre.	▪ Wird die richtige Operation umgesetzt oder werden nur die gegebenen Zahlen verwendet? ▪ Wird die Operation angemessen umgesetzt oder werden nur die gegebenen Zahlen dargestellt?

Bild/Skizze (statisch) vorgeben (z. B. eine Rechteckdarstellung zur Veranschaulichung einer Multiplika-tionsaufgabe): Welche Rechenaufgabe kann man hier „sehen“. Begründe. Wo siehst du das Ergebnis?	▪ An welchen strukturellen Merkmalen der Abbildung orientiert sich die Schülerin / der Schüler? ▪ Wird das Bild als Ganzes gedeutet oder werden nur Teile berücksichtigt? ▪ Stimmt die genannte Rechnung mit der Deutung überein?
Veranschaulichung und Term vorgeben (z. B. Zehnersystem-Material, Zahlenstrahl, Rechenstrich): „Zeige bitte die Rechnung am Material. Was musst du machen/zeichnen?“ Erkläre.	▪ An welchen strukturellen Merkmalen der Veranschaulichung orientiert sich die Schülerin / der Schüler? ▪ Stimmt die Handlung mit der gegebenen Rechnung überein? Werden nur die beteiligten Zahlen berücksichtigt?

Tabelle III.9-15: Fördervorschläge (GV, Niveaustufe C)

Ziel	Förderung

Verständnisbasierte Zuordnung: Situationstypen und entsprechende Operationen	▪ Rechengeschichten ohne Fragestellung als Diskussionsgrundlage:
	  ▪ Erzähle mit eigenen Worten.
	  ▪ Was kann man hier rausbekommen?
	  ▪ Wie kann man das rausbekommen?
	  ▪ Welche Rechnung passt? Welche Rechnung passt nicht?
	▪ Rechengeschichten mit Fragestellung als Diskussionsgrundlage:
	  ▪ Erzähle die Geschichte mit eigenen Worten.
	  ▪ Was muss man rechnen? Begründe.
	  ▪ Rechengeschichten mit einfachem Zahlenmaterial wählen
	  ▪ (Zum Berechnen den Taschenrechner zulassen, um den gemeinsamen Fokus auf die Deutung der Situation zu richten)

Verständnisbasierte Zuordnung: Veranschaulichungen und entsprechende Operationen	▪ Veranschaulichung (z. B. Rechenrahmen, Zehnersystem-Material, Rechenstrich, Zahlenstrahl) vorgeben und beschreiben lassen ▪ Rechenaufgaben vorgeben und an der Veranschaulichung zeigen lassen ▪ Woher weißt du, was du machen musst?
Sensibilität für Situationstypen entwickeln	▪ Thematisierung von überbestimmten Aufgaben und „Kapitänsaufgaben" ▪ Rechengeschichten ohne Fragestellung als Diskussionsgrundlage: ▪ Welche Frage kann mit diesen Angaben NICHT beantwortet werden? Warum nicht? Welche zusätzlichen Informationen werden benötigt?

Literatur zum Weiterlesen:

Höveler, K., & Prediger, S. (2017). Vielfältige Rechenwege, erläutern und begründen. *Mathematik lehren, 201*, 11-16.

Kuhnke, K. (2012). *Unterrichtsanregungen zur Förderung des Darstellungswechsels: Am Beispiel der Multiplikation*. Abgerufen von: *https://pikas.dzlm.de/pikasfiles/uploads/upload/Material/Haus_3_-_Umgang_mit_Rechenschwierigkeiten/UM/H3.2_UM_DW.pdf/H3.2_Unterrichtsanregungen_DW.pdf*. Abgerufen von *http://pikas.dzlm.de/355* (Zugriff am 20.06.2021).

PRIMAKOM. (o. J.). *Operationsverständnis*. Abgerufen von *http://primakom.dzlm.de/350* (Zugriff am 20.06.2021).

PIKAS. (o. J.). *Operationsverständnis*. Abgerufen von *https://pikas.dzlm.de/254* (Zugriff am 20.06.2021).

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2017). *Handbuch für den Mathematikunterricht: 3. Schuljahr*. Braunschweig: Bildungshaus, S. 63-72.

Schulz, A. (2017). Multiplikation verstehen – durch Anschauungsmaterial zu Grundvorstellungen. *Mathematik lehren, 201*, 17-22.

Selter, Ch., Prediger, S., Nührenbörger, M., & Hußmann, S. (Hrsg.). (2014). *Mathe sicher können: Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen: Natürliche Zahlen.* Berlin: Cornelsen, S. 67-98.

9.6 AUFGABEN DES KLEINEN EINMALEINS UND EINSDURCHEINS SCHNELL UND SICHER ABRUFEN (KE)

Das automatisierte Abrufen aller Aufgaben des kleinen Einmaleins (inklusive der entsprechenden Divisionsaufgaben) ist eine notwendige Grundlage für das sichere und flexible Berechnen von Multiplikations- und Divisionsaufgaben im Zahlenraum größer als 100. Zudem ist die Automatisierung dieser Aufgaben eine wichtige Grundlage für den sicheren Umgang mit Bruchzahlen.

Können Aufgaben des kleinen Einmaleins nicht sicher abgerufen werden, so kann auch das für den großen Zahlenraum unverzichtbare Distributivgesetz nicht genutzt werden. Auf diese Weise wird nicht nur das sichere und flexible Rechnen von Multiplikations- und Divisionsaufgaben nahezu unmöglich, sondern Erkenntnisse über Zahl- und Aufgabenzusammenhänge können nicht gewonnen werden.

Ausgabe:
Dieser Förderinhalt ergibt sich aus Fehlern beim Lösen von 10 Aufgaben des kleinen Einmaleins (inklusive Divisionsaufgaben). Bei bereits einer fehlerhaften Lösung sollte eine ergänzende prozessorientierte Diagnose stattfinden. Der Förderinhalt wird jedoch erst ausgegeben, wenn in diesem Bereich mehr als drei Fehler gemacht werden.

Zur Erarbeitung einer tragfähigen Grundvorstellung zu Multiplikation und Division vgl. auch Teil III, Kap. 7.7 und 7.10.

Tabelle III.9-16: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes KE (Niveaustufe C)

Anzahl falsch:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (KE)	42 %	19 %	10 %	6 %	5 %	3 %	3 %	3 %	3 %	3 %	3 %	3255
Bewertung	Unauffällig: 77 %				Auffällig: 23 %							

Ergänzende prozessorientierte Diagnose und Fördervorschläge

Tabelle III.9-17: Ergänzende prozessorientierte Diagnose (KE, Niveaustufe C)

Aufgabe	Beobachtungen
Abfrage verschiedener Aufgaben zur Multiplikation und Division (Kleines Einmaleins)	▪ Wie werden die Aufgaben gelöst? ▪ Ableitungen aus Kernaufgaben ▪ Auswendigwissen ▪ Zählendes Vorgehen, z. B. über das Aufsagen der Reihen
Abfrage der verschiedenen Kernaufgaben (·2, ·5, ·10, Quadrataufgaben)	▪ Wie werden die Aufgaben gelöst? ▪ Auswendigwissen oder zählendes Vorgehen, z. B. über das Aufsagen der Reihen

Tabelle III.9-18: Fördervorschläge (KE, Niveaustufe C)

Ziel	Förderung
Multiplikations-aufgaben veranschaulichen	▪ Mithilfe des Malwinkels werden am Hunderterpunktefeld Malaufgaben veranschaulicht. Tauschaufgaben werden direkt thematisiert (z. B.: 3 Reihen mit jeweils 4 Punkten. 3 · 4 = 12 oder 4 Spalten mit je 3 Punkten. 4 · 3 = 12). ▪ Durch Verschieben des Malwinkels können direkt Nachbaraufgaben gezeigt und thematisiert werden. ▪ Impulse: Was passiert, wenn ich das eine Blatt eine Spalte weiter nach rechts/links oder eine Reihe weiter nach oben/unten schiebe? Wie lautet die Rechenaufgabe? Wie viele Punkte sind es?
Zusammenhang zwischen Multiplikation und Division	▪ Anhand von gelegten Punktbildern können der Schülerin / dem Schüler sowohl Multiplikations- als auch Divisionsaufgabe sichtbar gemacht werden. Zusammenhang auch symbolisch dokumentieren ▪ Bearbeiten und Thematisieren von Aufgabenfamilien (7 · 8 = 56, 8 · 7 = 56, 56 : 8 = 7, 56 : 7 = 8)
Ableitungsstrategien festigen	▪ Am Punktefeld Malaufgaben darstellen und mit einem Stift so unterteilen, dass auswendig gewusste Aufgaben entstehen. Zusammenhänge zwischen den „leichten“ und schweren Aufgaben besprechen und dokumentieren (z. B.: 7 · 8 = 5 · 8 + 2 · 8)
Automatisieren	▪ „Quartette“, Partner-Abfragen (auch auf Zeit), Lernkarteien

Literatur zum Weiterlesen:

Gaidoschik, M. (2014). *Einmaleins verstehen, vernetzen, merken: Strategien gegen Lernschwierigkeiten* (1. Aufl.). Seelze-Velber: Klett Kallmeyer Friedrich.

PRIMAKOM. (o. J.). *Gestütztes Üben*. Abgerufen von *http://primakom.dzlm.de/480* (Zugriff am 20.06.2021).

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2015). *Handbuch für den Mathematikunterricht: 2. Schuljahr*. Braunschweig: Bildungshaus, S. 109-128.

Schulz, A. (2017). Multiplikation verstehen – durch Anschauungsmaterial zu Grundvorstellungen. *Mathematik lehren, 201*, 17-22.

Wittmann, E. Ch., & Müller, G. N. (1990). *Handbuch produktiver Rechenübungen: Vom Einspluseins zum Einmaleins* (Bd. 1). Leipzig: Klett, S. 82-106.

Wittmann, E. Ch., & Müller, G. N. (2006). *Blitzrechnen 2: Basiskurs Zahlen*. Leipzig: Klett.

Wittmann, E. Ch., & Müller, G. N. (2006). *Blitzrechnen 3: Basiskurs Zahlen*. Leipzig: Klett.

9.7 TRAGFÄHIGE STRATEGIEN UND RECHENREGELN ZUR ADDITION UND SUBTRAKTION NUTZEN (PM)

Tragfähige Strategien zur Lösung von Additions- und Subtraktionsaufgaben nehmen Zahlen (und nicht Ziffern) in Gebrauch. Somit tragen sie zur Vertiefung von Zahl- und Operationsvorstellungen bei und ermöglichen es den Lernenden im Alltags- und Berufsleben, dass sie beim genauen und überschlagenden Rechnen auf Zahlbeziehungen und Operationseigenschaften zurückgreifen können.

Sind keine tragfähigen Rechenstrategien aufgebaut, so werden Zahlen häufig nur als Ziffernkombinationen betrachtet und können oft nur mit Algorithmen verrechnet werden. Die negative Folge kann sein, dass auch in realitätsnahen Kontexten (z. B. beim Schätzen von Ergebnissen) keine Zahlvorstellungen aktiviert werden können.

Ausgabe:
Dieser Förderinhalt ergibt sich aus Fehlern beim Lösen von vier Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 1 000. Das Zahlenmaterial der Aufgaben ist dabei so gewählt, dass eine Lösung im Kopf durch geschicktes Rechnen möglich wäre. Bei bereits einer fehlerhaften Lösung sollte eine ergänzende prozessorientierte Diagnose stattfinden.

Der Förderinhalt wird ausgegeben, wenn in diesem Bereich mehr als zwei Fehler gemacht werden.

Tabelle III.9-19: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes PM (Niveaustufe C)

Anzahl falsch:	0	1	2	3	4	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (PM)	15 %	20 %	19 %	18 %	28 %	2976
Bewertung	Unauffällig: 54 %			Auffällig: 46 %		

Ergänzende prozessorientierte Diagnose und Fördervorschläge
Tabelle III.9-20: Ergänzende prozessorientierte Diagnose (PM, Niveaustufe C)

Aufgabe	Beobachtungen
Bitte rechne: 698 + 97, 501 – 97, 379 + 431, 249 + 253, 472 – 469, 675 – 76. Erkläre laut (und notiere), wie du vorgehst.	▪ Welches strategische Vorgehen wird genutzt? ▪ Können Zahl- und Operationszusammenhänge sicher genutzt werden? ▪ Werden Zahlen oder Ziffern verrechnet? ▪ Bestehen Probleme beim Verstehen der Stellenwerte? ▪ Werden alle Teilrechnungen berücksichtigt?

Bitte rechne: 500 – 30, 400 + 50, 250 + 250, 800 + 400. Erkläre laut (und notiere), wie du vorgehst.	▪ Wie werden diese einfachen Grundaufgaben gelöst? ▪ Werden die Stellenwerte berücksichtigt? ▪ Können Analogien genutzt werden (800 + 400 über 8 + 4)?

Tabelle III.9-21: Fördervorschläge (PM, Niveaustufe C)

Ziel	Förderung
Tragfähige Rechenstrategie erarbeiten und sichern (schrittweises Vorgehen unter Nutzung der beteiligten Zahlen - nicht der Ziffern)	▪ Verschiedene, tragfähige Rechenwege besprechen und am Rechenstrich visualisieren ▪ Rückgriff auf den Zahlenraum bis 100, um Analogien zu verdeutlichen (z. B. 61 – 59 und 601 – 599; 25 + 26 und 249 + 253; 54 – 9 und 543 – 99)

Flexibles und adaptives Vorgehen erarbeiten und sichern	▪ „Unterdrücken des Rechendrangs“:
	  ▪ Aufgaben sortieren: Welche Aufgaben kannst du einfach und schnell lösen? Warum?
	  ▪ Erkennst du Zusammenhänge zwischen den Aufgaben?

Ggf. Erarbeitung der notwendigen Voraussetzungen	▪ Automatisierung des kleinen Einspluseins (vgl. Niveaustufe B) ▪ Erarbeitung eines tragfähigen Stellenwertverständnisses (vgl. Förderinhalt SN (Das Stellenwertsystem verstehen und nutzen zum Lesen und Schreiben von Zahlen) ▪ Erarbeitung eines tragfähigen Operationsverständnisses (vgl. Förderinhalt GV (Grundvorstellungen zu Rechenoperationen aufbauen und nutzen)) ▪ Erarbeitung eines tragfähigen Verständnisses für Zahlbeziehungen (vgl. Förderinhalt ZB (Zahlen in Beziehung zu anderen Zahlen setzen))

Literatur zum Weiterlesen:

Höveler, K., & Prediger, S. (2017). Vielfältige Rechenwege, erläutern und begründen. *Mathematik lehren, 201*, 11-16.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2018). *Handbuch für den Mathematikunterricht: 4. Schuljahr*. Braunschweig: Bildungshaus, S. 57-65.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2017). *Handbuch für den Mathematikunterricht: 3. Schuljahr*. Braunschweig: Bildungshaus, S. 63-74.

Selter, Ch., Prediger, S., Nührenbörger, M., & Hußmann, S. (Hrsg.). (2014). *Mathe sicher können: Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen: Natürliche Zahlen.* Berlin: Cornelsen, S. 99-107.

9.8 TRAGFÄHIGE STRATEGIEN UND RECHENREGELN ZUR MULTIPLIKATION UND DIVISION NUTZEN (MD)

Tragfähige Strategien zur Lösung von Multiplikations- und Divisionsaufgaben nehmen Zahlen (und nicht Ziffern) in Gebrauch. Somit tragen sie zur Vertiefung von Zahl- und Operationsvorstellungen bei und ermöglichen es den Lernenden im Alltags- und Berufsleben, dass sie beim genauen und überschlagenden Rechnen auf Zahlbeziehungen und Operationseigenschaften zurückgreifen können.

Sind keine tragfähigen Rechenstrategien aufgebaut, so werden Zahlen häufig nur als Ziffernkombinationen betrachtet und können häufig nur mit Algorithmen verrechnet werden. Die negative Folge kann sein, dass auch in realitätsnahen Kontexten (z. B. beim Schätzen von Ergebnissen) keine Zahlvorstellungen aktiviert werden können.

Ausgabe:
Dieser Förderinhalt wird ausgegeben aufgrund von Fehlern beim Lösen von vier Multiplikations- und Divisionsaufgaben im Zahlenraum bis 1 000. Das Zahlenmaterial der Aufgaben ist dabei so gewählt, dass eine Lösung im Kopf durch geschicktes Rechnen möglich ist. Bei bereits einer fehlerhaften Lösung sollte eine ergänzende prozessorientierte Diagnose stattfinden.

Der Förderinhalt wird ausgegeben, wenn in diesem Bereich mehr als zwei Fehler gemacht werden.

Tabelle III.9-22: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes MD (Niveaustufe C)

Anzahl falsch:	0	1	2	3	4	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (MD)	1 %	3 %	10 %	21 %	65 %	2967
Bewertung	Unauffällig: 14 %			Auffällig: 86 %		

Bei diesem Inhalt weicht die Minimalzahl der Fehler für die Ausgabe des Förderinhaltes von der Regelung „mehr als eine halbe Standardabweichung über dem Mittelwert der Normierungsstichprobe“ ab. Nach dieser Regelung müsste ein Lernender bei den vier Aufgaben mindestens drei Fehler machen, um als auffällig zu gelten. Bei den vergleichsweise einfachen Aufgaben ist jedoch bereits bei zwei Fehlern davon auszugehen, dass tragfähige Strategien zur Multiplikation bzw. Division noch nicht angemessen entwickelt wurden.

Ergänzende prozessorientierte Diagnose und Fördervorschläge

Tabelle III.9-23: Ergänzende prozessorientierte Diagnose (MD, Niveaustufe C)

Aufgabe	Beobachtungen
Wie rechnest du: 25 · 19; 495 : 5; 70 · 61; 13 · 16; 240 : 12; 567 : 7? Erkläre laut (und notiere), wie du vorgehst.	▪ Welches strategische Vorgehen wird genutzt? ▪ Können Zahl- und Operationszusammenhänge sicher genutzt werden? ▪ Werden Zahlen oder Ziffern verrechnet? ▪ Bestehen Probleme beim Verstehen der Stellenwerte? ▪ Werden alle Teilrechnungen berücksichtigt?
Wie rechnest du: 20 · 20; 500 : 5; 70 · 60; 560 : 7; 24 : 12? Erkläre laut (und notiere), wie du vorgehst.	▪ Wie werden diese einfachen Grundaufgaben gelöst? ▪ Werden die Stellenwerte berücksichtigt? ▪ Können Analogien genutzt werden (70 · 60 über 7Z · 6Z)?

Tabelle III.9-24: Fördervorschläge (MD, Niveaustufe C)

Ziel	Förderung
Tragfähige Rechenstrategie erarbeiten und sichern (schrittweises Vorgehen unter Nutzung der beteiligten Zahlen - nicht der Ziffern)	▪ Verschiedene, tragfähige Rechenwege besprechen und an Rechteckskizzen visualisieren: ▪ Analogien zu den Ableitungsstrategien beim kleinen Einmaleins herstellen (z. B. 54 : 6 liegt in der Nähe von 60 : 6; 495 : 5 liegt in der Nähe von 500 : 5)
	▪ Besonderer Fokus: Berücksichtigung aller Teilrechnungen: ▪ Mal-Kreuz zur Visualisierung und Kontrolle, ob alle Teilrechnungen berücksichtigt wurden
	▪ Besonderer Fokus: Beachtung der jeweiligen Stellenwerte Thematisierung der Vervielfachung der Stellenwerte (z. B. zehn Hunderter, hundert Hunderter): ▪ Zum Bündeln und Entbündeln auch über benachbarte Stellenwerte hinweg vgl. Förderinhalt SB (Prinzip des Bündelns und Entbündelns als Grundlage des Stellenwertsystems verstehen).
Flexibles und adaptives Vorgehen erarbeiten und sichern	▪ „Unterdrücken des Rechendrangs“: ▪ Aufgaben sortieren: Welche Aufgaben kannst du einfach und schnell lösen? Warum? ▪ Erkennst du Zusammenhänge zwischen den Aufgaben?
Ggf. Erarbeitung der notwendigen Voraussetzungen	▪ Automatisierung des kleinen Einmaleins (vgl. Niveaustufe B): ▪ Erarbeitung eines tragfähigen Stellenwertverständnisses (vgl. Förderinhalt SN (Das Stellenwertsystem verstehen und nutzen zum Lesen und Schreiben von Zahlen)) ▪ Erarbeitung eines tragfähigen Operationsverständnisses (vgl. Förderinhalt GV (Grundvorstellungen zu Rechenoperationen aufbauen und nutzen)) ▪ Erarbeitung eines tragfähigen Verständnisses für Zahlbeziehungen (vgl. Förderinhalt ZB (Zahlen in Beziehung zu anderen Zahlen setzen))

Literatur zum Weiterlesen:

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2018). *Handbuch für den Mathematikunterricht: 4. Schuljahr*. Braunschweig: Bildungshaus, S. 65-78.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2017). *Handbuch für den Mathematikunterricht: 3. Schuljahr*. Braunschweig: Bildungshaus, S. 86-100.

Schulz, A. (2017). Multiplikation verstehen – durch Anschauungsmaterial zu Grundvorstellungen. *Mathematik lehren, 201*, 17-22.

Selter, Ch., Prediger, S., Nührenbörger, M., & Hußmann, S. (Hrsg.). (2014). *Mathe sicher können: Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen: Natürliche Zahlen.* Berlin: Cornelsen, S. 108-134.

Wittmann, E. Ch., & Müller, G. N. (1992). *Handbuch produktiver Rechenübungen:* Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen (Bd. 2). Leipzig: Klett, S. 46-84.

9.9 GEOMETRISCHE OBJEKTE, IHRE EIGENSCHAFTEN UND BEZIEHUNGEN ANHAND VON BESCHREIBUNGEN UND GRAFIKEN ERKENNEN UND BENENNEN (BE)

Geometrische Begriffe beschreiben die Einteilung ebener und räumlicher Objekte. „Wir sprechen von einem Begriff, wenn damit nicht nur ein einzelner Gegenstand [...] bezeichnet wird, sondern eine Kategorie, eine Klasse assoziiert wird, in die der konkrete Gegenstand einzuordnen ist." (Franke, 2001, S. 72).

Im geometrischen Kontext können Objekte, Eigenschaften und Relationen in Begriffsklassen beschrieben werden. Hierbei sind

- Objektbegriffe, z. B. Viereck, Dreieck, Quadrat, Würfel,
- Eigenschaftsbegriffe, z. B. quadratisch, rund, rechtwinklig, parallel,
- Relationsbegriffe, z. B. gleich lang, senkrecht auf, parallel zu.

Charakteristisch für die Begriffsbildung ist die Organisation der Begriffe in hierarchische Beziehungen (Breidenbach, 1964).

Das Begriffsverständnis kann in Stufen unterteilt werden (Franke & Reinhold, 2016, S. 130; Weigand, 2014, S. 120):

- *Intuitives Begriffsverständnis*: Orientierung an Prototypen, Beispiele und Gegenbeispiele können intuitiv identifiziert werden.
- *Inhaltliches Begriffsverständnis:* Eigenschaften und Beziehungen werden zur Identifikation, Beschreibung und Konstruktion genutzt.
- *Integriertes Begriffsverständnis:* Beziehungen zwischen Begriffen werden hergestellt, es entsteht ein Begriffsnetz, Ober- und Unter- und nebengeordnete Begriffe können am konkreten Beispiel in Beziehung gesetzt werden (Beispiel: „Haus der Vierecke").
- *Formales Begriffsverständnis:* Begriffsklärung über formale Definitionen, Repräsentanten müssen zur Identifikation von Zusammenhängen und Beziehungen nicht mehr vorliegen.

Auf der Niveaustufe C wird im Bereich „Geometrische Körper und Figuren" und im Bereich „Symmetrien" ein inhaltliches Begriffsverständnis erwartet. Auch die grundlegenden Eigenschaftsbegriffe sollten auf diesem Niveau verstanden sein.

Ohne ein Begriffsverständnis ist eine Kommunikation über geometrische Objekte nicht zielführend (Hasemann & Gasteiger, 2014, S. 176). Auch sind zahlreiche Begriffe grundlegend für die Begriffsbildung weiterer geometrischer Objekte. Insbesondere werden Körper und Figuren häufig durch die Eigenschaften und Beziehungen ihrer Begrenzungsflächen und -seiten beschrieben.

Ausgabe:
Grundlage für die Ausgabe des Förderinhaltes sind alle Aufgaben, bei denen Figuren und Körper benannt bzw. aufgrund ihrer Umschreibung identifiziert werden müssen (Aufgaben „Objektbeschreibungen", „Vierecke", „Gerade, „Strecke, Strahl", 22 Items). Auch das Identifizieren von senkrechten und parallelen Kanten im Würfel ist Grundlage für diesen Förderinhalt (Aufgabe „Raum-Lage", 2 Items).

Der Förderinhalt wird ausgegeben, wenn mehr als elf Items falsch gelöst wurden.

Tabelle III.9-25: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes BE (Niveaustufe C)

Anzahl falsch:	0-5	6-8	9	10	11	12	13	14	15	16-24	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (BE)	10 %	21 %	10 %	12 %	12 %	11 %	10 %	7 %	4 %	3 %	2882
Bewertung	Unauffällig: 65 %					Auffällig: 35 %					

Ergänzende prozessorientierte Diagnose und Fördervorschläge

Tabelle III.9-26: Ergänzende prozessorientierte Diagnose (BE, Niveaustufe C)

Aufgabe	Beobachtungen
Auswahl von Objekten bzw. ein Objekt vorlegen: Wo siehst du … ▪ ein Parallelogramm? ▪ ein Trapez? ▪ ein Quadrat? Warum ist es ein Parallelogramm …? Warum ist das kein Parallelogramm ...? Vorlegen nicht prototypischer Objekte: Ist das ein Rechteck? Warum – warum nicht?	▪ Kann die Schülerin / der Schüler die verschiedenen geometrischen Figuren erkennen und ihre/seine Auswahl erklären? ▪ Werden relevante Eigenschaften und Relationen zur Erklärung genutzt oder wird mit „dem Aussehen“ argumentiert?“ ▪ Werden die hierarchischen Beziehungen berücksichtigt (auch Quadrate sind Parallelogramme, auch Parallelogramme sind Trapeze)? ▪ Werden die Objekte auch erkannt, wenn sie nicht prototypisch sind/liegen? ▪ Werden dreidimensionale Objekte mit „zweidimensionalen Begriffen“ bezeichnet?
Figuren vorlegen, mit und ohne senkrechte und parallele Seiten: Wo siehst du Linien, die senkrecht zueinanderstehen? Wo siehst du Linien, die parallel zueinander sind? Begründe.	▪ Können entsprechende Linien identifiziert werden? ▪ Wird dabei nur mit „dem Aussehen“ argumentiert oder mit geometrischem Vokabular (Faltwinkel, überall gleich weit auseinander, werden sich nicht schneiden)? ▪ Wird durch Messen geprüft (Abstand messen, Geodreieck nutzen bei Parallelen, Faltwinkel, Geodreieck anlegen bei Senkrechten)?
Zeichne ein Trapez (Quadrat ...) – worauf achtest du? Zeichne noch ein anderes Trapez (…).	▪ Zeichnet die Schülerin / der Schüler das geforderte Objekt? Wählt sie/er nur prototypische Darstellungen? ▪ Werden relevante Eigenschaften und Relationen zur Erklärung genutzt oder wird mit „dem Aussehen“ argumentiert?“
Ist ein Quadrat auch ein Parallelogramm? Ein Trapez?	▪ Können die hierarchischen Beziehungen auch ohne die konkreten Objekte begründet werden?

Tabelle III.9-27: Fördervorschläge (BE, Niveaustufe C)

Ziel	Förderung
Abstrahieren von Eigenschaften	▪ Sortieren von Objekten, Beschreiben der Gemeinsamkeiten, nach denen die Sortierung vorgenommen wurde. Zunächst ohne Richtig und Falsch. ▪ Aussortieren („eins passt nicht – welches – warum?“) von Objekten ▪ Vergleichen – Vorlegen von zwei Objekten (Gemeinsamkeiten und Unterschiede beschreiben) ▪ Erstellen eines gemeinsamen Begriffswortschatzes, Sammeln und Dokumentieren der relevanten Begriffe mit entsprechend markierten Beispielen (Beispiele: parallele Strecken, senkrechte Strecken, (rechte Winkel), symmetrische Figuren, gleich lange Strecken, Raute, Quadrat, Trapez ...) ▪ Erstellen von Begriffsplakaten mit Beispielen (auch nicht typischen) und Gegenbeispielen
Spezifizieren von Objekten	▪ Aus einer Klasse von Objekten (z. B. Vierecke) einige mit vorgegebenen Eigenschaften aussortieren (z. B. rechte Winkel oder parallele Seiten) ▪ Prüfen, ob gegebene Objekte bestimmte Eigenschaften erfüllen (spiegeln, messen, rechte Winkel überprüfen, Parallelität überprüfen ...) und Thematisierung, Anwendung und Dokumentation dieser Prüfmethoden ▪ Beschreiben von Gemeinsamkeiten und Unterschieden von vorgegebenen Objekten (z. B. nicht quadratisches Rechteck und quadratisches Rechteck, nicht quadratische Raute und quadratische Raute)
Herstellen von Objekten	▪ Bauen, Legen, Falten, Zeichnen, Spannen von vorgegebenen Objekten (z. B. nicht quadratische Trapeze) auf dem Geobrett ▪ Ergänzen von begonnenen Zeichnungen zu einem vorgegebenen Objekt: Worauf musst du achten? ▪ Herstellen von Vierecken mit Stäben: Worauf musst du beim Legen eines Trapezes (Parallelogramms, Drachenvierecks, Quadrats ...) achten? Wie viele gleich lange Stäbe brauchst du für ein (nicht quadratisches) Parallelogramm (ein Quadrat)?
Objekte aus der Vorstellung beschreiben	▪ Beschreiben von Quadrat, Rechteck, Würfel (…) aus der Vorstellung ▪ Beschreibe so genau wie möglich. ▪ Nenne nur die wichtigsten Eigenschaften.

Literatur zum Weiterlesen:

Bauer, R. (1997). *Geometrische Körper*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Bettner, M., & Dinges, E. (2010). *Mathe an Stationen: Umgang mit Geodreieck und Zirkel in der Sekundarstufe I*. Donauwörth: Auer.

Bettner, M., & Dinges, E. (2011). *Mathe an Stationen: Umgang mit dem Geobrett in der Sekundarstufe I.* Donauwörth: Auer.

Franke, M., & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie – In der Grundschule* (3. Aufl.). Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum, S. 115-146.

Evermann, C., & Stoiber, T. (2015). Alles klar im Haus der Vierecke? Schülerfehler und begriffliche Schwierigkeiten beim Klassifizieren von Vierecken. *Mathematik lehren, 32* (191), 13-15.

Kotlenga, A. (2005). *Lernzirkel Geometrische Körper*. Horneburg: Persen.

Ludwig, M., & Weigand, H.-G. (2014). Konstruieren. In H.-G. Weigand (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie in der Sekundarstufe I* (2. Aufl., S. 55-80). Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Neumann, K. (2010). *Mathematik selbst entdecken: Vierecke*. Buxtehude: AOL-Verlag.

Roth, J., & Wittmann, G. (2014). Ebene Figuren und Körper. In H.-G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth, G. Wittmann (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (S. 123-156). Berlin: Springer Spektrum.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2017). *Handbuch für den Mathematikunterricht: 3. Schuljahr*. Braunschweig: Bildungshaus, S. 132-151.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2018). *Handbuch für den Mathematikunterricht: 4. Schuljahr*. Braunschweig: Bildungshaus, S. 127 ff.

Weigand, H.-G. (2014). Begriffslernen und Begriffslehren. In H.-G. Weigand (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie in der Sekundarstufe I* (2. Aufl., S. 99-122). Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

9.10 EBENE FIGUREN AUF SYMMETRIEN UNTERSUCHEN UND CHARAKTERISTISCHE EIGENSCHAFTEN DIESER SYMMETRIEN KENNEN UND NUTZEN (SY)

Die Entwicklung eines Symmetrieverständnisses ist von zentraler Bedeutung. Dies hat vor allem zwei Gründe:

- Die Eigenschaft der Symmetrie kann zahlreiche geometrische Objekte charakterisieren und ist somit zentraler Bestandteil für die Begriffsbildung.
- Die Achsenspiegelung ist die erste und grundlegende Kongruenzabbildung. Alle Kongruenzabbildungen können auf Achsenspiegelungen zurückgeführt werden.

Die Kongruenzabbildungen sind: Achsenspiegelung, Punktspiegelung, Drehungen, Verschiebungen und deren Verkettungen (Schmidt-Thieme & Weigand, 2014, S. 187).

Ein tragfähiges Symmetrieverständnis wird angenommen, wenn die Untersuchung geometrischer Objekte auf Symmetrien und die Durchführung symmetrischer Abbildungen gelingt.

In Niveaustufe C geht es vor allem auch darum, Achsen-, Dreh- und Schubsymmetrie und deren Eigenschaften zu erkennen und voneinander unterscheiden zu können, und um die Ausführung der Spiegelung an einer Achse.

Ohne Symmetrieverständnis können Objekte nicht sicher auf Symmetrie untersucht werden. Dies ist sehr problematisch für die Objektbegriffsentwicklung. Auch die Untersuchung von geometrischen Abbildungen ist ohne Symmetrieverständnis nicht zielgerichtet möglich. Ebenso wenig gelingt das Führen von Beweisen unter Nutzung von Symmetrien und Kongruenzen (Schmidt-Thieme & Weigand, 2014, S. 191).

Ausgabe:
Grundlage für die Ausgabe des Förderinhaltes sind fehlerhafte Bearbeitung von Aufgaben, bei denen angegeben werden muss, um welche Art von Abbildung es sich handelt (Dreh-, Schub-, Achsensymmetrie) (Aufgaben „Eigenschaften“, „Abbildungen“, 10 Items). Auch Fehler beim Herstellen bzw. Ergänzen von achsensymmetrischen Figuren und Bandornamenten werden hier berücksichtigt (Aufgaben „Bandornament“, „Spiegeln“, 5 Items). Der Förderinhalt wird ausgegeben, wenn neun oder mehr der insgesamt 15 Items fehlerhaft bearbeitet werden.

Tabelle III.9-28: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes SY (Niveaustufe C)

Anzahl falsch:	0-2	3	4	5	6	7	8	9	10	11-15	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (SY)	2 %	3 %	8 %	13 %	16 %	19 %	15 %	11 %	7 %	6 %	2937
Bewertung	Unauffällig: 76 %							Auffällig: 24 %			

Ergänzende prozessorientierte Diagnose und Fördervorschläge

Tabelle III.9-29: Ergänzende prozessorientierte Diagnose (SY, Niveaustufe C)

<table>
<tr><th>Aufgabe</th><th>Beobachtungen</th></tr>
<tr><td>Einfach, mehrfach und nicht symmetrische Figuren vorlegen:
Sortiere: Symmetrisch oder nicht symmetrisch? Begründe.
Zeichne Spiegelachsen ein.</td><td rowspan="3">▪ Werden mehrfach symmetrische Figuren (z. B. Kreis oder Quadrat) überhaupt als symmetrisch erkannt?
▪ Kann (können) die Spiegelachse(n) identifiziert werden?
▪ Wie wird die Symmetrie überprüft bzw. widerlegt:
  ▪ Werden Objekte konkret oder in der Vorstellung gefaltet?
  ▪ Wird mit Längen und Abständen gearbeitet und argumentiert?
  ▪ Wird nur mit dem „Aussehen“ argumentiert?</td></tr>
<tr><td>Objekte mit eingezeichneten Geraden vorgeben:
Welche Geraden sind Symmetrieachsen (Warum?), welche sind keine (Warum nicht?)?</td></tr>
<tr><td>Wie kannst du bei diesem Objekt herausfinden, ob es achsensymmetrisch ist?</td></tr>
<tr><td>Dreh-, schub-, achsensymmetrische Figuren vorlegen:
Sortieren: Welche sind schubsymmetrisch? Welche sind drehsymmetrisch? Begründe.</td><td>▪ Werden Begriffe vertauscht (z. B. Dreh- statt Schubsymmetrie)?
▪ Wie wird die Symmetrie erkannt bzw. widerlegt:
  ▪ Wird über mentale Bewegung argumentiert (drehen oder schieben)?
  ▪ Wird über die Eigenschaften der Grundfigur und der Abbildung argumentiert (Kongruenz)?
  ▪ Wird über Messen und markante Punkte von Grundfigur und Abbildung argumentiert (bei Schub- und Achsensymmetrie)?</td></tr>
</table>

Tabelle III.9-30: Fördervorschläge (SY, Niveaustufe C)

Ziel	Förderung
Achsensymmetrische Figuren und Abbildungen herstellen, erkennen, untersuchen	▪ Vorschläge zur Förderung siehe: Teil III, Kap. 7.12, Förderinhalt SY (Ebene Figuren auf Achsensymmetrie untersuchen sowie Eigenschaften dieser Symmetrie erkennen und nutzen)
Konstruktionsprinzip von drehsymmetrischen Figuren und Abbildungen kennen	▪ Herstellen von drehsymmetrischen Figuren durch das Drehen um einen Drehpunkt: Bemaltes quadratisches Papier an einer Ecke mit einer Stecknadel fixieren, immer um 90 Grad drehen. „Veränderung" des Bildes beschreiben
Merkmale dreh- und schubsymmetrischer Figuren und Abbildungen kennenlernen	▪ Charakteristische Eigenschaften und Begriffe anschaulich erarbeiten und auf Lernplakaten dokumentieren: ▪ Mögliche Begriffe Drehsymmetrie: Grundfigur, Drehpunkt, Drehung ▪ Impulse: Markiere die Grundfigur. Wie findest du sie? Markiere den Drehpunkt. Wie findest du ihn? ▪ Mögliche Begriffe Schubsymmetrie: Grundfigur, gleicher Abstand, gleiche Richtung ▪ Impulse: Markiere die Grundfigur. Wie findest du sie? Zeichne die Abstände ein. Wie gehst du vor?
Figuren auf Symmetrien überprüfen	▪ Ergänzen, kontrollieren und Fehler suchen bei Figuren und Abbildungen ▪ Sind die Figuren drehsymmetrisch/schubsymmetrisch/ achsensymmetrisch? ▪ Woran hast du das erkannt? ▪ Warum sind sie nicht drehsymmetrisch/schubsymmetrisch/ achsensymmetrisch?

Literatur zum Weiterlesen:

Franke, M., & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie – In der Grundschule* (3. Aufl.). Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum, S. 257-284.

Götze, D., & Spiegel, H. (2004). „Windmühlen": Erfahrungen zur Drehsymmetrie am Geobrett. *Grundschule Mathematik, 3*, 28-31.

Götze, D., & Spiegel, H. (2005). Mini-Umspannwerk: Erfahrungen mit ebenen Figuren am Geobrett. *Die Grundschulzeitschrift, 190*, 28-34.

PIKAS. (o. J.). *Symmetrie*. Abgerufen von *https://pikas.dzlm.de/243*, *https://pikas.dzlm.de/197* (Zugriff am 20.06.2021).

PRIMAKOM. (o. J.). *Symmetrie*. Abgerufen von *http://primakom.dzlm.de/500* (Zugriff am 20.06.2021).

Ruwisch, S. (2013). Symmetrie – ein vielfältiger Begriff. *Mathematik differenziert, 3*, 10-13.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2015). *Handbuch für den Mathematikunterricht: 2. Schuljahr*. Braunschweig: Bildungshaus, S. 162-180.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2017). *Handbuch für den Mathematikunterricht: 3. Schuljahr*. Braunschweig: Bildungshaus, S. 160-173.

Schmidt-Thieme, B., & Weigand, H.-G. (2014). Symmetrie und Kongruenz. In H.-G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth, G. Wittmann (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (S. 186-213). Berlin: Springer Spektrum.

Schütte, S. (Hrsg.). (2006). *Die Matheprofis: Ein Mathematikbuch für das 4. Schuljahr*. Stuttgart: Oldenbourg, S. 84-87.

Symmetrie: Themenheft. (2013). *Mathematik differenziert, 3*.

Symmetrie: Themenheft. (2010). *Mathematik lehren, 161.*

9.11 RÄUMLICHE BEWEGUNGEN UND BEZIEHUNGEN MENTAL NACHVOLLZIEHEN UND VORSTELLEN UND SICH MENTAL IM RAUM ORIENTIEREN (WV)

Die Fähigkeiten, den Raum und räumliche Objekte wahrzunehmen, sich darin und mit ihnen zu orientieren sowie konkret und gedanklich im Raum und mit räumlichen Objekten zu operieren, ist grundlegend für einen erfolgreichen Umgang mit alltäglichen und schulischen Situationen. Insbesondere „stellt die Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens eines der Hauptziele des Geometrieunterrichts dar“ (Franke & Reinhold, 2016, S. 39). Beim räumlichen Vorstellungsvermögen werden räumliche Objekte gedanklich repräsentiert und verändert.

Räumliche Fähigkeiten können vor allem in drei Bereiche gegliedert werden (Schulz, 2015, S. 23). Diese hängen zusammen und können – beispielsweise zur Konstruktion von Fördermaßnahmen – noch weiter spezifiziert werden:

(1) Beziehungen zwischen Objekten werden erfasst bzw. vorgestellt. Wurde ein Objekt (gedanklich) gedreht oder gespiegelt? Beispiele:
Überprüfen auf Schubsymmetrie (über gedankliches Verschieben der Grundfigur), auf Drehsymmetrie (durch gedankliches Rotieren).

(2) Gedankliches Operieren mit Objekten (Falten, Zerlegen, Verschieben), die somit ihre räumliche Beziehung zu anderen Objekten ändern. Beispiele: Eine Figur durch mentale Drehung drehsymmetrisch ergänzen, gedankliches Umbauen eines Würfelbauwerks, gedankliches Aufklappen eines Würfelnetzes.

Räumliches Orientieren: Orientierung im wahrgenommenen Raum sowie gedankliches Hineinversetzen in andere Perspektiven. Beispiele: Wo sehe ich das Fenster: rechts oder links von mir? Orientierung auf Lageplänen.

Ohne Raumvorstellung sind grundlegende Situationen des Alltags nicht zu bewältigen: Wie wird sich ein fahrendes Auto weiterbewegen? Wie gelingt eine Orientierung auf Landkarten und Plänen? Auch im Unterricht greifen Inhalte jenseits des Mathematikunterrichts auf räumliche Kompetenzen zurück. Im Sachunterricht werden räumliche Situationen zweidimensional im Bild dargestellt, beim Sport findet eine Orientierung an Markierungen etc. statt. Selbstverständlich sind tragfähige Kompetenzen zur Raumvorstellung unverzichtbar für ein erfolgreiches Weiterlernen im Geometrieunterricht. Das konkrete und zunehmen auch gedankliche In-Beziehung-Stellen geometrischer Objekte ist ein Leitgedanke des Geometrieunterrichts (Franke & Reinhold, 2016, S. 80).

Ausgabe:
Grundlage für die Ausgabe des Förderinhaltes sind Fehler bei der Bearbeitung von Aufgaben, bei denen mentale Bewegungen und Veränderungen gefordert sind: Hierzu gehören Aufgaben zur mentalen Rotation (Aufgabe „Rotation“, 4 Items), Aufgaben zum Aufklappen von Würfel- bzw. Quadernetzen (Aufgaben „Würfelnetz falten“, „Würfelnetz vervollständigen“, „Quader-

netz“, 9 Items). Auch fehlerhafte Lösungen bei Items zur Orientierung auf einem Lageplan fließen hier ein (Aufgabe „Lageplan“, 2 Items).

Der Förderinhalt wird ausgegeben, wenn mehr als sechs der insgesamt 15 Items falsch gelöst wurden.

Tabelle III.9-31: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes WV (Niveaustufe C)

Anzahl falsch:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10-15	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (WV)	4 %	9 %	11 %	11 %	11 %	10 %	9 %	10 %	9 %	7 %	9 %	2945
Bewertung	Unauffällig: 65 %							Auffällig: 35 %				

Ergänzende prozessorientierte Diagnose und Fördervorschläge

Tabelle III.9-32: Ergänzende prozessorientierte Diagnose (WV, Niveaustufe C)

Aufgabe	Beobachtungen
Hebe deine linke Hand. Wo ist meine rechte Hand (über Eck oder gegenübersitzend)? Woher weißt du, dass das meine rechte Hand ist? Auf welcher Seite sehe ich das Fenster?	▪ Weiß die Schülerin / der Schüler, wo (an ihr/ihm selbst) rechts und links ist? ▪ Wie geht die Schülerin / der Schüler vor, um sich in eine andere Perspektive zu versetzen (oder überträgt sie/er die eigene Sichtweise direkt?) ▪ Wie kann dieses „Eindenken“ in ein Gegenüber begründet werden?
Lageplan vorlegen (z. B. den Raumplan der Aufgabe „Lageplan“ aus ***ILeA plus***): Du bist in Raum 3. Du gehst raus, drehst dich nach rechts, gehst einen Raum weiter, drehst dich wieder nach rechts. Vor welchem Raum stehst du?	▪ Gelingt das „Eindenken“ in eine andere Perspektive? ▪ Gelingt die Drehung im Raum? ▪ Werden die Begriffe „rechts“ und „links“ richtig umgesetzt? ▪ Wird ein Raum „übersprungen“?
Verschiedene Formen in unterschiedlicher Ausrichtung vorlegen (davon sind einige kongruent, die anderen in Grundzügen ähnlich): Welche von diesen Formen kannst du übereinanderlegen, ohne dass etwas übersteht (ohne die Formen anzufassen)? Wie gehst du vor? Begründe.	▪ Gelingt das mentale Drehen und Verschieben? ▪ Werden markante Punkte, Winkel, Längen, Beziehungen für eine Begründung genutzt? ▪ Wird nur über das „Aussehen“ begründet?
Würfelnetze vorlegen und Anordnungen von sechs Quadraten, die nicht zu einem Würfel aufgefaltet werden können: Welche von den Netzen kannst du zu einem Würfel auffalten (ohne die Netze anzufassen)? Wie gehst du vor? Begründe.	▪ Gelingt das mentale Auffalten? ▪ Wird mit „Überlappungen“ argumentiert? ▪ Wird eine Grundfläche festgelegt? ▪ Können nur „typische“ Würfelnetze (z. B. das „Kreuz“) identifiziert werden?

Tabelle III.9-33: Fördervorschläge (WV, Niveaustufe C)

Ziel	Förderung
Beziehungen zwischen Objekten untersuchen und beschreiben: bei realen Objekten bei Abbildungen realer Objekte beim Vergleich von Objekten und Abbildungen	▪ Ebene geometrische Objekte: ▪ Objekte konkret auf Kongruenz prüfen (z. B. durch verschieben, drehen, spiegeln) ▪ Objekte gedanklich auf Kongruenz prüfen (z. B. durch gedankliches Verschieben, Drehen, Spiegeln, insbesondere von markanten Punkten) ▪ Beschreiben der Kongruenzabbildung mit eigenen Worten und Fachvokabeln ▪ Räumliche geometrische Objekte: ▪ Untersuchungen an konkreten Bauwerken (z. B. aus Würfeln oder Quadern) ▪ Bauwerke beschreiben lassen (Wortspeicher: neben, auf, zwischen, hinter, rechts unten) ▪ Foto von Bauwerken machen und Raum-Lage-Beziehungen am Bild beschreiben ▪ Überprüfen der am Bild beschriebenen Zusammenhänge an den konkreten Bauwerken ▪ Zielführende Strategie: markante Punkte am Objekt und in den Abbildungen identifizieren und für Vergleiche nutzen
Zerlegen und Zusammensetzen von geometri-schen Objekten	▪ Tangram oder weitere Legepuzzles: ▪ Konkretes und gedankliches Auslegen von vorgegebenen leeren oder vorstrukturierten Umrissen mit verschiedenen ebenen Figuren ▪ Weitere Fördermöglichkeiten: Vgl. Förderinhalt SY (Ebene Figuren auf Symmetrien untersuchen und charakteristische Eigenschaften dieser Symmetrien kennen und nutzen). ▪ Würfelbauwerke nachbauen, zu Quadern (Würfeln) ergänzen: Worauf achtest du? ▪ Umbauen von einfachen und komplexen Würfelbauwerken
Beziehungen zwischen geometrischen Objekten herstellen (Körpernetze)	▪ Ausschneiden und Auffalten von Netzen bei Würfeln und Quadern ▪ Bei gegebenen Netzen zunächst Vermutungen darüber anstellen, ob ein Würfel/Quader entstehen kann ▪ Wortspeicher zur Beschreibung von Faltrichtungen erarbeiten (vorne, hinten, rechte Seite, linke Seite, nach links, rechts, vorne, hinten klappen ...) ▪ Untersuchung von Lage-, Flächen-, Winkel-, Längenbeziehungen an Netzen und an den Objekten im Vergleich. Hierbei werden mehrere Netze zum gleichen Körper analysiert. Entwicklung von Strategien, wie Netze geprüft werden können auf der Grundlage dieser Vergleiche (z. B. es kann kein Quader entstehen, wenn nur fünf Rechtecke gegeben sind)
Beschreibung von Objekten aus anderer Perspektive	▪ Situation gestalten, in der die Schülerin / der Schüler verschiedene Perspektiven einnehmen kann, z. B. Sitzkreis mit Schülerinnen und Schülern, in der Mitte steht eine Schultasche und vor, hinter und neben der Schultasche liegen Gegenstände wie ein Ball, Stift …. ▪ Beschreiben der Anordnung aus der eigenen Perspektive (ich sehe den Ball links von der Schultasche) und aus der Perspektive anderer Schülerinnen und Schüler (Ute sieht den Ball hinter der Schultasche, Sophia sieht den Ball rechts von der Schultasche, Sebastian sieht den Ball gar nicht)

	▪ Erarbeitung von Strategien: ▪ Z. B: Wo ist der rechte Arm der eigenen Person, Eindrehen in Gedanken in die andere Person, Anwendung „Wo ist rechts?“ für die andere Person ▪ Fotos werden von derselben nachgebauten Situation aus unterschiedlichen Perspektiven aufgenommen (auch Fehler einbauen) ▪ Sich in Situationen auf Bildern hineinversetzen (z. B. theoretische Fahrradprüfung) ▪ „Bewegungsdiktate“ und Dokumentation der Bewegungen auf einem Lageplan (z. B. nach Diktat auf dem Schulhof bewegen, Dokumentation auf einem Plan des Schulhofs) ▪ Wege in einem Lageplan werden beschrieben und dokumentiert (und ggf. in der Realität überprüft, z. B. auf dem Schulhof)

Literatur zum Weiterlesen:

Bauer, R. (1997). *Geometrische Körper.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Bettner, M., & Dinges, E. (2011). *Mathe an Stationen: Umgang mit dem Geobrett in der Sekundarstufe I*. Donauwörth: Auer.

Franke, M., & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie – In der Grundschule* (3. Aufl.). Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum, S. 61-86, 185-190, 199 f., 212-216.

Kotlenga, A. (2005). *Lernzirkel Geometrische Körper*. Horneburg: Persen.

Müller, G. N., Röhr, M., & Wittmann E. Ch. (1997). *Schauen und Bauen: Geometrische Spiele mit Quadern*. Leipzig: Klett.

Schulz, A. (2015). Zwischen Handeln und Kopfgeometrie: Ein Raster zur Einordnung von Übungsformaten im Geometrieunterricht. *Fördermagazin Grundschule*, *37 (4)*, 22-26.

Spiegel, H., & Spiegel, J. (2003). *Potz-Klotz: 2 bis 6 Spieler, ab 7 Jahren*. *Spiegels Spiele*. Seelze-Velber: Kallmeyer.

Wollring, B. (2016). Wie entstehen geometrische Begriffe? Mentale Übungen an explodierenden Würfeln und schmelzenden Kugeln. *Mathematik differenziert, 1*, 6-9.

9.12 LITERATUR

Bauer, R. (1997). *Geometrische Körper.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Bettner, M. & Dinges, E. (2010). *Mathe an Stationen. Umgang mit Geodreieck und Zirkel in der Sekundarstufe I.* Donauwörth: Auer.

Bettner, M. & Dinges, E. (2011). *Mathe an Stationen. Umgang mit dem Geobrett in der Sekundarstufe I.* Donauwörth: Auer.

Bezold, A. (2012). Förderung des Argumentierens: Erforschung von Teilbarkeitsregeln. *Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht, 65 (6)*, 335-339.

Breidenbach, W. (1964). *Raumlehre in der Volksschule* (7. Aufl.). Hannover: Schroedel.

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education, 15 (3)*, 179. Abgerufen von *https://doi.org/10.2307/748348* (Zugriff am 30.06.2021).

Evermann, C., & Stoiber, T. (2015). Alles klar im Haus der Vierecke? Schülerfehler und begriffliche Schwierigkeiten beim Klassifizieren von Vierecken. *Mathematik lehren 32* (191), 13-15.

Franke, M. (2001): *Didaktik der Geometrie*. Heidelberg: Spektrum.

Franke, M., & Ruwisch, S. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule: Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II* (2. Aufl.). Heidelberg: Spektrum.

Franke, M., & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule: Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II* (3. Aufl.). Berlin: Springer Spektrum.

Gaab, K., & Lambert, A. (2015). Mit Würfelnetzen operieren. *Mathematik lehren, 32 (190)*, 12-13.

Gaidoschik, M. (2003). Zehner und Einer: Die ersten Schritte: Anregungen für die Erarbeitung von Stellenwertverständnis im Zahlenraum bis 99. In F. Lenart, N. Holzer & H. Schaupp (Hrsg.), *Rechenschwäche – Rechenstörung – Dyskalkulie: Erkennung, Prävention, Förderung* (S. 182-189). Graz: Leykam.

Gaidoschik, M. (2014). *Einmaleins verstehen, vernetzen, merken: Strategien gegen Lernschwierigkeiten* (1. Aufl.). Seelze-Velber: Klett Kallmeyer Friedrich.

Götz, D., & Schulz, A. (2018). Aus Fehlern lernen: Schülerlösungen als Ausgangspunkt für Diagnose und Förderung. *Grundschulmagazin, 4,* 33-37.

Götze, D., & Spiegel, H. (2004). „Windmühlen“ – Erfahrungen zur Drehsymmetrie am Geobrett. *Grundschule Mathematik, 3,* 28-31.

Götze, D., & Spiegel, H. (2005). Mini-Umspannwerk: Erfahrungen mit ebenen Figuren am Geobrett. *Die Grundschulzeitschrift, 190*, 28-34.

Hasemann, K., & Gasteiger, H. (2014). *Anfangsunterricht Mathematik: Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II* (3., überarb. u. erw. Aufl.). Berlin: Springer Spektrum. Abgerufen von *https://doi.org/10.1007/978-3-642-40774-1* (Zugriff am 30.06.2021).

Höveler, K., & Prediger, S. (2017). Vielfältige Rechenwege, erläutern und begründen. *Mathematik lehren, 201*, 11-16.

Kotlenga, A. (2005). *Lernzirkel Geometrische Körper.* Horneburg: Persen.

Kuhnke, K. (2012). *Unterrichtsanregungen zur Förderung des Darstellungswechsels: Am Beispiel der Multiplikation*. Abgerufen von *https://pikas.dzlm.de/pikasfiles/uploads/upload/Material/Haus_3_-_Umgang_mit_Rechenschwierigkeiten/UM/H3.2_UM_DW.pdf/H3.2_Unterrichtsanregungen_DW.pdf*. Abgerufen von *http://pikas.dzlm.de/355* (Zugriff am 30.06.2021).

Kuhnke, K. (2013). *Vorgehensweisen von Grundschulkindern beim Darstellungswechsel: Eine Untersuchung am Beispiel der Multiplikation im 2. Schuljahr*. Wiesbaden: Springer.

Ludwig, M., & Weigand, H.-G. (2014). Konstruieren. In. H.-G. Weigand (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie in der Sekundarstufe I* (2. Aufl., S. 55-80). Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Maaß, K. (2011). *Mathematisches Modellieren in der Grundschule*. Abgerufen von *http://i.bsbb.eu/1032* (Zugriff am 30.06.2021).

Müller, G. N., Röhr, M., & Wittmann E. Ch. (1997). *Schauen und Bauen: Geometrische Spiele mit Quadern*. Leipzig: Klett.

Neumann, K. (2010). *Mathematik selbst entdecken: Vierecke.* Buxtehude: AOL.

Padberg, F., & Benz, C. (2011). *Didaktik der Arithmetik* (4. Aufl.). Heidelberg: Spektrum.

Padberg, F., & Wartha, S. (2017): *Didaktik der Bruchrechnung*. Heidelberg: Spektrum.

Philipp, K. (2015). Teilbarkeit von Zahlen experimentell erkunden. *Mathematikunterricht, 61 (2)*, 5-11.

Radatz, H. (1980). *Fehleranalysen im Mathematikunterricht*. Braunschweig: Vieweg.

Riley, M. S., Greeno, J. G., & Heller, J. I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In H. P. Ginsburg (Hrsg.), *The development of mathematical thinking* (S. 153-196). New York: Academic Press.

Roth, J., & Wittmann, G. (2014): Ebene Figuren und Körper. In H.-G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth, …, G. Wittmann (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (2. Aufl., S. 123-156). Berlin: Springer Spektrum.

Ruwisch, S. (2013). Symmetrie: ein vielfältiger Begriff. *Mathematik differenziert, 3*, 10-13.

Scherer, P., & Moser Opitz, E. (2010): *Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe: Mathematik Primar- und Sekundarstufe*. Heidelberg: Spektrum.

Scherres, C. (2013). *Niveauangemessenes Arbeiten in selbstdifferenzierenden Lernumgebungen: Eine qualitative Fallstudie am Beispiel einer Würfelnetz-Lernumgebung*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Braunschweig: Schroedel.

Schipper, W., Wartha, S., & Schroeders, N. (2011). *BIRTE 2: Bielefelder Rechentest für das 2. Schuljahr: Handbuch zur Diagnostik und Förderung*. Braunschweig: Schroedel.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2015). *Handbuch für den Mathematikunterricht: 2. Schuljahr*. Braunschweig: Bildungshaus.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2017a). *Handbuch für den Mathematikunterricht*. Braunschweig: Schroedel Westermann.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2017b). *Handbuch für den Mathematikunterricht: 3. Schuljahr*. Braunschweig: Bildungshaus.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2018). *Handbuch für den Mathematikunterricht: 4. Schuljahr*. Braunschweig: Schroedel Westermann.

Schmidt-Thieme, B., & Weigand, H.-G. (2014). Symmetrie und Kongruenz. In H.-G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth, …, G. Wittmann (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (2. Aufl., S. 186-213). Berlin: Springer Spektrum.

Schulz, A., & Wartha, S. (2011). Materialeinsatz im Mathematikunterricht: Risiken und Chancen. *MNU Primar*, *3 (2)*, 49-56.

Schulz, A. (2014). *Fachdidaktisches Wissen von Grundschullehrkräften: Diagnose und Förderung bei besonderen Problemen beim Rechnenlernen*. Heidelberg: Springer.

Schulz, A. (2015). Zwischen Handeln und Kopfgeometrie: Ein Raster zur Einordnung von Übungsformaten im Geometrieunterricht. *Fördermagazin Grundschule, 37 (4)*, 22-26.

Schulz, A. (2017). Multiplikation verstehen: Durch Anschauungsmaterial zu Grundvorstellungen*. Mathematik lehren, 201*, 17-22.

Schulz, A. (2018a). Der „Werkzeugkoffer": Mentale Werkzeuge für die grundlegenden Rechenoperationen. *Grundschule Mathematik, 57*, 4-7.

Schulz, A. (2018b). Orientierung am Zahlenstrahl: Funktionen und Deutung. In P. Bender & T. Wassong (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018: Vorträge zur Mathematikdidaktik und zur Schnittstelle Mathematik/Mathematikdidaktik auf der gemeinsamen*

Jahrestagung GDM und DMV 2018: 52. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (S. 1663-1666). Münster: WTM.

Schütte, S. (Hrsg.). (2006). *Die Matheprofis: Ein Mathematikbuch für das 4. Schuljahr* (S. 84-87). Stuttgart: Oldenbourg,

Selter, C., & Spiegel, H. (1997). *Wie Kinder rechnen*. Leipzig: E. Klett Grundschulverlag.

Selter, C., Prediger, S., Nührenbörger, M., & Hußmann, S. (Hrsg.). (2014). Mathe sicher können: *Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen: Natürliche Zahlen* (1. Aufl.). Berlin: Cornelsen.

Söbbeke, E., & Steenpaß, A. (2010). Mathematische Deutungsprozesse zu Anschauungsmitteln unterstützen. In C. Böttinger, K. Bräuning, M. Nührenbörger, R. Schwarzkopf, E. Söbbeke (Hrsg.), *Mathematik im Denken der Kinder: Anregungen zur mathematikdidaktischen Reflexion* (S. 216-245). Seelze-Velber: Kallmeyer Friedrich.

Söbbeke, E., & Steenpaß, A. (2014). Deutungsaufgaben zu Anschauungsmitteln: Entdeckungen am Zahlenstrahl. *Mathematik differenziert, 4*, 10-13.

Spiegel, H., & Spiegel, J. (2003). *Potz-Klotz: 2 bis 6 Spieler, ab 7 Jahren*. *Spiegels Spiele*. Seelze-Velber: Kallmeyer.

Symmetrie: Themenheft. (2010). *Mathematik lehren, 161.*

Symmetrie: Themenheft. (2013). *Mathematik differenziert, 3*.

Wartha, S., & Schulz, A. (2012). *Rechenproblemen vorbeugen: Grundvorstellungen aufbauen: Zahlen und Rechnen bis 100* (1. Aufl.). Berlin: Cornelsen.

Weigand, H.-G. (2014). Begriffslernen und Begriffslehren. In H.-G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth, …, G. Wittmann (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (2. Aufl., S. 264 ff.). Berlin: Springer Spektrum.

Wittmann, E. Ch., & Müller, G. N. (1990). *Handbuch produktiver Rechenübungen: Vom Einspluseins zum Einmaleins* (Bd. 1). Leipzig: Klett.

Wittmann, E. Ch., & Müller, G. N. (1992). *Handbuch produktiver Rechenübungen: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen* (Bd. 2). Leipzig: Klett.

Wittmann, E. Ch., & Müller, G. N. (2006a). *Blitzrechnen 2 Basiskurs Zahlen.* Leipzig: Klett.

Wittmann, E. Ch., & Müller, G. N. (2006b). *Blitzrechnen 3 Basiskurs Zahlen.* Leipzig: Klett.

Wollring, B. (2016). Wie entstehen geometrische Begriffe? Mentale Übungen an explodierenden Würfeln und schmelzenden Kugeln. *Mathematik differenziert, 1*, 6-9.

10. NIVEAUSTUFE D: BEZUG ZUM RAHMENLEHRPLAN UND AUFGABENAUSWAHL

Sebastian Wartha, Axel Schulz & Christiane Benz

ILeA plus prüft viele für Niveaustufe D relevante Inhalte. Da in der Regel zum Zeitpunkt der Durchführung von ***ILeA plus*** D noch nicht alle Inhalte des Rahmenlehrplans abschließend thematisiert wurden, sollten die Schülerinnen und Schüler aufgefordert werden, bei unbekannten Inhalten das „?“ auszuwählen. Allerdings können dennoch interessante Informationen zu Vorkenntnissen der Lernenden erhoben werden, um im Unterricht daran anzuknüpfen.

Bei der Interpretation der Auswertungen ist ebenfalls zu berücksichtigen, dass ausgewählte Inhalte von Lernenden aufgrund der fehlenden unterrichtlichen Behandlung nicht erfolgreich bearbeitet werden konnten.

10.1 ZAHLEN AUFFASSEN UND DARSTELLEN

RLP	**D Zahlen auffassen und darstellen** ▪ **Beschreiben der Anteile von Ganzen als gemeine Brüche und Abgrenzen von Verhältnissen** ▪ **Übersetzen von gebrochenen Zahlen (gemeine Brüche und Dezimalzahlen) zwischen Bild, Wort und Symbol** ▪ **Erweitern der Stellenwerttafel (nach rechts)** ▪ **Kürzen und Erweitern von Brüchen** ▪ Verwenden gemischter Zahlen nur in Alltagszusammenhängen

Die Grundvorstellung des Bruchs als Anteil von einem Ganzen ist zentral für ein Zahlverständnis und für eine verständnisorientierte Erarbeitung von Strategien zum Zahlvergleich und zu Rechenoperationen (Padberg & Wartha, 2017, S. 24-28).

Von einem Zahlverständnis kann gesprochen werden, wenn zwischen Zahlwort (ein Viertel, Null Komma zwei fünf, fünfundzwanzig Hundertstel), Zahlsymbol ($\frac{1}{4}$ bzw. 0,25) und bildlicher Darstellung übersetzt werden kann (Wartha, 2017).

Diese Kompetenzen werden bei ***ILEA plus*** durch mehrere Aufgaben untersucht. Die Aufgabe „Anteil auffassen“ (5 Items Bruch- und 6 Items Dezimalschreibweise) untersucht, ob ein Anteil, der bildlich am Rechteckmodell dargestellt ist, in die symbolische Schreibweise (als gemeiner Bruch bzw. als Dezimalbruch) eingegeben werden kann.

Das Rechteckmodell ist besonders tragfähig und damit unverzichtbar für ein erfolgreiches Weiterarbeiten, da an ihm die Strategien zu den vier Grundrechenarten besonders gut erarbeitet werden können. Die häufig verwendeten Kreismodelle sind hingegen nur in Sonderfällen geeignet, um z. B. Multiplikations- oder Divisionsstrategien zu veranschaulichen (Cramer & Wyberg, 2009).

Da der Anteil nur in Beziehung zum Ganzen angegeben werden kann, ist bei jeder Aufgabe das Ganze dargestellt. Der Anteil soll dann über das Zahlenfeld eingegeben werden.

Tabelle III.10-1: Aufgabenbeispiel „Anteil auffassen“ (Niveaustufe D)

Ma_D_ZO_111_D Anteil auffassen	Offene Eingabe	Interpretation
	**$\frac{4}{5}$**	**korrekt**
	$\frac{1}{4}$ und $\frac{4}{1}$	Verwechslung mit Verhältnis (4 blau, 1 weiß)
	$\frac{1}{5}$	Betrachtung des weißen Anteils
Abbildung III.10-1	anderes	falsch

Tabelle III.10-2: Aufgabenbeispiel „Anteil auffassen“ (Niveaustufe D)

MA_D_ZO_121_B Anteil auffassen	Offene Eingabe	Interpretation
	**0,3**	**korrekt**
	3,1	Komma als Bruchstrich $\frac{3}{10}$ = 3,10
	1,3	Komma als Bruchstrich $\frac{1}{3}$ = 1,3
	10,3	Komma als Bruchstrich 10,3
	0,7	Betrachtung des weißen Anteils
	3,7	Verhältnis (3 : 7) betrachtet und Komma als Bruchstrich ($\frac{3}{7}$ = 3,7)
	0,03	Stellenwertproblem
Abbildung III.10-2	anderes	falsch

Bei diesen Aufgaben können bereits zentrale Fehlvorstellungen identifiziert werden: Der Unterschied zwischen Anteil (Teil zum Ganzen) und Verhältnis (Teil zum Teil) ist nicht klar. Bei Brüchen in Dezimalschreibweise kommt häufig die Fehlvorstellung „Komma als Bruchstrich“ zum Tragen. Hierbei werden die Ziffern links vom Komma als Zähler und die Ziffern rechts vom Komma als Nenner interpretiert (Heckmann, 2006). Entsprechende Fehleranalysen werden durch ***ILeA plus*** durchgeführt und als Hinweis ausgegeben.

Ein besonderer Schwerpunkt wird auf die Untersuchung der Bruchеigenschaften – auch in Bezug auf das Verfeinern und Vergröbern der Unterteilung (Erweitern und Kürzen) gelegt. Hierzu sollen die Schülerinnen und Schüler bei der Aufgabe „Anteilkontrolle“ (je 6 Items für Bruch- und Dezimalschreibweise) angeben, ob verschiedene bildliche Darstellungen den Bruch $\frac{1}{4}$ bzw. 0,4 darstellen oder nicht.

Tabelle III.10-3: Aufgabenbeispiel „Anteilkontrolle“ (Niveaustufe D)

<table>
<tr><th>MA_D_ZO_112-1_A Anteilkontrolle</th><th>Auswahl</th><th>Interpretation</th></tr>
<tr><td rowspan="3">

Abbildung III.10-3</td><td>nein</td><td>korrekt</td></tr>
<tr><td>ja</td><td>Fehlvorstellung: Nenner gibt die Anzahl der gefärbten Flächen an</td></tr>
<tr><td>?</td><td>Die Aufgabe wird nicht verstanden.</td></tr>
</table>

Die Aufgaben sind so gestaltet, dass sie die typischen Fehlvorstellungen aufgreifen. Zentral für den Anteil $\frac{1}{4}$ ist, dass die Einheit in vier inhaltsgleiche Flächen geteilt und davon eine betrachtet wird. Diese vier Flächen müssen nicht zwingend kongruent sein und können auch noch weiter unterteilt werden.

Bei der Aufgabe „Anteilkontrolle“ wird darüber hinaus untersucht, ob das Erweitern und Kürzen von Brüchen angewendet werden kann: Der Anteil $\frac{1}{4}$ kann auch als $\frac{2}{8}$ bzw. der Anteil 0,4 als $\frac{2}{5}$ bildlich dargestellt sein.

Tabelle III.10-4: Aufgabenbeispiel „Anteilkontrolle“ (Niveaustufe D)

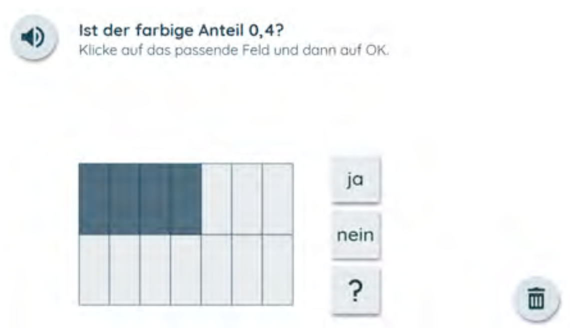
<table>
<tr><th>MA_D_ZO_112-2_E Anteilkontrolle</th><th>Auswahl</th><th>Interpretation</th></tr>
<tr><td rowspan="3">

Abbildung III.10-4</td><td>nein</td><td>korrekt</td></tr>
<tr><td>ja</td><td>Verwechslung mit Verhältnis:
4 gefärbt, 10 nicht gefärbt → $\frac{4}{10}$</td></tr>
<tr><td>?</td><td>Die Aufgabe wird nicht verstanden.</td></tr>
</table>

Wie im Rahmenlehrplan beschrieben, erfordert ein verständnisorientiertes Arbeiten mit Dezimalbrüchen die Erweiterung der Stellenwerttafel in Bezug auf Stellenwerte kleiner als 1. Hierzu werden rechts der Einer weitere Spalten ergänzt. In diesen werden die Stellenwerte notiert, die bei einer Zehner-Entbündelung der 1 weiter entstehen: 1 Einer wird in 10 Zehntel entbündelt, 1 Zehntel in 10 Hundertstel etc. (Heckmann, 2006).

Bei der Aufgabe „Zahlendiktat“ werden Dezimalzahlen (mit wenigen Ziffern) mündlich diktiert. Sie sollen in die Stellenwerttafel eingegeben werden (6 Items).

Tabelle III.10-5: Aufgabenbeispiel „Zahlendiktat“ (Niveaustufe D)

MA_D_ZO_122_A Zahlendiktat	Offene Eingabe	Interpretation
„Zwei Komma Null drei“ wird angesagt.  Abbildung III.10-5	**2 E 3 h**	**korrekt**
	20 z 3 h	**korrekt**
	2 und 3 an anderen Stellen	falsche Zuordnung der Stellenwerte
	anderes	falsch

Zur Untersuchung von Kompetenzen im Umgang mit der Stellenwerttafel wird bei der Aufgabe „Zahlen schreiben“ (5 Items) eine Zahl in der Stellenwerttafel dargestellt und soll mit dem Ziffernfeld als Dezimalzahl geschrieben werden. Hierbei werden auch Kompetenzen zum Bündeln untersucht, indem auch nichtkanonische Darstellungen (mindestens ein Zahleintrag ist größer als 9 in der Stellenwerttafel) abgefragt werden.

Tabelle III.10-6: Aufgabenbeispiel „Zahlen schreiben“ (Niveaustufe D)

MA_D_ZO_123_C Zahlen schreiben	Offene Eingabe	Interpretation
 Abbildung III.10-6	**3,3**	**korrekt**
	2,13 21,3 0,213 213	Bündelungsidee nicht klar – Stellenwertproblem
	anderes	falsch

10.2 ZAHLEN ORDNEN

RLP	D Zahlen ordnen
	▪ **Anordnen von gebrochenen Zahlen am Zahlenstrahl** ▪ **Vergleichen und Ordnen von gemeinen Brüchen durch direktes Vergleichen, Gleichnamigmachen und am Zahlenstrahl** ▪ **Vergleichen und Ordnen von Dezimalzahlen stellenweise und am Zahlenstrahl** ▪ Runden von Dezimalzahlen ▪ **Erklären der Dichtheit der gebrochenen Zahlen auch am Zahlenstrahl (im Sinne von: zwischen zweigebrochenen Zahlen ist immer noch eine weitere)**

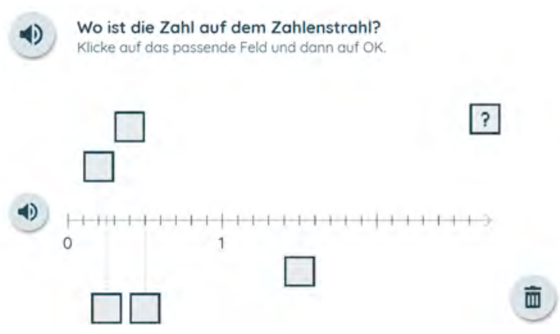
Zahlen in Bruch- und Dezimalschreibweise können nicht nur als flächige Anteile, sondern auch am Zahlenstrahl dargestellt werden (Padberg & Wartha, 2017; Tunç-Pekkan, 2015). Dies ist insbesondere bei Dezimalbrüchen auch in Alltagssituationen (Skalen) und anderen schulischen Inhalten (Koordinatensystem, Physik) häufig der Fall. Das Darstellen („Einzeichnen“) und Auffassen („Ablesen“) der Zahlen wird daher bei den Aufgaben „Zahlenstrahl auffassen“ (je 2 Items in Bruch- und Dezimalschreibweise) und „Zahlenstrahl darstellen“ (je 3 Items in Bruch- und Dezimalsprechweise) untersucht. Diese Kompetenzen werden auch benötigt, wenn Zahlvergleiche anschaulich am Zahlenstrahl argumentiert und dargestellt werden sollen.

Es werden bei beiden Aufgaben sowohl Zahlen in Bruch- als auch in Dezimalschreibweise abgefragt.

Tabelle III.10-7: Aufgabenbeispiel „Zahlenstrahl auffassen“ (Niveaustufe D)

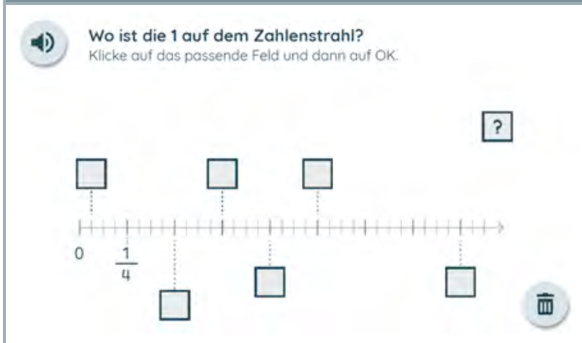
Ma_D_ZO_223-1_A Zahlenstrahl auffassen	Offene Eingabe	Interpretation
	$\frac{4}{5}$ $\frac{8}{10}$	**korrekt**
	$\frac{1}{5}$	Abstand zur 1 betrachtet
Abbildung III.10-7	$\frac{0}{8}$ $\frac{1}{8}$	Komma als Bruchstrich: 0,8 = $\frac{0}{8}$ oder $\frac{1}{8}$

Tabelle III.10-8: Aufgabenbeispiel „Zahlenstrahl darstellen“ (Niveaustufe D)

Ma_D_ZO_224_E Zahlenstrahl darstellen	Offene Eingabe	Interpretation
„Ein Fünftel“ wird angesagt.	**0,2**	**korrekt**
	0,25	anderer Fehler
	0,4	der fünfte Strich inkl. 0
Abbildung III.10-8	$\frac{1}{2}$ = 0,5 1,5	Komma als Bruchstrich ($\frac{1}{5}$ = 0,5 bzw. 1,5)

Neben dem Darstellen und Auffassen von Anteilen bei gegebener Einheit ist es für den weiteren Lernprozess wichtig, dass auch bei einem gegebenen Anteil die Einheit bestimmt werden kann (Schink, 2013). Das ist insbesondere bei Aufgaben zur Prozentrechnung im weiteren Lernprozess wichtig: Hier ist oftmals der Prozentwert gegeben und der Grundwert soll berechnet werden (Hafner, 2012). Bei der Aufgabe „Einheit bestimmen“ (6 Items) ist daher ein Anteil (in Bruch- oder Dezimalschreibweise) am Zahlenstrahl markiert und es soll die Position ausgewählt werden, bei der die 1 ist.

Tabelle III.10-9: Aufgabenbeispiel „Einheit bestimmen“ (Niveaustufe D)

MA_D_ZO_124_A Einheit bestimmen	Auswahl	Interpretation
 Abbildung III.10-9	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$ von $\frac{1}{4}$ bestimmt
	$\frac{1}{2}$	4 Markierungen nach $\frac{1}{4}$
	$\frac{3}{4}$	Bis zur 1 fehlen $\frac{3}{4}$.
	1	**korrekt**
	$1\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}+1$
	2	Abstand von 0 verdoppeln ($\frac{2}{4}$, richtig) neuen Abstand von 0 verdoppeln ($\frac{3}{4}$ statt 1), neuen Abstand verdoppeln (1 statt 2)

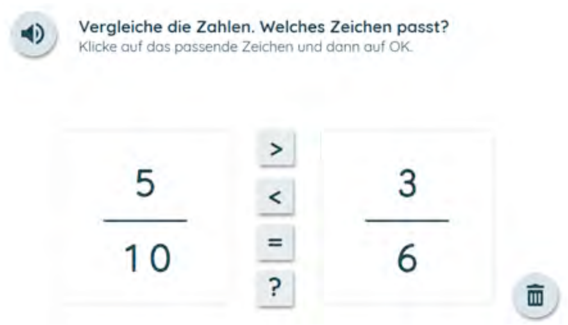
Bei der Aufgabe „Zahlvergleich“ (7 Items) werden zwei Zahlen in Bruch- oder Dezimalschreibweise vorgegeben und es soll ausgewählt werden, ob die Zahlen gleich groß sind oder welche Zahl größer ist. Das Zahlenmaterial wurde so gewählt, dass es typische Fehlvorstellungen wie „Komma trennt“ identifiziert (Brueckner, 1928; Heckmann, 2013). Rechnerische Anforderungen sind – bei Aktivierung von Zahlvorstellungen – nicht nötig.

Tabelle III.10-10: Aufgabenbeispiel „Zahlvergleich“ (Niveaustufe D)

MA_D_ZO_226_G Zahlvergleich	Auswahl	Interpretation
 Abbildung III.10-10	**>**	**korrekt**
	<	Komma-trennt-Strategie: 3 < 25, also 0,3 < 0,25
	=	falsch

Bei rationalen Zahlen kann eine Zahl durch verschiedene Brüche dargestellt werden ($\frac{5}{10}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$). Das ist eine bedeutende Änderung zu den Zahlvorstellungen bei natürlichen Zahlen, bei denen verschiedene Ziffernkombinationen automatisch verschiedene Zahlen bedeuten. Wird diese Änderung nicht gezielt thematisiert, so kann es zu einem nicht vollzogenen Grundvorstellungsumbruch kommen: Verschiedene Brüche werden als verschiedene Zahlen interpretiert (Wartha & Wittmann, 2009).

Tabelle III.10-11: Aufgabenbeispiel „Zahlvergleich“ (Niveaustufe D)

MA_D_ZO_226_C Zahlvergleich	Auswahl	Interpretation
	>	Falsche Annahme: Größere Zahleinträge bedeuten eine größere Zahl.
	<	Falsche Annahme: Je kleiner der Nenner ist, desto kleiner ist der Bruch (ungeachtet des Zählers).
Abbildung III.10-11	=	**korrekt**

Ein weiterer Grundvorstellungsumbruch liegt in der Anordnung der Zahlen. Jede natürliche Zahl (bis auf 0) hat genau einen Vorgänger und einen Nachfolger. Das heißt, bei zwei Zahlen kann die Anzahl der dazwischen liegenden Zahlen eindeutig bestimmt werden. Bei rationalen Zahlen ist das nicht mehr der Fall: Zwischen zwei Brüchen liegt immer noch ein weiterer Bruch – und damit unendlich viele Brüche. Wenn die neuen Eigenschaften des Zahlenraums nicht verstanden worden sind, so bilden sich Fehlvorstellungen zu dessen Aufbau aus (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Bei der Aufgabe „Zwischenzahl“ (4 Items) wurde dies in Bezug auf ein Zahlenpaar in Bruch- und ein Zahlenpaar in Dezimalschreibweise abgefragt.

In Bezug auf Dezimalbrüche wird nach einer Zwischenzahl des Zahlenpaars 0,3 und 0,4 gefragt, in Bezug auf Zahlen in Bruchschreibweise nach der des Zahlenpaars $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}$ (vgl. Tabelle III.10-12). In einem weiteren Schritt soll eine mögliche Zwischenzahl angegeben werden.

Tabelle III.10-12: Aufgabenbeispiel „Zwischenzahl“ (Niveaustufe D)

MA_D_ZO_231-1_A Zwischenzahl	Auswahl	Interpretation
	Nein	Fehlvorstellung: Brüche sind diskret angeordnet ($\frac{1}{3}$ Vorgänger oder Nachfolger von $\frac{1}{2}$).
	Ja, eine Zahl	Erste Idee der dichten Anordnung vorhanden – es kann eine weitere Zahl gefunden werden.
Abbildung III.10-12	**Ja, viele Zahlen**	**korrekt**

Bei der Aufgabe „Zahlenfolge“ (2 Items) soll eine Zahlenfolge fortgesetzt werden. Hierbei wird insbesondere auf die Komma-trennt-Fehlvorstellung Bezug genommen und untersucht, ob die Stellenwerte korrekt berücksichtigt werden.

Tabelle III.10-13: Aufgabenbeispiel „Zahlenfolge“ (Niveaustufe D)

<table>
<tr><th>MA_D_ZO_211_A Zahlenfolge</th><th>Offene Eingabe</th><th>Interpretation</th></tr>
<tr><td rowspan="3">

Abbildung III.10-13</td><td>1 oder 1,0</td><td>korrekt</td></tr>
<tr><td>0,10</td><td>Komma-trennt-Fehlvorstellung</td></tr>
<tr><td>anderes</td><td>falsch</td></tr>
</table>

10.3 ZAHLBEZIEHUNGEN BESCHREIBEN

<table>
<tr><td>RLP</td><td>D Zahlbeziehungen beschreiben

Nutzen der Teilbarkeitsregeln (auch für die Teiler 3, 4, 6, 9, 25 und 50) zum Prüfen natürlicher Zahlen auf Teilbarkeit
Erkennen von Primzahlen
Angeben von Vielfachen großer Zahlen
Angeben gemeinsamer Teiler und Vielfache zweier natürlicher Zahlen
Erläutern der Notwendigkeit der Zahlenbereichserweiterung bezüglich der gebrochenen Zahlen anhand von Beispielen
Beschreiben von Zahlbeziehungen innerhalb eines Zahlenbereiches (auch unter dem Aspekt der Teilbarkeit) und zwischen natürlichen und gebrochenen Zahlen
</td></tr>
</table>

Das Anwenden der Teilbarkeitsregeln wird in ***ILEA plus*** mit der Aufgabe „Teilbarkeit“ untersucht. Es werden Zahlen vorgegeben und es soll ausgewählt werden, ob diese Zahl teilbar ist. Abgefragt wird die Teilbarkeit durch 4 (6 Items) und die Teilbarkeit durch 9 (6 Items).

Tabelle III.10-14: Aufgabenbeispiel „Teilbarkeit“ (Niveaustufe D)

<table>
<tr><th>MA_D_ZO_331_1_C Teilbarkeit</th><th>Auswahl</th><th>Interpretation</th></tr>
<tr><td rowspan="2">

Abbildung III.10-14</td><td>ja</td><td>korrekt</td></tr>
<tr><td>nein</td><td>Falsche Endstellenregel (4 teilt nicht 6), Zahlennähe zur 100 nicht genutzt, Quersummenregel (4 teilt nicht 15) falsch angewendet</td></tr>
</table>

10.4 OPERATIONSVORSTELLUNGEN ENTWICKELN

RLP	**D Operationsvorstellungen entwickeln**
	▪ **Zuordnen der Vorstellungen der Anteilbildung zur Multiplikation und der des Aufteilens zur Division im Bereich der gebrochenen Zahlen** ▪ **Wechseln zwischen Sachverhalt, Notation, Handlung, Bild zu den Grundrechenoperationen im Bereich der gebrochenen Zahlen** ▪ Prüfen der Übertragbarkeit der bisherigen Vorstellungen zu den Grundrechenoperationen auf den Bereich der gebrochenen Zahlen ▪ Unterscheiden zwischen Erweitern und Vervielfachen bzw. Kürzen und Dividieren eines Bruches ▪ **Verwenden von gebrochenen Zahlen als Operator (z. B. zwei Drittel von 60 Euro)**

Die Untersuchung der Grundvorstellungen zu den Rechenoperationen erfolgt über die Aufgabe „Textaufgaben“ (8 Items). Zentral ist hierbei, dass nicht gerechnet werden soll. Operationsvorstellungen sollen unabhängig von Rechenfertigkeiten untersucht werden. Daher soll bei der Aufgabe ausgewählt werden, mit welchem Rechenausdruck das Ergebnis bestimmt wird. Das Ergebnis selbst soll nicht ausgerechnet werden.

Die Operationsvorstellungen der Addition (Hinzufügen, Zusammenfassen) und der Subtraktion (Wegnehmen, Unterschied Bestimmen) können von den natürlichen Zahlen direkt auf die Bruchzahlen übertragen werden.

Dagegen ist die Grundvorstellung zur Multiplikation als Vervielfachen (wiederholte/verkürzte Addition) nicht fortsetzbar (Padberg & Wartha, 2017; Prediger, 2011). Multiplizieren von Anteilen kann jedoch als Anteilbildung interpretiert werden. Die Grundvorstellung der Division als Verteilen (12 Äpfel an 3 Kinder) ist ebenfalls nicht fortsetzbar im Bereich der Brüche. Die Grundvorstellung des Ausmessens bzw. Aufteilens hingegen schon: „12 Äpfel werden in Portionen zu 3 Äpfeln verpackt – wie viele Portionen gibt das?“ kann auch mit den neuen Zahlen interpretiert werden: „12 Äpfel werden in Portionen zu $\frac{1}{4}$ Äpfel verpackt. Wie viele Portionen gibt das?“.

Werden die Grenzen und Änderungen bei den Grundvorstellungen zur Multiplikation und Division nicht berücksichtigt, so können sich Fehlvorstellungen entwickeln (Fischbein, Deri, Sainati Nello, Marino, & Maria, 1985; Prediger, 2007; Wartha, 2007). Besonders gut sind die Fehlvorstellungen „Multiplizieren vergrößert immer und Dividieren verkleinert immer“ dokumentiert. Die Wirkung dieser Operationen im Bereich der natürlichen Zahlen wird auf den Bereich der Brüche übertragen und Rechenoperationen werden nach ihrer vermeintlichen Wirkung ausgewählt – nicht nach deren Bedeutung.

Die Aufgaben sind so formuliert, dass aufgrund des Textes keine Rückschlüsse aufgrund von Oberflächenmerkmalen („Signalwörtern“) möglich sind und Bearbeitungen auf dieser Grundlage eher zu falschen Auswahlantworten führen (Bana, Farrell, & McIntosh, 1997; Prediger, 2011). In diesen Fällen wird keine Operationsvorstellung aktiviert.

Tabelle III.10-15: Aufgabenbeispiel „Textaufgaben“ (Niveaustufe D)

MA_D_ZO_411_F Textaufgaben	Auswahl	Interpretation
 Abbildung III.10-15	**$2\,400 \cdot \frac{1}{6}$**	**korrekt – Anteilbildung durch Multiplikation**
	$2\,400 - \frac{1}{6}$	Orientierung an Signalwörtern („spenden“ = weggeben = minus)
	$2\,400 : \frac{1}{6}$	Fehlvorstellung: Dividieren verkleinert den Ausgangswert 2 400.
	2 400 : 100 · 6	Anteilbildung 0,06 von 2 400 mit 0,06 · 2 400 – Fehlvorstellung: Komma als Bruchstrich ($\frac{1}{6}$ = 0,06)
	2 400 : 0,6	Fehlvorstellung: Dividieren verkleinert immer. Und: Fehlvorstellung: Komma als Bruchstrich ($\frac{1}{6}$ = 0,6)

Grundvorstellungen zu Rechenoperationen können aufgebaut werden, wenn Modelle (Bilder oder Handlungen) mit der mathematischen Symbolik verknüpft werden. So können einerseits Rechenausdrücke an einem Modell bildlich dargestellt werden, andererseits können Sachaufgaben über ein bildliches Modell mit dem passenden Rechenausdruck in Verbindung gebracht werden.

In ***ILeA plus*** wird mit der Aufgabe „Operationsbild“ (10 Items) nach einem Zusammenhang zwischen einem bildlichen Modell und einem Rechenausdruck (Bruch- und Dezimalschreibweise) gefragt. Es soll angegeben werden, ob der angegebene Term zum Bild passt.

Tabelle III.10-16: Aufgabenbeispiel „Operationsbild“ (Niveaustufe D)

MA_D_ZO_412_I Operationsbild	Auswahl	Interpretation
 Abbildung III.10-16	**ja**	**korrekt**
	nein	Keine Grundvorstellung zur Multiplikation - Anteilbildung wird nicht mit Multiplikation assoziiert.

10.5 RECHENVERFAHREN UND -STRATEGIEN ANWENDEN

RLP	**D Rechenverfahren und -strategien anwenden** ▪ Prüfen und Übertragen der operativen Strategien und der schriftlichen Rechenverfahren für Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division natürlicher Zahlen auf das Rechnen mit gebrochenen Zahlen ▪ **situationsangemessenes Verwenden der Kopfrechenstrategien und der Rechenverfahren** ▪ Verknüpfen mehrerer Grundrechenoperationen unter Beachtung der Punkt-vor-Strich-Regel und der Klammerregeln im Zahlenbereich der gebrochenen Zahlen ▪ Ausführen der schriftlichen Rechenverfahren für natürliche Zahlen (auch der Division mit ausgewählten zweistelligen Divisoren) ▪ **Ausführen und Beschreiben des Rechnens mit gemeinen Brüchen** ▪ Angeben von Ergebnissen mit sinnvoller Genauigkeit (auch bei Dezimalzahlen) ▪ **Überschlagen, Abschätzen und Überprüfen von Rechenergebnissen (auch im Bereich der gebrochenen Zahlen)**

Das situationsangemessene Verwenden von Kopfrechenstrategien wird in ***ILeA plus*** mit Rechenaufgaben (4 Items Bruch- und 6 Items Dezimalschreibweise) untersucht, die bei der Aktivierung von Zahlvorstellungen (im Bereich der Dezimalbrüche im Stellenwerksystem) ohne Zwischenschritte im Kopf gelöst werden können. Ohne die Aktivierung von Zahlvorstellungen sind in der Regel fehleranfällige Zwischenschritte nötig, die durch Fehleranalysen Rückschlüsse auf Verständnisschwierigkeiten erlauben (Padberg & Wartha, 2017).

Tabelle III.10-17: Aufgabenbeispiel „Rechnen (Bruch)" (Niveaustufe D)

MA_D_ZO_511_B Rechnen (Bruch)	Offene Eingabe	Interpretation
	$\frac{2}{7}$	**korrekt**
	$\frac{4}{7}$	falsche Äquivalenz $\frac{1}{7} = 1$ „falsche Tauschaufgabe" $\frac{5}{7} - \frac{1}{7}$
	$\frac{4}{6}$	„falsche Tauschaufgabe" $\frac{5}{7} - \frac{1}{1}$ Übertragung unverstandener Multiplikationsregel auf Subtraktion (Z · Z und N · N)
Abbildung III.10-17	anderes	falsch

Insbesondere beim Rechnen mit Dezimalbrüchen werden Aufgaben gestellt, die sich direkt auf die Konstruktion dieser Zahlen beziehen. Auch ohne Rechenfertigkeiten kann – bei hinreichend ausgebildetem Zahlverständnis – das Ergebnis angegeben werden.

Tabelle III.10-18: Aufgabenbeispiel „Rechnen (Dezimal)“ (Niveaustufe D)

MA_D_ZO_541_F Rechnen (Dezimal)	Offene Eingabe	Interpretation
	**0,05**	**korrekt (5 Hundertstel)**
	20	„falsche Tauschaufgabe“: größere Zahl durch kleinere 100 : 5
	500	falsche Rechenoperation (5 · 100)
	50 5 0,5 0,005	Stellenwertproblem
Abbildung III.10-18	anderes	falsch

Das Abschätzen von Ergebnissen wird in ***ILeA plus*** mit der Aufgabe „Schätzen“ (3 Items) im Rahmen von Textaufgaben untersucht. Die Sachsituation wird mit Dezimalbrüchen beschrieben und es soll ausgewählt werden, in welchem Intervall das Ergebnis liegt. Die drei Sachkontexte sind eine Teilmenge der Aufgaben, die bei den Textaufgaben zum Einsatz gekommen sind (Padberg & Wartha, 2017, S. 271-274). So kann vergleichend untersucht werden, ob die Rechenoperation aufgrund der (richtig interpretierten) Schätzung der Größenordnung des Ergebnisses falsch gewählt wurde.

Tabelle III.10-19: Aufgabenbeispiel „Schätzen“ (Niveaustufe D)

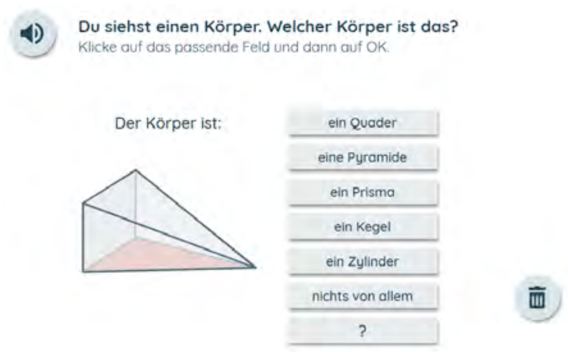
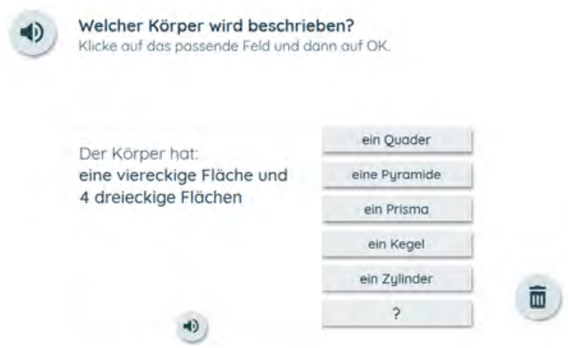
MA_D_ZO_551_B Schätzen	Auswahl	Interpretation
	**weniger als 0,75 €**	**korrekt**
	mehr als 0,75 €, aber weniger als 0,89 €	Die Verkleinerung des Kilopreises wird richtig erwartet, aber nicht berücksichtigt, dass auch der Wert 0,75 unterschritten werden muss.
Abbildung III.10-19	mehr als 0,89 €	Die Vergrößerung des Ausgangswertes ist falsch.

10.6 GEOMETRISCHE OBJEKTE UND IHRE EIGENSCHAFTEN BESCHREIBEN

RLP	**D Geometrische Objekte und ihre Eigenschaften beschreiben** ▪ **Erkennen, Benennen und Beschreiben gerader geometrischer Körper (auch Zylinder, Prismen, Kegel, Pyramiden) in der Umwelt und am Modell unter Verwendung wesentlicher Merkmale** ▪ **Erkennen und Beschreiben der Eigenschaften von Winkeln und Dreiecken** ▪ **Erkennen und Beschreiben von Symmetrien (auch in Modellen von geometrischen Körpern)**

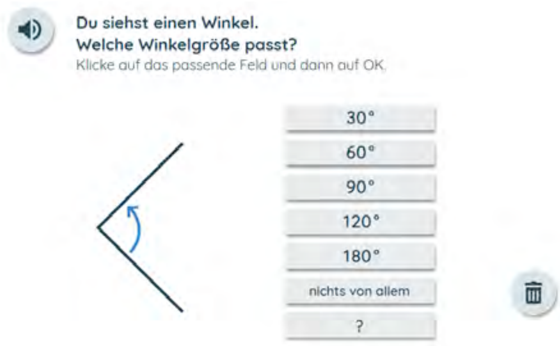
In ***ILeA plus*** wird anhand ausgewählter Körper untersucht, inwiefern charakteristische Eigenschaften der jeweiligen Objekte zu deren Identifizierung genutzt werden können. Hierzu werden Objekt-Begriffe zur Auswahl vorgegeben. Den Schülerinnen und Schülern werden einerseits Abbildungen der Objekte präsentiert (Aufgabe „Körperbild“, 7 Items), andererseits eine entsprechende Umschreibung (Aufgabe „Körperbeschreibung“, 4 Items). Auf diese Weise kann darüber hinaus erfasst werden, ob es einen Unterschied macht, wenn das Objekt als Bild oder wenn seine Umschreibung präsentiert wird. Zudem sind die Abbildungen der Körper nicht immer prototypisch (vgl. folgendes Beispiel). Prototypisch bedeutet, dass es sich um eine „Standarddarstellung“ handelt: Die Spitze der Pyramide ist oben, das Prisma liegt auf einem Dreieck und hat zwei dreieckige und drei rechteckige Flächen. Neben den beschriebenen Interpretationen (siehe Tabelle III.10-20) ist es auch möglich, dass die Begriffe falsch gemerkt, verwechselt oder unbekannt sind.

Tabelle III.10-20: Aufgabenbeispiel „Körperbild/-beschreibung“ (Niveaustufe D)

Ma_D_RF_111_E Körperbild/-beschreibung MA_D_RF_112_B	Auswahl	Interpretation
 Abbildung III.10-20	Quader	Die rechteckige Seitenfläche lässt auf einen Quader schließen.
	Pyramide	**Korrekt, der Körper kann auch in nicht typischer Lage identifiziert werden.**
	Prisma	Die dreieckigen Seitenflächen lassen auf ein Prisma schließen.
	Kegel	Die spitz zulaufenden Seiten lassen auf einen Kegel schließen.
	Zylinder	andere Fehlvorstellung
	nichts davon	Die nicht typische Darstellung lässt darauf schließen, dass kein „besonderer“ Körper vorliegt.
 Abbildung III.10-21	Quader	Die Beschreibung als „viereckige Fläche“ lässt auf einen Quader schließen.
	Pyramide	**korrekt**
	Prisma	Die Beschreibung als „dreieckige Flächen“ lässt auf ein Prisma schließen.
	Kegel Zylinder	andere Fehlvorstellung

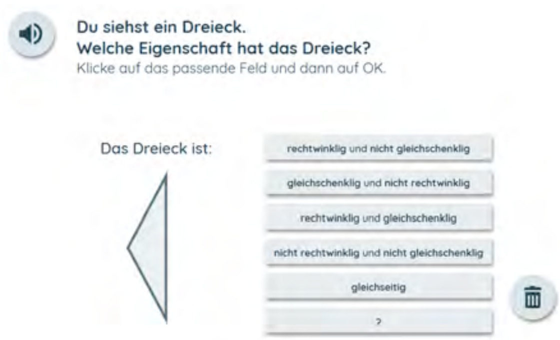
Das Einschätzen von typischen Winkelgrößen (z. B. 45°, 60°, 90°, 180°) und die Kenntnis von überstumpfen Winkeln (z. B. 270°) in Abgrenzung zu stumpfen Winkeln (z. B. 120°) ist eine wichtige Kompetenz zur Beschreibung und Nutzung geometrischer Objekte (Bettner, 2005, S. 20). ***ILeA plus*** prüft mit der Aufgabe „Winkelgröße“ (5 Items), ob zu vorgegebenen Winkeln die entsprechende Winkelgröße aus einer Auswahl angegeben werden kann.

Tabelle III.10-21: Aufgabenbeispiel „Winkelgröße“ (Niveaustufe D)

MA_D_RF_121_C Winkelgröße	Auswahl	Interpretation
 Abbildung III.10-22	30°	Der zwischen Schenkel und Vertikale eingeschriebene Winkel wird geschätzt.
	60°	Die nicht typische Lage lässt auf die nächstkleinere Winkelgröße schließen.
	90°	**Korrekt, der Winkel wird auch in nicht typischer Lage erkannt.**
	120°	Die nicht typische Lage lässt auf die nächstgrößere Winkelgröße schließen.
	180°	Die besonderen Winkelgrößen werden vertauscht.
	nichts davon	anderer Fehler

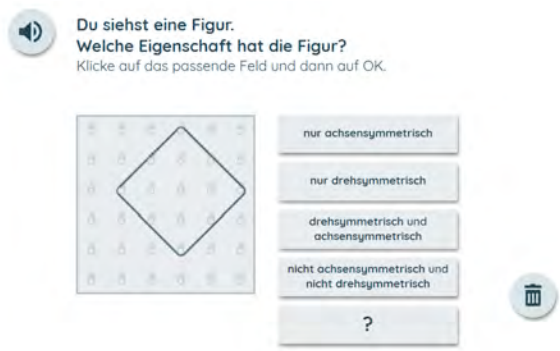
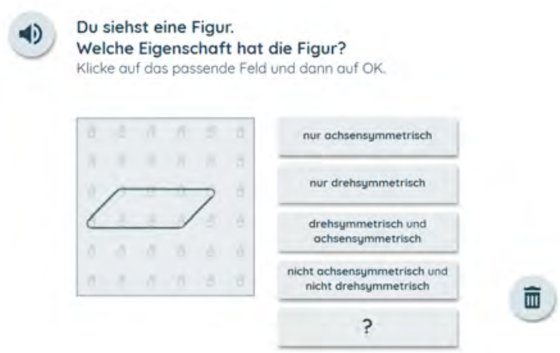
Das Erkennen und Beschreiben von Dreiecken und ihren Eigenschaften wird mit der Aufgabe „Dreieckseigenschafen“ (5 Items) überprüft, indem Abbildungen von Dreiecken vorgegeben werden und die passenden Eigenschaften aus einer Auswahl angegeben werden müssen. Hierbei geht es um die Eigenschaften „rechtwinklig, gleichseitig und gleichschenklig“ (Schipper, Ebeling, & Dröge, 2017, S. 135).

Tabelle III.10-22: Aufgabenbeispiel „Dreieckseigenschaften“ (Niveaustufe D)

MA_D_RF_123_E Dreieckseigenschaften	Auswahl	Interpretation
 Abbildung III.10-23	rechtwinklig u. nicht gleich-schenklig	Die nicht typische Lage lässt auf einen rechten Winkel und das Fehlen gleich langer Seiten schließen.
	gleichschenklig u. nicht recht-winklig	**Korrekt, der Winkel wird auch in ungewöhnlicher Lage erkannt.**
	gleichschenklig u. rechtwinklig	Die nicht typische Lage lässt auf einen rechten Winkel schließen.
	nicht gleich-schenklig u. nicht recht-winklig	Die nicht typische Lage lässt auf das Fehlen gleich langer Seiten schließen.
	gleichseitig	Die Begriffe gleichschenklig und gleichseitig werden verwechselt.

Figuren sollen auf ihre Symmetrie untersucht werden. Dazu werden in der Aufgabe „Symmetrie“ (6 Items) verschiedene Figuren präsentiert und die Schülerinnen und Schüler sollen entscheiden, ob und welche Art von Symmetrie jeweils vorliegt (Schmidt-Thieme & Weigand, 2014, S. 187). Dabei werden auch Figuren präsentiert, die sowohl achsen- als auch drehsymmetrisch sind. Auf diese Weise kann überprüft werden, ob zwischen Achsen- und Drehsymmetrie differenziert werden kann.

Tabelle III.10-23: Aufgabenbeispiel „Symmetrie“ (Niveaustufe D)

MA_D_RF_131_D Symmetrie MA_D_RF_131_E	Auswahl	Interpretation
 Abbildung III.10-24	nur achsen-symmetrisch	Die Wahrnehmung der Achsensymmetrie ist dominant, andere Symmetrien bleiben unberücksichtigt.
	nur dreh-symmetrisch	Die Wahrnehmung der Drehsymmetrie ist dominant, andere Symmetrien bleiben unberücksichtigt.
	achsen- und dreh-symmetrisch	**korrekt**
	nicht achsen- und nicht dreh-symmetrisch	Möglicherweise führt die untypische Darstellung des Quadrats zu dieser Fehleinschätzung.
 Abbildung III.10-25	nur achsen-symmetrisch	Die Regelmäßigkeit der Figur lässt auf Achsensymmetrie schließen.
	nur dreh-symmetrisch	**korrekt**
	achsen- und dreh-symmetrisch	Die Regelmäßigkeit der Figur lässt auch auf Achsensymmetrie schließen.
	nicht achsen- und nicht dreh-symmetrisch	Die fehlende Achsen-symmetrie lässt auf das Fehlen anderer Symmetrien schließen.

10.7 BEZIEHUNGEN ZWISCHEN GEOMETRISCHEN OBJEKTEN BESCHREIBEN

RLP

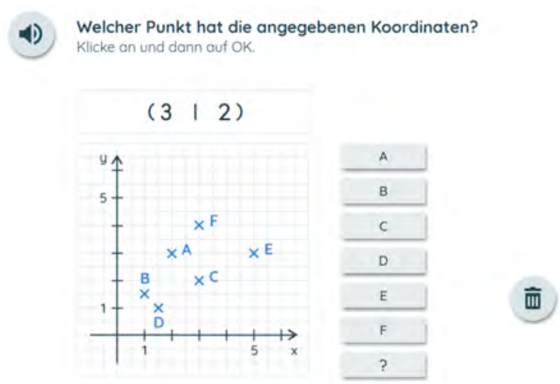
D Beziehungen zwischen geometrischen Objekten beschreiben

- **Beschreiben von Lagebeziehungen (auch mithilfe von Gitternetzen und Koordinaten)**
- **Beschreiben von Winkelbeziehungen an geschnittenen Geraden bzw. Parallelen sowie in Dreiecken (Scheitelwinkel, Nebenwinkel, Stufenwinkel, Innenwinkel) und Nutzen für Argumentationen**
- **Beschreiben von Lage- und Größenbeziehungen ebener Figuren an räumlichen Objekten (auch Erkennen weiterer Körpernetze)**
- Beschreiben der Beziehungen zwischen den bekannten Körperformen
- Systematisieren von Winkeln bzw. von Dreiecken nach Winkelgrößen und Seitenlängen

ILeA plus überprüft das Auffassen und Darstellen von Punkten am Koordinatenkreuz (erster Quadrant; vgl. auch RLP „Geometrische Objekte darstellen“). Hierzu wird in der Aufgabe „Koordinaten darstellen“ (3 Items) ein Koordinatenpaar vorgegeben und aus einer vorgegebenen Auswahl von möglichen Punkten im Koordinatenkreuz soll der passende identifiziert werden. Darüber hinaus wird bei der Aufgabe „Koordinaten auffassen“ (3 Items) genau ein Punkt im Koordinatensystem vorgegeben und das passende Koordinatenpaar soll ausgewählt werden. Die Aufgaben können dann erfolgreich gelöst werden, wenn die Orientierung im Koordinatensystem unter Nutzung der skalierten Achsen gelingt. Dies schließt auch die Kenntnis darüber ein, wie die jeweiligen Koordinaten in einer Koordinatenangabe der Form (2│3) angegeben werden (Malle, 2005).

Neben der geometrischen Facette dieser Aufgabe kann bei fehlerhafter Bearbeitung davon ausgegangen werden, dass das Koordinatensystem auch im Inhaltsbereich „Zuordnungen und Funktionen“ nicht angemessen genutzt werden kann.

Tabelle III.10-24: Aufgabenbeispiel „Koordinaten darstellen und auffassen“ (Niveaustufe D)

MA_D_RF_211_A Koordinaten darstellen und auffassen MA_D_RF_212_A	Auswahl	Interpretation
 Abbildung III.10-26	A	Die X- und die Y-Koordinate werden vertauscht.
	B	Die Anzahl der Kästchen wird gezählt, die Skalierung bleibt unberücksichtigt; zudem werden die X- und die Y-Koordinate vertauscht.
	C	**korrekt**
	D	Die Anzahl der Kästchen wird gezählt, die Skalierung bleibt unberücksichtigt.
	E F	andere Fehlvorstellung
	?	Die Aufgabe wird nicht verstanden.

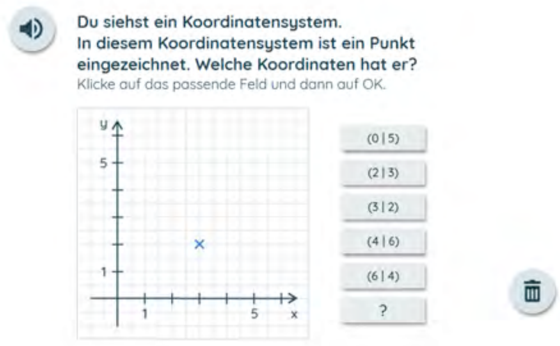


Abbildung III.10-27

(0 | 5)	Die Werte der Koordinaten (2 und 3) werden addiert.
(2 | 3)	Die X- und die Y-Koordinate werden vertauscht.
(3 | 2)	**korrekt**
(4 | 6)	Die Anzahl der Kästchen wird gezählt, die Skalierung bleibt unberücksichtigt; zudem werden die X- und die Y-Koordinate vertauscht.
(6 | 4)	Die Anzahl der Kästchen wird gezählt, die Skalierung bleibt unberücksichtigt.
?	Die Aufgabe wird nicht verstanden.

Die Kenntnis von Winkelbeziehungen, deren Begrifflichkeiten und Eigenschaften werden in ***ILeA plus*** mit verschiedenen Aufgaben überprüft. Bei der Aufgabe „Winkelbeziehungen kennen“ (3 Items) wird erhoben, ob die Begriffe Stufenwinkel, Nebenwinkel, Scheitelwinkel sicher genutzt werden können (Bettner, 2005). Bei der Aufgabe „Winkelbeziehungen nutzen“ (4 Items) sollen ihre jeweiligen Eigenschaften abgerufen werden können. Hierzu werden Abbildungen von geschnittenen Parallelen vorgegeben mit der Aufforderung, Stufenwinkel, Nebenwinkel und Scheitelwinkel zu einem gegebenen Winkel anzugeben. Darüber hinaus wird bei der Aufgabe „Winkelbeziehungen beschreiben“ (3 Items) erfragt, in welcher Beziehung die jeweiligen Winkel zueinander stehen (z. B.: sind gleich groß, ergänzen sich zu 180° …).

Tabelle III.10-25: Aufgabenbeispiele „Winkelbeziehungen kennen“, „Winkelbeziehungen beschreiben“ (Niveaustufe D)

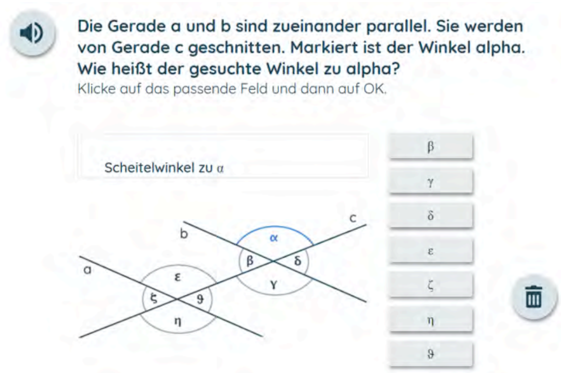
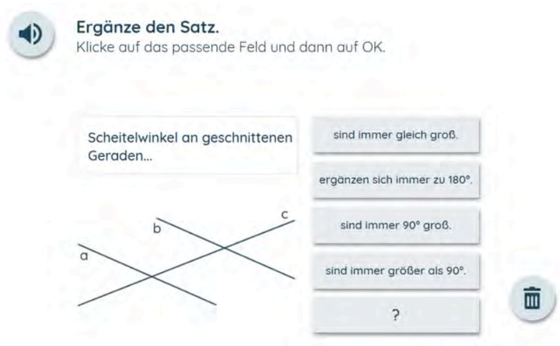


Abbildung III.10-28

MA_D_RF_221_A Winkelbeziehungen kennen MA_D_RF_222_A Winkelbeziehungen beschreiben	Auswahl	Interpretation
	β δ	Die Begriffe Scheitelwinkel und Nebenwinkel werden verwechselt.
	γ	**korrekt**
	ε	Die Begriffe Nebenwinkel und Scheitelwinkel werden verwechselt.
	η	Der gleich große Nebenwinkel zum Scheitelwinkel wird als Scheitelwinkel zu α interpretiert.
	ζ ϑ	andere Fehlvorstellung

 Abbildung III.10-29	**sind immer gleich groß**	**korrekt**
	ergänzen sich immer zu 180°	Scheitelwinkel und Nebenwinkel werden verwechselt.
	sind immer 90° groß	andere Fehlvorstellung
	sind immer größer als 90°	Die stumpfen Winkel im Bild führen zu einer Übergeneralisierung.
	?	Die Aufgabe wird nicht verstanden.

Neben dem Kennen und Anwenden von Begriffen überprüft ***ILeA plus***, ob Winkelbeziehungen an geschnittenen Geraden (Aufgabe „Winkelbeziehungen nutzen“, 4 Items), in Drei- und Vierecken (hier: Parallelogramm) und zur Bestimmung von Winkelgrößen genutzt werden können (Aufgabe „Winkelbeziehungen in Figuren nutzen“, 3 Items). Die jeweils gesuchten Winkelgrößen sind dabei nicht direkt abzulesen, sondern müssen unter Nutzung der geometrischen Beziehungen und Eigenschaften hergeleitet werden (Bettner, 2005).

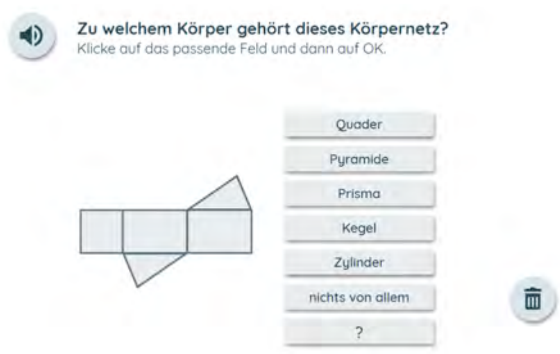
Tabelle III.10-26: Aufgabenbeispiele „Winkelbeziehungen nutzen“, „Winkelbeziehungen in Figuren“ (Niveaustufe D)

MA_D_RF_223_B Winkelbeziehungen nutzen MA_D_RF_224_B Winkelbeziehungen in Figuren	Offene Eingabe	Interpretation
 Abbildung III.10-30	**120°**	**korrekt**
	90°	Übergeneralisierung des rechten Winkels
	180°	Die Winkelmaße werden zu einem glatten Hunderter ergänzt.
	80°	
	60°	Die Winkelmaße werden zu 180° ergänzt.
	andere Eingabe	falsch
	?	Die Aufgabe wird nicht verstanden.

 Abbildung III.10-31	**100°**	**korrekt**
	80°	Die Regelmäßigkeit des Parallelogramms lässt auf gleich große Winkel schließen.
	90°	Die Regelmäßigkeit des Parallelogramms lässt auf einen rechten Winkel schließen.
	andere Eingabe	falsch
	?	Die Aufgabe wird nicht verstanden.

Mit der Aufgabe „Körpernetze“ (3 Items) überprüft ***ILeA plus***, ob die Beziehungen zwischen gegebenen Seitenflächen und einem entsprechenden Körper erkannt werden (Franke & Reinhold, 2016). Dazu wird die Abbildung eines Körpernetzes präsentiert. Die Schülerinnen und Schüler sollen angeben, um welchen Körper es sich nach Auffalten handelt. Darüber hinaus können zur korrekten Bearbeitung dieser Aufgaben die vorgegebenen Netze mental gefaltet werden.

Tabelle III.10-27: Aufgabenbeispiel „Körpernetze“ (Niveaustufe D)

MA_D_RF_231_B Körpernetze	Auswahl	Interpretation
 Abbildung III.10-32	Quader	Die Rechtecke lassen auf einen Quader schließen.
	Pyramide	Die Dreiecke lassen auf eine Pyramide schließen.
	Prisma	**korrekt**
	Kegel Zylinder nichts von alledem	falsch
	?	Die Aufgabe wird nicht verstanden.

10.8 GEOMETRISCHE OBJEKTE DARSTELLEN

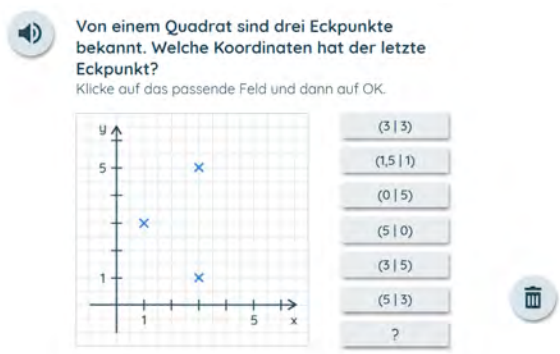
RLP	**D Geometrische Objekte darstellen**
	▪ Herstellen von Modellen geometrischer Körper (auch Prismen) ▪ **Zeichnen von ebenen Figuren im Koordinatensystem (1. Quadrant)** ▪ Zeichnen von Winkeln und ebenen Figuren mithilfe von Zeichengeräten (Lineal, ▪ Geodreieck, Zirkel) ▪ Skizzieren der Schrägbilder von Würfeln und Quadern auf Rasterpapier

Diese Kompetenzen erfordern die Arbeit der Schülerinnen und Schüler mit konkreten Objekten und Werkzeugen und können daher nur eingeschränkt durch ***ILeA plus*** erfasst werden.

In diesem Bereich prüft ***ILeA plus*** daher nur die Fähigkeit, eine geometrische Form in ein Koordinatensystem einzeichnen zu können (Aufgabe „Quadrat im Koordinatensystem“, 2 Items*)*. Hierzu werden drei Eckpunkte eines Quadrats vorgegeben und die Koordinaten des vierten Eckpunkts sollen angegeben werden. Hierzu sind zwei verschiedene Kompetenzen notwendig: Orientierung im Koordinatensystem unter Nutzung der skalierten Achsen (Malle, 2005). Dies schließt auch die Kenntnis dessen ein, wie die jeweiligen Koordinaten in einer Koordinatenangabe der Form (2│3) angegeben werden. Darüber hinaus müssen für die erfolgreiche Bearbeitung die Eigenschaften eines Quadrats sicher gewusst und im Zusammenhang genutzt werden.

Neben der geometrischen Facette dieser Aufgabe kann bei fehlerhafter Bearbeitung davon ausgegangen werden, dass das Koordinatensystem auch im Inhaltsbereich „Zuordnungen und Funktionen“ nicht angemessen genutzt werden kann.

Tabelle III.10-28: Aufgabenbeispiel „Quadrat im Koordinatensystem“ (Niveaustufe D)

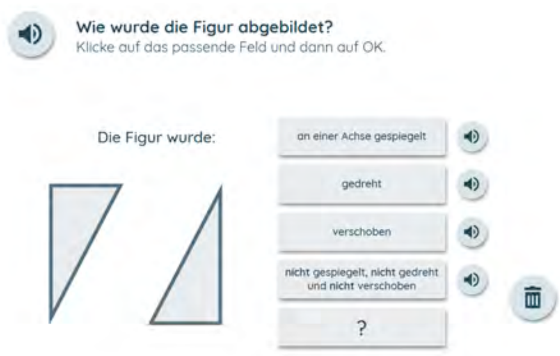
MA_D_RF_321_A Quadrat im Koordinatensystem	**Auswahl**	**Interpretation**
 Abbildung III.10-33	(3│3)	Mittelpunkt des Quadrats
	(1,5│1)	andere Fehlvorstellung
	(0│5)	Nur die Koordinaten der X-Achse werden berücksichtigt, zudem werden die X- und die Y-Koordinate vertauscht.
	(5│0)	Nur die Koordinaten der X-Achse werden berücksichtigt.
	(3│5)	Die X- und die Y-Koordinate werden vertauscht.
	(5│3)	**korrekt**
	?	Die Aufgabe wird nicht verstanden.

10.9 GEOMETRISCHE ABBILDUNGEN UND IHRE EIGENSCHAFTEN NUTZEN

RLP	**D Geometrische Abbildungen und ihre Eigenschaften nutzen** ▪ **Erkennen und Benennen von kongruenten Figuren** ▪ **Beschreiben der Beziehungen zwischen Original- und Bildfigur (Längen- und Winkeltreue) bei Kongruenzabbildungen (auch Drehungen und Verschiebungen)**

Das Erkennen und Benennen von kongruenten Figuren wird in ***ILeA plus*** mit der Aufgabe „Abbildung“ (4 Items) untersucht. Hier werden jeweils zwei Figuren vorgegeben und es soll entschieden werden, ob die Figuren durch Drehung (Rotation in der Ebene), Spiegelung an einer Achse oder Verschiebung zur Deckung gebracht werden können, oder ob dies über eine Abbildung nicht gelingt. Daher wird neben der Kongruenz auch die Art der Abbildung abgefragt (Schmidt-Thieme & Weigand, 2014).

Tabelle III.10-29: Aufgabenbeispiel „Abbildung“ (Niveaustufe D)

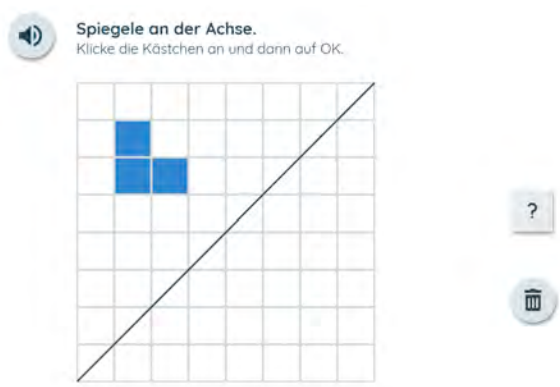
MA_D_RF_411_A Abbildung	Auswahl	Interpretation
 Abbildung III.10-34	an einer Achse gespiegelt	Die Art der Abbildung wird nicht erkannt, die Kongruenz wird erkannt.
	gedreht	**korrekt**
	verschoben	Die Art der Abbildung wird nicht erkannt, die Kongruenz wird erkannt.
	nichts von allem	Die Kongruenz wird nicht erkannt.
	?	Die Aufgabe wird nicht verstanden.

10.10 GEOMETRISCHE ABBILDUNGEN AUSFÜHREN

RLP	**D Geometrische Abbildungen ausführen** ▪ Herstellen von Parketten durch Zeichnen und Legen von Figuren ▪ **Zeichnen von Spiegelungen und Verschiebungen**

ILeA plus überprüft die Fähigkeit, Spiegelungen an einer Achse zu zeichnen, über das Spiegeln auf einem vorgegebenen Raster (Aufgabe „Spiegeln“, 3 Items). Beim Zeichnen von Spiegelungen an einer Achse müssen zwei Eigenschaften berücksichtigt werden: Jeder Punkt der Spiegelung ist gleich weit von der Spiegelachse entfernt wie der jeweilige Punkt der Ausgangsfigur und diese Punkte können durch eine senkrecht zur Spiegelachse liegende Strecke verbunden werden. Besonders herausfordernd sind solche Aufgaben, wenn die Spiegelachse nicht parallel zum Bezugsrahmen (Bildschirm, Blattrand) liegt und/oder wenn die Strecken der Ausgangsfigur weder senkrecht noch parallel zur Spiegelachse liegen (Götz & Schulz, 2018).

Tabelle III.10-30: Aufgabenbeispiel „Spiegeln“ (Niveaustufe D)

MA_D_RF_521_C Spiegeln	Offene Eingabe	Interpretation
 Abbildung III.10-35	**korrekte Ergänzung**	**Obwohl die gegebene Figur nicht sehr komplex ist, fordert die richtige Bearbeitung die genaue Kenntnis und Umsetzung der Eigenschaften bei Achsenspiegelungen und ist daher wenig intuitiv.**

11. NIVEAUSTUFE D: FÖRDERINHALTE AUS DEN AUSWERTUNGEN

Sebastian Wartha, Axel Schulz, Christiane Benz & Sophia Bayer

11.1 GRUNDVORSTELLUNG ZUM BRUCH ALS ANTEIL AUFBAUEN (AN)

Die Grundvorstellung des Bruchs als Anteilsangabe ist die Basis für Zahlvorstellungen im Bereich der positiv rationalen Zahlen. Auch Zahlvergleiche und die Rechenoperationen können auf Verständnisgrundlage nur dann erarbeitet werden, wenn die Anteilsvorstellung sicher aktiviert werden kann (Marxer & Wittmann, 2011; Padberg & Wartha, 2017; Schink, 2013).

Wird eine Zahl ($\frac{3}{5}$) als Anteil interpretiert, dann bedeutet das, dass ein Ganzes (1) in (5) gleich große Teile zerlegt und einige (3) davon betrachtet werden. Zentral ist hierbei die Idee, dass bei einer bildlichen oder handelnden Darstellung des Anteils die (5) Teile die gleiche Größe (Flächeninhalt, Volumen) haben, hierbei aber nicht zwingend kongruent sein müssen.

In Bezug auf die Notation des Bruchs in Dezimalschreibweise (Kommazahl) beschränken sich die Nenner der Brüche auf Zehnerpotenzen (Zehntel, Hundertstel, Tausendstel ...) (Heckmann, 2006).

Kann die Anteilsvorstellung nicht aktiviert werden, so besteht die Gefahr, dass nur syntaktische Lösungsstrategien (sog. „Tricks“) zur Bearbeitung von Aufgaben herangezogen werden. Insbesondere kann es sein, dass sich Fehlvorstellungen ausbilden, die ein erfolgreiches Weiterlernen massiv be- oder verhindern (Fischbein et al., 1985; Prediger, 2006). Bekannte Fehlvorstellungen sind die Gleichsetzung des Anteils als Verhältnis, die Gleichsetzung des Dezimalkommas mit dem Bruchstrich sowie „Komma-trennt“ (Heckmann, 2006). Nach der letzten Fehlvorstellung werden die Zahleinträge vor und hinter dem Dezimalkomma jeweils getrennt interpretiert.

Ausgabe:
Für die Ausgabe dieses Förderinhaltes werden die Eingaben bei den Aufgaben „Anteilauffassen“ (Bruch und Dezimalschreibweise) und „Anteilkontrolle“ (Bruch- und Dezimalschreibweise) analysiert. Wenn mehr als zwölf der 23 Items falsch sind, wird der Förderinhalt ausgegeben.

Tabelle III.11-1: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes AN (Niveaustufe D)

Anzahl falsch:	0	1-5	6-8	9	10	11	12	13	14	15	16	17-23	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (AN)	2 %	17 %	18 %	6 %	7 %	9 %	9 %	8 %	6 %	5 %	5 %	8 %	1000
Bewertung	Unauffällig: 68 %							Auffällig: 32 %					

Ergänzende prozessorientierte Diagnose und Fördervorschläge

Tabelle III.11-2: Ergänzende prozessorientierte Diagnose (AN, Niveaustufe D)

Aufgabe	Beobachtungen
Beschreibe, wie ein rechteckiges Papier (ungefähr) gefaltet und gefärbt werden muss, um $\frac{3}{7}$ darzustellen. Was müsste für 0,3 gefaltet und gefärbt werden?	▪ Werden 7 gleich große Teile gebildet und 3 davon betrachtet? ▪ Wird für 0,3 eine Zehnteluntereilung hergestellt?
	▪ Kann die Herstellung konkret durchgeführt und beschrieben werden?
	▪ Kann die Herstellung des Bruchs auch in der Vorstellung beschrieben werden? ▪ Können die Anteile ungefähr gefaltet und begründet werden (z. B. Vergleich mit $\frac{1}{2}$ oder anderen Zahlen)?
Welcher Anteil ist im Bild gefärbt? Kann der Anteil auch anders angegeben werden (Kürzen/Erweitern bzw. Bruch- oder Dezimalsprechweise)?	▪ Ist die Bedeutung von Zähler und Nenner klar? Werden Unterteilungen verfeinert und äquivalente Brüche angegeben? ▪ Können Anteile ungefähr bestimmt werden (Orientierung an bekannten Brüchen)? ▪ Ist eine Erweiterung auf Zehnerbrüche und die Angabe der Dezimalzahl möglich? Können Dezimalzahlen auch erweitert werden (0,4 = 0,40, vier Zehntel = vierzig Hundertstel)?
Begründe, warum der Anteil (nicht) $\frac{3}{5}$ beträgt.	▪ Können korrekte und falsche Zeichnungen (Fehlvorstellungen aufgreifend) identifiziert werden? Wird mit der Definition begründet (Teile gleich groß? Zahlen in Zähler und Nenner richtig zugeordnet?)?
Ein Anteil ist bildlich gegeben. Wie kann das Ganze gezeichnet werden?	▪ Kann die Vorgehensweise zur Darstellung eines Anteils (bildlich oder handelnd) umgekehrt werden?

Tabelle III.11-3: Fördervorschläge (AN, Niveaustufe D)

Ziel	Förderung
Bedeutung der Rolle von Zähler und Nenner	▪ Falten von Stammbrüchen an rechteckigen Papieren, handlungsbegleitendes Beschreiben und Diskutieren von Alternativen ▪ Gewöhnliche Brüche durch Falten und Färben herstellen ▪ Einzeichnen und Ablesen von Anteilen an Modellen ▪ Diskutieren und Begründen von ungenau gefalteten Anteilen (der markierte Anteil ist kleiner als ein Halb, aber größer als ein Drittel, WEIL …)
Klären der Sprech-weise insbes. bei Dezimalbrüchen	▪ 0,35 als „0 Komma 3 Zehntel und 5 Hundertstel“ aussprechen, Verbindung zur Sprechweise am Modell schaffen ▪ Alternative Sprechweise: 0,35 als „0 Komma 35 Hundertstel“

Verfeinerte Unterteilungen herstellen und diskutieren	▪ Nochmaliges Falten von bereits eingezeichneten Anteilen
	▪ „Ich sehe was, was du nicht siehst“:
	  ▪ Bei einer verfeinerten Unterteilung (z. B: 6 von 24 sind gefärbt: $\frac{1}{4}$ oder $\frac{3}{12}$) beschreiben, auf welche Unterteilung man sich bezieht
	  ▪ Bei Dezimalbrüchen am Zahlenstrahl oder Rechteckmodell klären: 3 Zehntel = 30 Hundertstel

Literatur zum Weiterlesen:

Heckmann, K. (2011). Ausbildung von Dezimalbruchverständnis über Sachprobleme? Eine differenzierte Analyse. *Der Mathematikunterricht, 3*, 55-62.

Heckmann, K. (2013). Was ist eigentlich 0,5? (Fehlende) Anschaulichkeit und ihre Bedeutung für die Dezimalbruchrechnung. In J. Meyer & F. Leydecker (Hrsg.), *Bruchrechnung verstehen.* Braunschweig: Schroedel.

Mosandl, C., & Sprenger, L. (2014). Von den natürlichen Zahlen zu den Dezimalzahlen – nicht immer ein einfacher Weg! *Praxis der Mathematik in der Schule, 56*, 16-21.

Padberg, F., & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung*. Heidelberg: Spektrum, S. 17 ff., 181 ff.

Prediger, S., Selter, C., Hußmann, S., & Nührenbörger, M. (Hrsg.). (2014). *Mathe sicher können: Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen* (1. Aufl.). Berlin: Cornelsen, S. 21 ff.

Wartha, S. (2011). Handeln und Verstehen: Förderbaustein Grundvorstellungen aufbauen. *Mathematik lehren, 166*, 8-14.

Wittmann, G. (2007). Mit Bruchzahlen experimentieren: Darstellungen wechseln – Grundvorstellungen entwickeln. *Mathematik lehren, 142*, 17-23.

11.2 TRAGFÄHIGES STELLENWERTVERSTÄNDNIS AUSBAUEN (SN)

Dem Stellenwertsystem liegen drei Prinzipien zugrunde: das Prinzip der fortgesetzten Bündelung, das Prinzip des Stellenwerts und das Prinzip des Nennwerts. Die beiden letztgenannten bestimmen unsere Schreibweise von Zahlen. Die Stellenwerte haben beim Schreiben immer die gleiche Ordnung: Einer rechts, Zehner links daneben, Hunderter links daneben usw. Die Position der Einer ist durch das Komma markiert. Rechts vom Komma werden Zehntel, weiter rechts Hundertstel (usw.) notiert. Die notierte Ziffer bei jedem Stellenwert gibt die Anzahl der Bündel des jeweiligen Stellenwerts an. Leere Stellen werden durch die Null gekennzeichnet.

Wichtig ist, dass dem Komma bei Dezimalbrüchen hiermit die Rolle eines Markierungszeichens (und nicht die eines Trennzeichens – das Komma trennt Einer und Zehntel) zukommt. Eine zentrale Fehlvorstellung zu Dezimalbrüchen ist die „Komma-trennt-Strategie“, nach der links und rechts vom Komma zwei Zahlen betrachtet werden. Diese Fehlvorstellung ist ein häufiger Grund für Fehler – auch beim Vergleichen und Rechnen.

Beim Schreiben, Lesen und Deuten geschriebener Zahlen (z. B. 2,034) müssen diese zugrunde liegenden Prinzipien verstanden und sicher angewendet werden, da eine Kommunikation mit und über Zahlen ansonsten nicht möglich ist.

Ausgabe:

Für diesen Förderinhalt werden die Aufgaben „Zahlendiktat“ und „Zahlen schreiben mit der Stellenwerttafel“ analysiert (11 Items). Außerdem wird durch alle Aufgaben in ***ILeA plus*** untersucht, ob Schwierigkeiten im Stellenwertsystem auftreten. Hierzu werden alle Fehler zu „Stellenwerte“ und „Komma-trennt“ summiert.

Der Förderbaustein wird ausgegeben, wenn insgesamt 14 falsche Eingaben bzw. typische Fehler oder mehr über den gesamten Test auftreten.

Tabelle III.11-4: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes SN (Niveaustufe D)

Anzahl falsch:	0-5	6-8	9	10	11	12	13	14	15	16	17-21	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (SN)	7 %	18 %	7 %	7 %	10 %	10 %	10 %	9 %	9 %	7 %	6 %	816
Bewertung	Unauffällig: 69 %							Auffällig: 31 %				

Ergänzende prozessorientierte Diagnose und Fördervorschläge

Tabelle III.11-5: Ergänzende prozessorientierte Diagnose (SN, Niveaustufe D)

Aufgabe	Beobachtungen
Wie heißt der Stellenwert der 4 bei 0,345?	▪ Wie wird bei der Identifikation von Stellenwerten vorgegangen? Ist die Position im Zahlsymbol klar?
Markiere die Hundertstelstelle bei 276,345	▪ Wie wird der Stellenwert der Stelle begründet? Wird das Dezimalkomma als Markierungszeichen der Einer gesehen?
Schreibe 3 Hundertstel als Kommazahl auf.	▪ Wo wird die 3 im Zahlsymbol notiert? Wie wird die Position der Stelle begründet?
Stelle die Zahl am Material dar.	▪ Können die 3 Hundertstel im richtigen Stellenwert am Zahlenstrahl, am Rechteckmodell oder mit Zehnersystemblöcken dargestellt werden?
Schreibe 35 Zehntel als Kommazahl auf	▪ Werden 30 Zehntel korrekt zu 3 Einern gebündelt? Werden die Ziffern 3 und 5 an der richtigen Position notiert? Wie werden die Positionen begründet?
Stelle die Zahl am Material dar.	▪ Können die 35 Zehntel in den richtigen Stellenwerten am Zahlenstrahl, Rechteckmodell oder mit Zehnersystemblöcken dargestellt werden?
Wie hängen Zehntel und Tausendstel zusammen?	▪ Kann der Zusammenhang in der richtigen Richtung begründet werden (100 Tausendstel sind 1 Zehntel)?
Beschreibe den Zusammenhang am Arbeitsmittel	▪ Wie wird der Zusammenhang anschaulich beschrieben (z. B. am Rechteckmodell)? Gelingt die Beschreibung des Zusammenhangs bei benachbarten Stellen?

Tabelle III.11-6: Fördervorschläge (SN, Niveaustufe D)

Ziel	Förderung
Positionen der Stellenwerte klären	▪ Markiere die Einerstelle von Dezimalbrüchen und das Komma mit Farbe. Beschreibe, wie die Ziffern links und rechts vom Einer am Arbeitsmittel aussehen. ▪ Markiere die Einer am Arbeitsmittel mit Farbe und notiere sie mit Komma. Beschreibe und begründe anschließend, wo die anderen Stellenwerte notiert werden.
Repräsentanten zu den Stellenwerten aufbauen	▪ Wie können Zehntel (am Rechteckmodell, an den Zehnersystemblöcken) betrachtet und vorgestellt werden? ▪ Wie gelingt das bei Hundertsteln, Tausendsteln?

Zusammenhänge zwischen Stellenwerten diskutierten	▪ Zunächst benachbarte Stellen betrachten und die Unterteilung verfeinern bzw. vergröbern (am Rechteckmodell, an den Zehnersystemblöcken): Gegeben sind 20 Hundertstel – wie viele Zehntel sind das? Unterteile 3 Hundertstel in Tausendstel – wie viele sind das?
Am Arbeitsmittel dargestellte Zahlen aufschreiben und benennen	▪ Am Rechteckmodell/Zehnersystemmaterial dargestellte Brüche in Dezimal- und Bruchschreibweise auffassen, schreiben und benennen ▪ Zunächst keine Ziffernsprechweise (0,25 als Null Komma Zwei Fünf), sondern eine Sprechweise wählen, bei der die Stellenwerte mitgenannt werden (0,25 als zwei Zehntel, fünf Hundertstel oder fünfundzwanzig Hundertstel)

Literatur zum Weiterlesen:

Heckmann, K. (2005). Von Euro und Cent zu Stellenwerten: Zur Entwicklung des Stellenwertverständnisses. *Mathematica Didactica*, *28 (2)*, 71-87.

Heckmann, K. (2007). Von Zehnern zu Zehnteln: Das Stellenwertverständnis auf Dezimalbrüche erweitern. *Mathematik lehren, 142*, 45-51.

Padberg, F., & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung*. Heidelberg: Spektrum, S. 177 ff.

Prediger, S., Selter, C., Hußmann, S., & Nührenbörger, M. (Hrsg.). (2014). *Mathe sicher können: Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen* (1. Aufl.). Berlin: Cornelsen, S. 101 ff.

Wartha, S. (2017). Stellenwertverständnis bei Dezimalbrüchen. *Fördermagazin Sekundarstufe, 1*, 8-14.

11.3 ORDINALE ZAHLVORSTELLUNGEN AUSBAUEN (OR)

Anteile in Bruch- und Dezimalschreibweise können am Zahlenstrahl dargestellt und aufgefasst werden. Eine besondere Herausforderung besteht im Finden einer passenden Unterteilung am Zahlenstrahl – hier ist eine tragfähige Anteilsvorstellung die zentrale Voraussetzung.

Insbesondere die Darstellung von Dezimalbrüchen am Zahlenstrahl ist auch in anderen Kontexten (Koordinatensystem, Tankanzeige, Diagramme und Skalen in der Physik, Wirtschaft, Psychologie) häufig anzutreffen. Eine Interpretation dieser Skalen ist nur möglich, wenn die Darstellung und Auffassung von Brüchen am Zahlenstrahl gelingt.

Darüber hinaus muss ein Stellenwertverständnis ausgebildet sein – zwischen 0,3 und 0,4 kann die Unterteilung z. B. in 10 weitere Bereiche vorgenommen werden. Diese stehen für die Hundertstel zwischen beiden Zahlen: 0,31; 0,32 bis 0,39. Diese Idee der Entbündelung hängt eng mit dem Wissen um das Verfeinern der Unterteilung (Erweitern) zusammen: 0,3 = 0,30.

Können ordinale Darstellungen nicht sicher genutzt werden, so ist eine Kommunikation über (Dezimal-)Brüche in inner- und außermathematischen Kontexten nicht zielführend. Ein verständnisbasiertes Erarbeiten der Größerrelation sowie halbschriftlicher Additions- und Subtraktionsstrategien am Zahlenstrahl oder Rechenstrich ist nicht möglich.

Ausgabe:
Die Ausgabe des Förderinhaltes erfolgt aufgrund der Eingaben der Aufgaben „Zahlenstrahl auffassen“, „Zahlenstrahl darstellen“ und „Einheitbestimmen“. Wenn bei den insgesamt 16 Items zwölf Fehler oder mehr auftreten, wird der Förderinhalt ausgegeben.

Tabelle III.11-7: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes OR (Niveaustufe D)

Anzahl falsch:	0-4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15-16	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (OR)	0 %	1 %	7 %	7 %	9 %	9 %	12 %	16 %	13 %	11 %	11 %	4 %	696
Bewertung	Unauffällig: 61 %								Auffällig: 39 %				

Ergänzende prozessorientierte Diagnose und Fördervorschläge

Tabelle III.11-8: Ergänzende prozessorientierte Diagnose (OR, Niveaustufe D)

Aufgabe	Beobachtungen
Beschreibe, wie du die 0,85 am Zahlenstrahl findest. Gibt es noch andere Möglichkeiten, sie zu finden?	▪ Werden die Stellenwerte richtig zugeordnet? Werden die acht Zehntel richtig im Zehntel zwischen 0,8 und 0,9 verortet oder falsch im 8. Zehntel gesucht?
	▪ Wie flexibel ist die Schülerin / der Schüler, z. B. Beziehungen zur 1 oder 0,9 zu nutzen? Welche Striche der Skalierung werden genutzt?
Eine Position ist am Zahlenstrahl markiert. Wie findest du heraus, welche Zahl das ist? Gibt es noch andere Möglichkeiten, sie zu bestimmen?	▪ Werden die Stellenwerte richtig zugeordnet? Müssen zusätzliche Skalierungsstriche eingefügt werden? Kann die Zahl ungefähr angegeben werden?
	▪ Wie flexibel ist die Schülerin / der Schüler, z. B. Beziehungen zur 100 oder 90 zu nutzen? Werden die Fünfer in der Skalierung genutzt oder alles gezählt? Wo beginnt der Zählprozess (bei 0 oder bei 1)?
Kannst du den Weg zur Zahl mit Plus- und Minusaufgaben beschreiben?	▪ Kann die Schülerin / der Schüler das Finden der Zahl 0,85 über „1 – 0,1 = 0,9 dann 0,9 – 0,05 = 0,85“ beschreiben? ▪ Welche Zahlen werden genutzt? In welchen Stellenwerten werden die Rechnungen beschrieben (ein Zehntel oder 10 Hundertstel zurück).
Finden der 1	▪ Die 0 und ein (Dezimal-) Bruch sind am Zahlenstrahl eingezeichnet. Wie kann die 1 gefunden werden?

Tabelle III.11-9: Fördervorschläge (OR, Niveaustufe D)

Ziel	Förderung
Zahlenstrahl kennenlernen	▪ Klären der Markierungen. Müssen andere/weitere Markierungen eingezeichnet werden, um die Zahl darzustellen? ▪ Wo ist die 1, wo ist die 0? Welche Zahlen liegen an den mittelgroßen Markierungen? Etc.
Zahlen ordinal darstellen und auffassen	▪ Zahlen (in Wort und Symbol) werden einem großen Zahlenstrahl zugeordnet. Wichtig sind die Dokumentation von verschiedenen Wegen und die Diskussion, welche Wege besonders effektiv sind. Welche Einteilung wird hergestellt und wie wird diese zur Zahldarstellung/Auffassung genutzt? ▪ Beschreibung der Wege „zur Zahl" mit Additions- und Subtraktionstermen
Unterteilungen am Zahlenstrahl verfeinern	▪ Wie kann vorgegangen werden, wenn nur Zehntel im Zahlenstrahl eingezeichnet sind, aber die Zahl 0,27 eingezeichnet werden soll?
Ungefähres Einzeichnen am Zahlenstrahl	▪ Begründetes Verorten von Zahlen zwischen Markierungen mit Begründungen (0,68 ist näher an 0,5 als an 1, WEIL … bzw. 0,68 ist näher an 0,7 als an 0,6 WEIL …)
Schließen vom Anteil auf die Einheit	▪ Ein Bruch und die Zahl Null sind am Zahlenstrahl eingetragen. Wie kann die 1 bestimmt werden?
Typische Fehler kennenlernen und überwinden	▪ Wenn ein Zahlenstrahl zwischen 0 und 1 nur in 5 Teile unterteilt ist – wie kann vorgegangen werden, um 0,3 einzuzeichnen? An welchen Zahlen kann eine Orientierung stattfinden? Wo müsste 0,35 eingezeichnet werden? Ist 0,35 links oder rechts von 0,3?

Literatur zum Weiterlesen:

Padberg, F., & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung*. Heidelberg: Spektrum, S. 171 ff.

Prediger, S., & Schink, A. (2013). Verstehens- und strukturorientiertes Üben am Beispiel des Brüchespiels ‚Fang das Bild'. In H. Allmendinger, K. Lengnink, A. Vohns, & G. Wickel (Hrsg.), *Mathematik verständlich unterrichten* (S. 11-26). Wiesbaden: Springer Fachmedien.

11.4 ZAHLEN IN BEZIEHUNG ZU ANDEREN ZAHLEN SETZEN (ZB)

Zu einem tragfähigen Zahlverständnis gehört unter anderem die Fähigkeit, sicher zwischen verschiedenen Darstellungsebenen der Zahl wechseln zu können (vgl. Teil III, Kap. 10.1). Darüber hinaus kann von einem tragfähigen Zahlverständnis ausgegangen werden, wenn Zahlen in ihrer Beziehung zu anderen Zahlen gedeutet und ggf. auch ohne bewussten Wechsel der Darstellungsebenen interpretiert werden können. Dieses Denken in Zahlbeziehungen wird vor allem in größeren Zahlenräumen relevant, in denen Veranschaulichungen (bis auf den Zahlenstrahl) zu unübersichtlich werden.

Probleme beim Verstehen von Zahlen in Beziehung zu anderen Zahlen können dazu führen, dass Rechenstrategien nicht entwickelt werden und Rechengesetze nicht verstanden oder genutzt werden können.

Fehlvorstellungen wie „Komma-trennt“ (0,3 < 0,25 da 3 < 25) oder „Komma als Bruchstrich“ (0,4 = $\frac{1}{4}$) laufen einer tragfähigen Zahlvorstellung zuwider. Sie werden insbesondere deutlich, wenn Zahlbeziehungen genutzt werden sollen.

Ausgabe:
Die Ausgabe des Förderinhaltes ZB (Zahlen in Beziehung zu anderen Zahlen setzen) erfolgt auf der Analyse der Aufgaben „Zahlvergleich“, „Zwischenzahl“ und „Zahlenfolge“. Bei diesen Aufgaben sollen Zahlen in Bruch- und Dezimalschreibweise verglichen, Zahlenreihen fortgesetzt und Zahlen zwischen gegebenen Zahlen angegeben werden. Der Förderinhalt wird ausgegeben, wenn zehn oder mehr von den 13 Items falsch gelöst wurden.

Tabelle III.11-10: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes ZB (Niveaustufe D)

Anzahl falsch:	0-1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12-13	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (ZB)	6 %	5 %	7 %	5 %	5 %	7 %	9 %	11 %	10 %	11 %	9 %	15 %	502
Bewertung	Unauffällig: 65 %									Auffällig: 35 %			

Ergänzende prozessorientierte Diagnose und Fördervorschläge

Tabelle III.11-11: Ergänzende prozessorientierte Diagnose (ZB, Niveaustufe D)

Aufgabe	Beobachtungen
Beschreibe, wie du die Zahlen 0,4 und 0,35 vergleichst.	▪ Werden die Stellenwerte zur Begründung herangezogen? Wird die Komma-trennt-Fehlvorstellung aktiviert?
Wie kannst du die Zahlen am Arbeitsmittel darstellen und an ihm vergleichen?	▪ Wie werden die Brüche am Zahlenstrahl/Rechteckmodell eingezeichnet? Über welche Strategien können die Zahlen am Arbeitsmittel verglichen werden?
Begründe, welche Zahl größer ist: $\frac{1}{7}$ oder $\frac{1}{8}$.	▪ Werden die Zahlen über den gleichen Zähler verglichen und anschaulich begründet, welche größer ist, oder nach einem (unverstandenen) Schema (z. B. Ermittlung des Hauptnenners)?
Wie vergleichst du die Zahlen 0,5 und $\frac{1}{5}$?	▪ Ist die Bedeutung des Bruchstrichs und des Dezimalkommas klar und können diese beschrieben werden?
Gibt es zwischen 0,2 und 0,3 weitere Zahlen? Wie kannst du welche finden?	▪ Ist der strukturelle Aufbau des Bereichs der Bruchzahlen klar und können Unterteilungen so verfeinert (Nenner so erweitert) werden, dass weitere Zahlen gefunden werden?
Wie ist das bei $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{5}$?	

Tabelle III.11-12: Fördervorschläge (ZB, Niveaustufe D)

Ziel	Förderung
Strategien zum Vergleichen von Brüchen erarbeiten	▪ Zahlenpaare vorgeben und entscheiden, über welche Strategie diese am schnellsten (anschaulich) verglichen werden können: ▪ $\frac{2}{5}$ und $\frac{2}{7}$ über gleiche Zähler ▪ $\frac{5}{6}$ und $\frac{6}{7}$ über die Nähe zur 1 ▪ $\frac{5}{12}$ und $\frac{2}{3}$ über die Zwischenzahl $\frac{1}{2}$
Strategien zum Vergleichen von Dezimalbrüchen erarbeiten	▪ Der Vergleich von Dezimalbrüchen mit gleich vielen Nachkommastellen ist trivial oder unterstützend für Fehlvorstellungen. Es müssen also Zahlen mit unterschiedlich vielen Nachkommastellen verglichen werden – am besten durch Notation an Arbeitsmitteln (Zahlenstrahl/Rechteckmodell).
Zahlengleiche Brüche finden	▪ Finde mit Ziffernkärtchen von 1 bis 9 wertgleiche Zahlenpaare (z. B. $\frac{3}{6} = \frac{4}{8}$).
Dichtheit des Zahlbereichs kennenlernen	▪ In den Zahlenstrahl „hineinzoomen“ und bei Zahlenpaaren gemeinsame bzw. verfeinerte Unterteilungen finden. ▪ Gezieltes Gegenüberstellen der Eigenschaften natürlicher und positiver rationaler Zahlen

Literatur zum Weiterlesen:

Grassmann, M. (1995). Immer wieder Brüche. *Mathematik in der Schule*, *33 (5)*, 267-278.

Padberg, F., & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung*. Heidelberg: Spektrum, S. 55 ff., 195 ff., 207 ff.

Prediger, S. (2011). Vorstellungsentwicklungsprozesse initiieren und untersuchen: Einblicke in einen Forschungsansatz am Beispiel Vergleich und Gleichwertigkeit von Brüchen in der Streifentafel. *Der Mathematikunterricht*, *57 (3)*, 5-14.

Prediger, S., Selter, C., Hußmann, S., & Nührenbörger, M. (Hrsg.). (2014). *Mathe sicher können: Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen* (1. Aufl.). Berlin: Cornelsen, S. 47 ff., 73 ff., 113 ff., 122 ff.

Schink, A. (2013). Strukturelle Zusammenhänge zwischen Teil, Anteil und Ganzem: Herausforderungen und Ressourcen beim flexiblen Umgang mit Brüchen nutzen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *55 (52)*, 15-19.

Schink, A., & Meyer, M. (2013). Teile vom Ganzen: Brüche beziehungsreich verstehen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *55 (52)*, 2-8.

11.5 GRUNDVORSTELLUNGEN ZU RECHENOPERATIONEN AUFBAUEN (GV)

Die Bedeutung der Rechenoperationen ist zentral – insbesondere auch bei der Verwendung von technischen Hilfsmitteln (Taschenrechnern) – in Alltagskontexten. Die Entscheidung, mit welchem Rechenzeichen die Zahlen einer Problemstellung verknüpft werden müssen, geschieht auf der Grundlage der Aktivierung von Operationsvorstellungen.

Ein besonderes Merkmal der Grundvorstellungen zu den Rechenoperationen bei Brüchen ist, dass zwar die Addition und Subtraktion nach wie vor als Hinzufügen und Zusammenfassen bzw. Wegnehmen und Unterschied bestimmen interpretiert werden kann. Nicht mehr tragfähig sind jedoch die Grundvorstellungen zur Multiplikation als Vervielfachen und die der Division als Verteilen. Bei diesen Operationen führen diese (bei natürlichen Zahlen tragfähigen)

Modelle nun zu Fehlvorstellungen. Die Multiplikation kann als Anteilbildung und die Division als Aufteilen bzw. Ausmessen tragfähig interpretiert werden.

Können Grundvorstellungen zu den Rechenoperationen nicht aktiviert werden, so ist eine Bearbeitung von Textaufgaben nicht möglich. Besonders problematisch sind Fehlvorstellungen („Multiplizieren vergrößert immer“) oder die Orientierung an Oberflächenmerkmalen im Text wie Signalwörtern („von bedeutet immer mal“, „mehr bedeutet immer plus“).

Ausgabe:
Für den Förderinhalt GV (Grundvorstellungen zu Rechenoperationen aufbauen) werden die Eingaben der Aufgaben „Operationsbild“ und „Textaufgaben“ analysiert. Wenn von den 18 Items zehn oder mehr falsch gelöst wurden, wird der Förderinhalt ausgegeben.

Zu beachten ist, dass der Förderinhalt nicht ausgegeben wird, wenn die Schülerin bzw. der Schüler weniger als zehn Fehler macht. Auch das wird als problematisch erachtet, da in Alltagssituationen elementare Schwierigkeiten zu erwarten sind.

Tabelle III.11-13: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes GV (Niveaustufe D)

Anzahl falsch:	0-5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16-18	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (GV)	4 %	4 %	6 %	9 %	10 %	12 %	11 %	11 %	10 %	8 %	7 %	8 %	1006
Bewertung	Unauffällig: 33 %					Auffällig: 67 %							

Bei diesem Inhalt weicht die Minimalzahl der Fehler für die Ausgabe des Förderinhaltes von der Regelung „mehr als eine halbe Standardabweichung über dem Mittelwert der Normierungsstichprobe“ ab. Nach dieser Regelung müsste eine Schülerin oder ein Schüler bei den 18 Items mindestens zwölf Fehler machen, um als auffällig zu gelten. Operationsvorstellungen sind jedoch die Grundlage für ein verständnisorientiertes Mathematiklernen, insbesondere in Alltagssituationen, sodass der Cut-off-Wert bei der Hälfte der gestellten Items festgelegt wurde.

Ergänzende prozessorientierte Diagnose und Fördervorschläge

Tabelle III.11-14: Ergänzende prozessorientierte Diagnose (GV, Niveaustufe D)

Aufgabe	Beobachtungen
Textaufgabe zur Anteilbildung: Ich spende $\frac{1}{5}$ von 400 € – also wie viel? Erkläre, warum du so rechnest. Kannst du eine Skizze machen?	▪ Warum wird welche Rechenoperation ausgewählt? ▪ Können Modelle (z. B. Rechteckmodell) zur Bearbeitung der Aufgabe herangezogen werden? Ist die Zahlvorstellung korrekt? Wird die Situation im Bild richtig dargestellt? Wird die Operation im Bild richtig gedeutet?
Kann das Ergebnis richtig sein?	▪ Über welche Strategien (Umkehrrechnung, Überschlagen, alternativer Weg) kann das Ergebnis validiert werden?
Welche Rechnung(en) passen zu diesem Bild (bildlich dargestelltes Modell zu $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$)? Wie kann das Ergebnis gesehen werden?	▪ Können Rechenoperationen in Modellen erkannt werden? Wie werden diese von anderen Rechnungen abgegrenzt? Können Zahlvorstellungen sicher aktiviert werden? ▪ Können Bezüge zu Textaufgaben hergestellt werden?

Erfinde eine Rechengeschichte zu 0,3 · 0,5 und zu 2 : $\frac{1}{4}$. Zeichne ein Bild zu dem Rechenausdruck	▪ Welche Modelle können zur Rechenoperation aktiviert werden? ▪ Kann das Ergebnis am Bild gezeigt und begründet werden? ▪ Kann der Zusammenhang zwischen Term und Bild bzw. der Zusammenhang zwischen Bild und Textaufgabe hergestellt werden?

Tabelle III.11-15: Fördervorschläge (GV, Niveaustufe D)

Ziel	Förderung
Modelle zu Rechenoperationen herstellen und kennen	▪ Bildliche Darstellungen zu den vier Grundrechenarten diskutieren (Wo sind die erste Zahl, die zweite Zahl und das Ergebnis dargestellt?) ▪ Im Rahmen dieser Diskussion wird nicht auf Rechenstrategien eingegangen – es geht „nur“ um die Bedeutung der Operation.
Textaufgaben mit Modellen verknüpfen	▪ Welches Bild passt zu der Textaufgabe? Wie muss das Bild geändert werden, damit die Zahlen passen? Wie kann das Ergebnis im Bild gesehen werden?
Skizzen zu Textaufgaben anfertigen	▪ Zu Textaufgaben Skizzen auf der Grundlage der erarbeiteten Modelle herstellen. Bedeutung der Zahlen klären
Grundvorstellungen zu Rechenoperationen aktivieren	▪ Textaufgaben mit dem Taschenrechner berechnen und Rechenausdruck dokumentieren und diskutieren
Fehlvorstellungen gezielt aufgreifen	▪ Was stelle ich mir bei „Geteilt“ vor – was ist anders als bei natürlichen Zahlen? Warum kann das Ergebnis bei einer Divisionsaufgabe größer sein als die Zahlen im Rechenausdruck? Wie muss ich mir Malnehmen vorstellen, wenn das Ergebnis kleiner werden soll (Modell, z. B: Kopierer, der um den Faktor · 0,7 verkleinert)?

Literatur zum Weiterlesen:

Glade, M., & Schink, A. (2011). Vom Anteile bestimmen zur Multiplikation von Brüchen: Ein Weg mit System: Fortschreitende Schematisierung. *Mathematik lehren, 164*, 43-47.

Padberg, F., & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung*. Heidelberg: Spektrum, S. 73 ff., 108 ff., 133 ff., 215 ff., 251 ff.

Prediger, S. (2004). Brüche bei den Brüchen – angreifen oder umschiffen? *Mathematik lehren, 123*, 10-13.

Prediger, S. (2006). Vorstellungen zum Operieren mit Brüchen entwickeln und erheben: Vorschläge für vorstellungsorientierte Zugänge und diagnostische Aufgaben. *Praxis der Mathematik in der Schule, 11*, 8-12.

11.6 TRAGFÄHIGE STRATEGIEN ZUR ADDITION UND SUBTRAKTION NUTZEN (PM)

Die Durchführung von Addition und Subtraktion bei Brüchen (insbesondere in Dezimalschreibweise) ist unverzichtbarer Bestandteil der Kompetenzen zum Umgang mit diesen Zahlen. Die Strategien bei Zahlen in Bruchschreibweise unterscheiden sich deutlich zu denen natürlicher Zahlen, da vor der eigentlichen Addition und Subtraktion der Anteile in der Regel „Vorarbeiten" nötig sind. Diese Vorarbeit besteht im Verfeinern der Anteile auf eine gemeinsame Unterteilung. Bei Dezimalbrüchen sind hingegen alle Strategien der natürlichen Zahlen (Schrittweise, Stellenweise, gleich-/gegensinniges Verändern, Nutzen von Hilfsaufgaben) weiterhin tragfähig. Eine Schwierigkeit kann hier ein mangelhaft ausgebildetes Stellenwertverständnis darstellen.

Sind keine tragfähigen Strategien zur Addition und Subtraktion aufgebaut, so besteht die Gefahr, dass die Zahlen nach unverstandenen Regeln und Tricks verknüpft werden. Hierdurch werden keine Grundvorstellungen zu den Zahlen und den Rechenzeichen aktiviert. Dies wirkt sich ungünstig auf Kompetenzen zum Interpretieren von Ergebnissen sowie zum Überschlagen und Schätzen aus.

Ausgabe:
Zur Untersuchung dieses Förderinhaltes werden drei Rechenaufgaben (zwei in Bruch- und eine in Dezimalschreibweise) untersucht. Der Hinweis wird ausgegeben, wenn zwei oder alle davon falsch berechnet wurden.

Tabelle III.11-16: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes PM (Niveaustufe D)

Anzahl falsch:	0	1	2	3	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (PM)	16 %	13 %	53 %	18 %	607
Bewertung	Unauffällig: 29 %		Auffällig: 71 %		

Bei diesem Inhalt weicht die Minimalzahl der Fehler für die Ausgabe des Förderinhaltes von der Regelung „mehr als eine halbe Standardabweichung über dem Mittelwert der Normierungsstichprobe" ab. Nach dieser Regelung müsste eine Schülerin oder ein Schüler bei den drei Items mindestens zwei Fehler haben, um als auffällig zu gelten. Addition und Subtraktion von Zahlen über Kopfrechenstrategien sind jedoch die Grundlage für ein verständnisorientiertes Mathematiklernen, insbesondere in Alltagssituationen, sodass der Cut-off-Wert bei der Hälfte der gestellten Items festgelegt wurde.

Ergänzende prozessorientierte Diagnose und Fördervorschläge

Tabelle III.11-17: Ergänzende prozessorientierte Diagnose (PM, Niveaustufe D)

Aufgabe	Beobachtungen
Wie rechnest du $\frac{1}{4}+\frac{3}{8}$?	▪ Werden die Aufgaben schematisch (Hauptnenner ...) berechnet oder können Vorstellungen aktiviert werden?
Beschreibe, wie du $1-\frac{1}{5}$ rechnest.	▪ Kann die Rechnung am Modell (Rechteck) beschrieben werden? ▪ Kann der Rechenweg an einem konkret vorgelegten Modell gezeigt werden?
Beschreibe Rechenwege für 2,99 + 1,9.	▪ Werden die Aufgaben schematisch (schriftlicher Algorithmus) oder auf der Grundlage von Zahlvorstellungen (Hilfsaufgabe) gelöst?
Wie kann 2,1 – 1,99 gerechnet werden?	▪ Ist bei Hilfsaufgaben klar, wie die Kompensation geschieht (2,1 – 2 und anschließend plus 0,01 oder minus 0,01)?
Zeige am Rechenstrich, wie 2,7 – 0,99 gerechnet werden kann.	▪ Können Rechenstrategien mit Zahlen am Arbeitsmittel dargestellt werden? Werden die Zahlen richtig eingezeichnet? ▪ Wird die Operation richtig dargestellt?
Zeige am Rechteckmodell, wie $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}$ gerechnet wird. Wie groß ist das Ergebnis ungefähr?	▪ Kann am Rechteckmodell eine passende gemeinsame Unterteilung (hier: z. B. 5 Spalten und 3 Zeilen) gewählt werden, um beide Anteile einzeichnen zu können? Werden die Zahlen korrekt dargestellt (auch in der verfeinerten Unterteilung)?

Tabelle III.11-18: Fördervorschläge (PM, Niveaustufe D)

Ziel	Förderung
Strategien zur Addition und Subtraktion von Brüchen verstehen und darstellen	▪ Durch Falten von rechteckigen Papieren bzw. Einzeichnen von Unterteilungen die Idee der gemeinsamen Unterteilung (Hauptnenner) erarbeiten. Färben der Anteile in der verfeinerten Unterteilung und Betrachtung des Gesamtanteils (Addition) bzw. des Unterschieds (Subtraktion)
Strategien zur Addition und Subtraktion von Dezimalbrüchen verstehen und darstellen	▪ Am Rechenstrich verschiedene Strategien zur Berechnung und Dokumentation von Rechentermen beschreiben. Hierbei ist der Zusammenhang zwischen den Stellenwerten eine zentrale Voraussetzung. Vor allem Terme besprechen, bei denen die Zahlen eine unterschiedliche Anzahl an Nachkommastellen haben
Ergebnisse reflektieren und überschlagen	▪ Sortieren von Termen (ohne auszurechnen) und begründen: Ist das Ergebnis kleiner als 1 oder größer? Ist es kleiner als $\frac{1}{2}$ oder größer? ▪ Markiere alle Aufgaben (erfinde Aufgaben), bei denen das Ergebnis zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegt.
Fehlerstrategien aufgreifen und diskutieren	▪ $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2}{5}$ oder 0,2 + 0,34 = 0,36 ▪ Wie kann man schnell sehen, dass die Aufgaben falsch ausgerechnet wurden? Wie hat die Schülerin / der Schüler gerechnet und was hat sie/er falsch verstanden? Wie kannst du erklären, worauf zu achten ist?

Literatur zum Weiterlesen:

Hußmann, S., & Prediger, S. (2007). Mit Unterschieden rechnen: Differenzieren und Individualisieren. *Praxis der Mathematik in der Schule, 49 (17)*, 1-8.

Marxer, M., & Wittmann, G. (2013). Auch Dezimalbrüche sind Brüche: Mit Dezimalbrüchen flexibel rechnen, um ihre Eigenschaften zu verstehen. *Praxis der Mathematik in der Schule, 55 (52)*, 30-34.

Padberg, F., & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung*. Heidelberg: Spektrum, S. 78 ff., 217 ff.

Prediger, S., Selter, C., Hußmann, S., & Nührenbörger, M. (Hrsg.). (2014). *Mathe sicher können: Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen* (1. Aufl.). Berlin: Cornelsen, S. 91 ff., 128 ff.

Scherres, C. (2009). Warum habt ihr ausgerechnet in 7/7 umgewandelt? Strategiekonferenzen über Vorgehensweisen zur Addition und Subtraktion mit Brüchen und Dezimalzahlen. *Praxis der Mathematik in der Schule, 27*, 15-21.

11.7 TRAGFÄHIGE STRATEGIEN ZUR MULTIPLIKATION UND DIVISION NUTZEN (MD)

Tragfähige Strategien zur Lösung von Multiplikations- und Divisionsaufgaben nehmen Zahlen (und nicht Ziffern) in Gebrauch. Somit tragen sie zur Vertiefung von Zahl- und Operationsvorstellungen bei und ermöglichen es den Lernenden im Alltags- und Berufsleben, dass sie beim genauen und überschlagenden Rechnen auf Zahlbeziehungen und Operationseigenschaften zurückgreifen können.

Sind keine tragfähigen Rechenstrategien aufgebaut, so werden Zahlen häufig nur als Ziffernkombinationen betrachtet und können häufig nur mit Algorithmen verrechnet werden. Die negative Folge kann sein, dass auch in realitätsnahen Kontexten (z. B. beim Schätzen von Ergebnissen) keine Zahlvorstellungen aktiviert werden können.

Ausgabe:

Zur Untersuchung dieses Förderinhaltes werden sieben Rechenaufgaben (zwei in Bruch- und fünf in Dezimalschreibweise) zu Brüchen untersucht. Wenn vier oder mehr Items falsch gelöst wurden, erscheint der Förderinhalt.

Tabelle III.11-19: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes MD (Niveaustufe D)

Anzahl falsch:	0	1	2	3	4	5	6	7	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (MD)	3 %	6 %	6 %	7 %	16 %	25 %	21 %	16 %	391
Bewertung	Unauffällig: 22 %				Auffällig: 78 %				

Bei diesem Inhalt weicht die Minimalzahl der Fehler für die Ausgabe des Förderinhaltes von der Regelung „mehr als eine halbe Standardabweichung über dem Mittelwert der Normierungsstichprobe“ ab. Nach dieser Regelung müsste ein Lernender bei den sieben Items mindestens fünf Fehler machen, um als auffällig zu gelten. Multiplikation und Division auf der Grundlage von Zahlvorstellungen sind jedoch die Grundlage für ein verständnisorientiertes Mathematiklernen, insbesondere in Alltagssituationen, sodass der Cut-off-Wert bei der Hälfte der gestellten Items festgelegt wurde.

Ergänzende prozessorientierte Diagnose und Fördervorschläge

Tabelle III.11-20: Ergänzende prozessorientierte Diagnose (MD, Niveaustufe D)

Aufgabe	Beobachtungen
Wie rechnest du $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}$? Wie rechnest du $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$?	▪ Werden die Terme schematisch berechnet oder können Vorstellungen zu Zahlen und der Operation aktiviert werden?
Wie rechnest du 0,25 · 0,8? Wie rechnest du 0,2 : 0,4?	▪ Kann der Rechenweg begründet werden und wird das Ergebnis reflektiert (Kann das sein?)?
Beschreibe deinen Rechenweg bei 0,04 · 100 und bei 0,4 : 10.	▪ Können die Zusammenhänge im Stellenwertsystem genutzt werden oder werden auch diese Rechenausdrücke schematisch berechnet?
Wie rechnest du 5 : 20?	▪ Ist die Rolle von Divisor und Dividend klar? Wird eine „falsche Tauschaufgabe“ 20 : 5 berechnet?
Kannst du zu den Aufgaben eine Skizze anfertigen? Kannst du zu den Aufgaben eine Textaufgabe erzählen?	▪ Können die Aufgaben am Rechteckmodell gezeigt werden? Können die Aufgaben (insbesondere bei Dezimalbrüchen) in Kontexten (z. B. Geld oder Längen) betrachtet werden und so Ergebnisse eingeschätzt werden?
Wie groß ist das Ergebnis der Aufgabe ungefähr? Wie schätzt du das Ergebnis der Aufgabe ein?	▪ Werden zur Einordnung von Ergebnissen Fehlvorstellungen („Multiplizieren vergrößert immer“, „Dividieren verkleinert immer“) oder Grundvorstellungen (Anteilbildung für Multiplikation und Ausmessen für Division) aktiviert?

Tabelle III.11-21: Fördervorschläge (MD, Niveaustufe D)

Ziel	Förderung
Rechenstrategien zur Multiplikation verstehen	▪ Am Rechteckmodell das Einzeichnen von Multiplikationstermen besprechen: Wo siehst du das Ergebnis? Warum ist es oft kleiner als beide Faktoren? ▪ Bei Dezimalbrüchen klären: Zehntel von Zehnteln sind Hundertstel …
Rechenstrategien zur Division verstehen	▪ Nicht „Kommaverschieben“, sondern gleichsinniges Verändern (40 : 8 = 4 : 0,8) im Ausmess-Kontext diskutieren. Bei Dezimalbrüchen Zusammenhänge im Stellenwertsystem klären: 4 : 100 = 4 Hundertstel = $\frac{4}{100}$ = 0,04
Rechenterme in Modelle übersetzen	▪ Terme an Rechteckmodellen darstellen – wie einzeichnen? Wo ist das Ergebnis zu sehen?
Ergebnisse hinterfragen	▪ Auf Zahl- und Operationsvorstellungen zurückgreifen, um zu erklären, warum z. B. das Ergebnis von 0,4 : 0,2 größer als 1 sein muss. Übersetzen in Kontexte mit Größen: 0,4 Liter Saft ist da, ein Becher fasst 0,2 Liter. Wie viele Becher sind das? ▪ Wann ist das Ergebnis einer Division größer als der Dividend? Warum ist das so?

Fehlerstrategien thematisieren	▪ Betrachte die Terme 2,4 · 0,3 = 6,12 oder 0,6 : 0,2 = 0,3. ▪ Wie kann man schnell erkennen, dass das falsch ist? Warum ist der Fehler entstanden? Worauf muss geachtet werden, damit der Fehler vermieden wird?

Literatur zum Weiterlesen:

Besuden, H. (1998). *Arbeitsmappe: Verwendung von Arbeitsmitteln für die anschauliche Bruchrechnung*. Osnabrück: Wenner.

Besuden, H. (1999). Warum mit dem Kehrbruch malnehmen? *Mathematik in der Schule*, *37 (1)*, 6-9.

Glade, M., & Schink, A. (2011). Vom Anteile bestimmen zur Multiplikation von Brüchen: Ein Weg mit System: Fortschreitende Schematisierung. *Mathematik lehren, 164*, 43-47.

Marxer, M., & Wittmann, G. (2011). Förderung des Zahlenblicks: Mit Brüchen rechnen, um ihre Eigenschaften zu verstehen. *Der Mathematikunterricht*, *57 (3)*, 26-36.

Padberg, F., & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung*. Heidelberg: Spektrum, S. 110 ff., 133 ff., 236 ff., 252 ff.

Prediger, S., Glade, M., & Schmidt, U. (2011). Wozu rechnen wir mit Anteilen? *Praxis der Mathematik in der Schule*, *52*, 37.

Prediger, S., Krägeloh, N., & Wessel, L. (2013). Wieso $\frac{3}{4}$ von 20, und wo ist der Kreis? Brüche für Teile von Mengen handlungsorientiert und operativ erarbeiten. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *55 (52)*, 9-14.

Prediger, S., Selter, C., Hußmann, S., & Nührenbörger, M. (Hrsg.). (2014). *Mathe sicher können: Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen* (1. Aufl.). Berlin: Cornelsen, S. 139 ff.

Schink, A., & Meyer, M. (2013). Teile vom Ganzen: Brüche beziehungsreich verstehen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *55 (52)*, 2-8.

Thiemann, K. (2004). Problematische Schülervorstellungen bei der Multiplikation und Division von Dezimalbrüchen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *46 (1)*, 1-5.

Wartha, S. (2007). Verständnis entwickeln: Diagnose von Grund- und Fehlvorstellungen bei Bruchzahlen. *Mathematik lehren, 142*, 24-26, 43-44.

11.8 GEOMETRISCHE OBJEKTE, IHRE EIGENSCHAFTEN UND BEZIEHUNGEN ANHAND VON BESCHREIBUNGEN UND GRAFIKEN ERKENNEN UND BENENNEN (BE)

Geometrische Begriffe beschreiben die Einteilung ebener und räumlicher Objekte. „Wir sprechen von einem Begriff, wenn damit nicht nur ein einzelner Gegenstand [...] bezeichnet wird, sondern eine Kategorie, eine Klasse assoziiert wird, in die der konkrete Gegenstand einzuordnen ist.“ (Franke, 2001, S. 72).

Im geometrischen Kontext können Objekte, Eigenschaften und Relationen in Begriffsklassen beschrieben werden (Franke & Reinhold, 2016, S. 126). Hierbei sind

- Objektbegriffe, z. B., Quadrat, Würfel, Prisma, Raute, Pyramide, Scheitelwinkel,
- Eigenschaftsbegriffe, z. B. quadratisch, rechtwinklig, parallel, gleichschenklig, gleichseitig, drehsymmetrisch,
- Relationsbegriffe, z. B. gleich lang, senkrecht auf, parallel zu, deckungsgleich mit.

Charakteristisch für die Begriffsbildung ist die Organisation der Begriffe in hierarchische Beziehungen (Breidenbach, 1964).

Das Begriffsverständnis kann in Stufen unterteilt werden (Franke & Reinhold, 2016, S. 130; Weigand, 2014, S. 120):

- *Intuitives Begriffsverständnis:* Orientierung an Prototypen, Beispiele und Gegenbeispiele können intuitiv identifiziert werden.
- *Inhaltliches Begriffsverständnis:* Eigenschaften und Beziehungen werden zur Identifikation, Beschreibung und Konstruktion genutzt.
- *Integriertes Begriffsverständnis:* Beziehungen zwischen Begriffen werden hergestellt, es entsteht ein Begriffsnetz, Ober- und Unter- und nebengeordnete Begriffe können am konkreten Beispiel in Beziehung gesetzt werden (Beispiel: „Haus der Vierecke").
- *Formales Begriffsverständnis:* Begriffsklärung über formale Definitionen, Repräsentanten müssen zur Identifikation von Zusammenhängen und Beziehungen nicht mehr vorliegen.

Auf der Niveaustufe D wird im Bereich „Geometrische Körper und Figuren" und in den Bereichen „Symmetrien und Winkelbeziehungen" ein mindestens integriertes Begriffsverständnis erwartet. Das formale Begriffsverständnis sollte in Ansätzen angebahnt sein. Auch die grundlegenden Eigenschafts- und Relationsbegriffe sollten auf diesem Niveau verstanden sein.

Ohne ein Begriffsverständnis ist eine Kommunikation über geometrische Objekte nicht zielführend (Hasemann & Gasteiger, 2014, S. 176-178). Auch sind zahlreiche Begriffe grundlegend für die Begriffsbildung weiterer geometrischer Objekte. Insbesondere werden Körper und Figuren häufig durch die Eigenschaften und Beziehungen ihrer Begrenzungsflächen und -seiten beschrieben.

Ausgabe:
Grundlage für die Ausgabe des Förderinhaltes sind alle Aufgaben, bei denen Körper benannt bzw. aufgrund ihrer Umschreibung identifiziert werden müssen (11 Items). Auch das Identifizieren von Eigenschaften von Dreiecken (5 Items) ist Grundlage für diesen Förderinhalt, ebenso wie die Kenntnis von Winkelbezeichnungen (z. B. Scheitelwinkel) und deren Beziehungen (z. B. „sind immer gleich groß") (6 Items).

Der Förderinhalt wird ausgegeben, wenn mehr als 13 Items falsch gelöst werden.

Tabelle III.11-22: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes BE (Niveaustufe D)

Anzahl falsch:	0-5	6-8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18-22	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (BE)	6 %	14 %	7 %	10 %	11 %	11 %	10 %	9 %	7 %	6 %	4 %	5 %	872
Bewertung	Unauffällig: 69 %							Auffällig: 31 %					

Ergänzende prozessorientierte Diagnose und Fördervorschläge

Tabelle III.11-23: Ergänzende prozessorientierte Diagnose (BE, Niveaustufe D)

Aufgabe	Beobachtungen
Konkrete Körper vorlegen: Welche Körper sind ein Prisma? Ein Zylinder? Eine Pyramide? Ein Quader? ... Begründe. Abbildungen von Körpern vorlegen: Auf welchen Abbildungen siehst du ein Prisma? Einen Zylinder? Eine Pyramide? Einen Quader? ... Begründe. Auf Körper/Abbildungen deuten: Wie heißt dieser Körper? Begründe.	▪ Kann die Schülerin / der Schüler die verschiedenen geometrischen Körper erkennen und ihre/seine Auswahl erklären? ▪ Werden relevante Eigenschaften und Relationen zur Erklärung genutzt oder wird mit „dem Aussehen“ argumentiert?“ ▪ Werden die hierarchischen Beziehungen berücksichtigt (auch Würfel sind Quader sind Prismen)? ▪ Werden die Objekte auch erkannt, wenn sie nicht prototypisch sind/liegen? ▪ Werden dreidimensionale Objekte (Würfel) mit Begriffen von zweidimensionalen Objekten (Quadrat) bezeichnet?
Verschiedene Dreiecke vorlegen: Welches Dreieck ist rechtwinklig, gleichschenklig, gleichseitig ...? Woran erkennst du das? Welche Eigenschaften hat dieses Dreieck? Begründe. Skizziere ein rechtwinkliges /ein gleichschenkliges Dreieck.	▪ Können die Begriffe richtig zugeordnet werden oder werden sie vertauscht? Welche Begriffe werden vertauscht, welche sind sicher? ▪ Wird dabei mit „dem Aussehen“ argumentiert oder mit geometrischem Vokabular (z. B. alle/zwei Seiten gleich lang, rechter Winkel, senkrecht)? ▪ Können mehrere Eigenschaften gleichzeitig identifiziert werden? ▪ Ist dem Schüler / der Schülerin klar, dass ein Objekt mehrere Eigenschaften gleichzeitig aufweisen kann? ▪ Können auch nicht prototypische Dreiecke identifiziert werden (z. B. sehr „flache“ Dreiecke)?
Abbildungen von geschnittenen Strecken/Parallelen vorlegen: Zeige mir an diesem Bild, was ein Scheitelwinkel/Stufenwinkel/ Nebenwinkel ist. Woher weißt du das? Begründe.	▪ Können die Begriffe richtig zugeordnet werden oder werden sie vertauscht? Welche Begriffe werden vertauscht, welche sind sicher? ▪ Wird zur Erklärung geometrisches Vokabular genutzt?

Tabelle III.11-24: Fördervorschläge (BE, Niveaustufe D)

Ziel	Förderung
Abstrahieren von Eigenschaften	▪ Sortieren von Objekten (Körper, Dreiecke, Winkel ...) ▪ Beschreiben der Gemeinsamkeiten, nach denen die Sortierung vorgenommen wurde. Zunächst ohne Richtig und Falsch ▪ Aussortieren („eins passt nicht – welches – warum?“) von Objekten ▪ Vergleichen – Vorlegen von zwei Objekten (Gemeinsamkeiten und Unterschiede beschreiben) ▪ Erstellen eines gemeinsamen Begriffswortschatzes, Sammeln und Dokumentieren der relevanten Begriffe mit entsprechend markierten Beispielen (Beispiele: gleichschenklig, Begrenzungsfläche, Prisma, Stufenwinkel, ...) ▪ Erstellen von Begriffsplakaten mit Beispielen (auch nicht typischen) und Gegenbeispielen
Spezifizieren von Objekten	▪ Aus einer Klasse von Objekten (z. B. Prismen) einige mit vorgegebenen Eigenschaften aussortieren (z. B. „rechte Winkel“ oder „alle Begrenzungsflächen sind Rechtecke“) ▪ Prüfen, ob gegebene Objekte bestimmte Eigenschaften erfüllen (durch Spiegeln, Messen, Winkel Überprüfen, Parallelität Überprüfen ...) und Thematisierung, Anwendung und Dokumentation dieser Prüfmethoden ▪ Beschreiben von Gemeinsamkeiten und Unterschieden von vorgegebenen Objekten (z. B. rechtwinkliges Dreieck und nichtrechtwinkliges Dreieck)
Herstellen von Objekten	▪ Bauen, Legen, Falten, Zeichnen, Spannen von vorgegebenen Objekten (z. B. nichtquadratische Trapeze) auf dem Geobrett ▪ Ergänzen von begonnenen Zeichnungen zu einem vorgegebenen Objekt: Worauf musst du achten? ▪ Herstellen von vorgegebenen Formen und Körpern (z. B. als Kantenmodell): Worauf musst du beim Herstellen eines Prismas (Quaders, Trapezes, gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecks, ...) achten?

Objekte aus der Vor-stellung beschreiben	▪ Beschreiben von Prisma, Pyramide, gleichschenkligem Dreieck, Scheitelwinkel (…) aus der Vorstellung
	  ▪ Beschreibe so genau wie möglich.
	  ▪ Nenne nur die wichtigsten Eigenschaften.

Literatur zum Weiterlesen:

Bauer, R. (1997). *Geometrische Körper*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Bettner, M., & Dinges, E. (2010). *Mathe an Stationen: Umgang mit Geodreieck und Zirkel in der Sekundarstufe I.* Donauwörth: Auer.

Bettner, M., & Dinges, E. (2011). *Mathe an Stationen: Umgang mit dem Geobrett in der Sekundarstufe I.* Donauwörth: Auer.

Franke, M., & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie – In der Grundschule* (3. Aufl.). Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum, S. 115-146, 202-212, 248-256.

Evermann, C., & Stoiber, T. (2015). Alles klar im Haus der Vierecke? Schülerfehler und begriffliche Schwierigkeiten beim Klassifizieren von Vierecken. *Mathematik lehren, 32* (191), 13-15.

Kotlenga, A. (2005). *Lernzirkel Geometrische Körper*. Horneburg: Persen.

Ludwig, M., & Weigand, H.-G. (2014). Konstruieren. In H.-G. Weigand (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie in der Sekundarstufe I* (2. Aufl., S. 55-80). Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Neumann, K. (2010). *Mathematik selbst entdecken: Vierecke.* Buxtehude: AOL.

Roth, J., & Wittmann, G. (2014). Ebene Figuren und Körper. In H.-G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth, G. Wittmann (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (S. 123-156). Berlin: Springer Spektrum.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2017). *Handbuch für den Mathematikunterricht: 3. Schuljahr*. Braunschweig: Bildungshaus, S. 132-151.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2018). *Handbuch für den Mathematikunterricht: 4. Schuljahr*. Braunschweig: Bildungshaus, S. 127 ff.

Weigand, H.-G. (2014). Begriffslernen und Begriffslehren. In H.-G. Weigand (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie in der Sekundarstufe I* (2. Aufl., S. 99-122). Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

11.9 EBENE FIGUREN UND KÖRPER AUF SYMMETRIEN UNTERSUCHEN UND CHARAKTERISTISCHE EIGENSCHAFTEN DIESER SYMMETRIEN KENNEN UND NUTZEN (SY)

Die Entwicklung eines Symmetrieverständnisses ist von zentraler Bedeutung. Dies hat vor allem zwei Gründe:

- Die Eigenschaft der Symmetrie kann zahlreiche geometrische Objekte charakterisieren und ist somit zentraler Bestandteil für die Begriffsbildung.
- Die Achsenspiegelung ist die erste und grundlegende Kongruenzabbildung. Alle Kongruenzabbildungen können auf Achsenspiegelungen zurückgeführt werden.

Die Kongruenzabbildungen sind: Achsenspiegelung, Punktspiegelung, Drehungen, Verschiebungen und deren Verkettungen (Schmidt-Thieme & Weigand, 2014, S. 187).

Ein tragfähiges Symmetrieverständnis wird angenommen, wenn die Untersuchung geometrischer Objekte auf Symmetrien und die Durchführung symmetrischer Abbildungen gelingt.

In Niveaustufe D geht es vor allem auch darum, Achsen-, Dreh- und Schubsymmetrie und deren Eigenschaften zu erkennen und voneinander unterscheiden zu können. Darüber hinaus soll an Achsen verschiedener Lage (horizontal, vertikal, schräg) gespiegelt werden.

Ohne Symmetrieverständnis können Objekte nicht sicher auf Symmetrie untersucht werden. Dies ist sehr problematisch für die Objektbegriffsentwicklung. Auch der Zusammenhang zwischen Kongruenzabbildungen und Spiegelungen kann ohne Symmetrieverständnis nicht erkannt und genutzt werden. Ebenso wenig gelingt das Führen von Beweisen unter Nutzung von Symmetrien und Kongruenzen (Schmidt-Thieme & Weigand, 2014, S. 191-194).

Ausgabe:
Grundlage für die Ausgabe des Förderinhaltes sind die fehlerhafte Bearbeitung von Aufgaben, bei denen angegeben werden muss, um welche Art von Abbildung es sich handelt (Dreh-, Schub-, Achsensymmetrie) (10 Items). Beachtet werden auch Fehler beim Herstellen bzw. Ergänzen von achsensymmetrischen Figuren (3 Items). Der Förderinhalt wird ausgegeben, wenn sieben oder mehr der insgesamt 13 Items fehlerhaft bearbeitet werden.

Tabelle III.11-25: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes SY (Niveaustufe D)

Anzahl falsch:	0-1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12-13	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (SY)	1 %	4 %	8 %	11 %	14 %	13 %	16 %	14 %	9 %	6 %	3 %	1 %	904
Bewertung	Unauffällig: 67 %							Auffällig: 33 %					

Ergänzende prozessorientierte Diagnose und Fördervorschläge

Tabelle III.11-26: Ergänzende prozessorientierte Diagnose (SY, Niveaustufe D)

Aufgabe	Beobachtungen

Einfach, mehrfach und nicht symmetrische Figuren und Körper vorlegen:
Sortiere: Symmetrisch oder nicht symmetrisch? Begründe.
Zeichne Spiegelachsen ein.
Beschreibe die Lage der Spiegelebene.
 	
Objekte mit eingezeichneten Geraden vorgeben: Welche Geraden sind Symmetrieachsen (Warum?), welche sind keine (Warum nicht?)?
 	
Wie kannst du herausfinden, ob das Objekt achsen-/ebenensymmetrisch ist?
	▪ Können die Spiegelachse(n)/die Ebene identifiziert werden?
	▪ Wie wird die Symmetrie überprüft bzw. widerlegt:
	  ▪ Werden Figuren konkret oder in der Vorstellung gefaltet?
	  ▪ Wird mit Längen, Abständen und markanten Punkten gearbeitet und argumentiert?
	  ▪ Wird nur mit dem „Aussehen“ argumentiert?
	  ▪ Können in einem mehrfach ebenen-symmetrischen Körper (Würfel, Quader) alle, einige, keine Spiegelebene(n) identifiziert werden?

Dreh-, schub-, achsensymmetrische Figuren vorlegen:
Sortiere:
Welche sind schubsymmetrisch?
Welche sind drehsymmetrisch?
Woher weißt du das?
	▪ Werden Begriffe vertauscht (z. B. Dreh- statt Schubsymmetrie)?
	▪ Wie wird die Symmetrie erkannt bzw. widerlegt:
	  ▪ Wird über mentale Bewegung argumentiert (Drehen oder Schieben)?
	  ▪ Wird über die Eigenschaften der Grundfigur und der Abbildung argumentiert (Kongruenz)?
	  ▪ Wird über Messen und markante Punkte von Grundfigur und Abbildung argumentiert (bei Schub- und Achsensymmetrie)?

Tabelle III.11-27: Fördervorschläge (SY, Niveaustufe D)

Ziel	Förderung
Konstruktionsprinzip von dreh-symmetrischen Figuren und Abbildungen kennen und dreh-symmetrische Figuren und Abbildungen herstellen	▪ Herstellen von drehsymmetrischen Figuren durch das Drehen um einen Drehpunkt: Bemaltes quadratisches Papier an einer Ecke mit einer Stecknadel fixieren, immer um 90 oder 60 Grad drehen. „Veränderung“ des Bildes beschreiben ▪ Herstellen von drehsymmetrischen Figuren durch Falten, Legen, Bauen, Spannen am Geodreieck, Zeichnen auf Rasterpapier ▪ Vervollständigen/Erstellen von Figuren um einen Drehpunkt durch Legen, Spannen am Geodreieck, Zeichnen auf Rasterpapier

Merkmale dreh- und schub-symmetrischer Figuren und Abbildungen kennenlernen	▪ Charakteristische Eigenschaften und Begriffe anschaulich erarbeiten und auf Lernplakaten dokumentieren, z. B.: ▪ Drehsymmetrie: Grundfigur, Drehpunkt, Drehung ▪ Impulse: Markiere die Grundfigur. Wie findest du sie? Markiere den Drehpunkt. Wie findest du ihn? Zeichne die Drehungen ein. ▪ Schubsymmetrie: Grundfigur, gleicher Abstand, gleiche Richtung ▪ Impulse: Markiere die Grundfigur. Wie findest du sie? Zeichne die Abstände ein. Wie gehst du vor?
Ebenensymmetrische Körper herstellen und untersuchen	▪ Würfel-/Quaderbauwerke (oder Bauwerke aus anderen Bausteinen) an einer Spiegelebene bauen (rechts und links einer aufrechten Trennwand aus Pappe) ▪ Dabei auf den gleichen Abstand achten und auf die senkrechte Orientierung zur Spiegelebene ▪ Bauwerke an einem Spiegel bauen und beschreiben (an zwei/drei Spiegeln, die senkrecht zueinander stehen) ▪ Original und Spiegelbild daneben nachbauen und beschreiben ▪ Spiegelebenen in Bauwerke einfügen und begründen
Figuren und Körper auf Symmetrien überprüfen	▪ Ergänzen, kontrollieren und Fehler suchen bei Figuren und Abbildungen: ▪ Sind die Figuren drehsymmetrisch/schubsymmetrisch/achsensymmetrisch? ▪ Woran hast du das erkannt? ▪ Warum sind sie nicht drehsymmetrisch/schubsymmetrisch/achsensymmetrisch? ▪ Ergänzen, kontrollieren und Fehler suchen bei Körpern und deren Abbildungen: ▪ Sind die Körper ebenensymmetrisch? ▪ Woran hast du das erkannt? ▪ Warum sind sie nicht ebenensymmetrisch? ▪ Was müsstest du ändern, damit ein Körper ebenensymmetrisch ist?

Literatur zum Weiterlesen:

Bettner, M., & Dinges, E. (2011). *Mathe an Stationen: Umgang mit dem Geobrett in der Sekundarstufe I.* Donauwörth: Auer.

Franke, M., & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie – In der Grundschule* (3. Aufl.). Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum, S. 257-284.

Götze, D., & Spiegel, H. (2004). „Windmühlen“: Erfahrungen zur Drehsymmetrie am Geobrett. *Grundschule Mathematik, 3*, 28-31.

Götze, D., & Spiegel, H. (2005). Mini-Umspannwerk: Erfahrungen mit ebenen Figuren am Geobrett. *Die Grundschulzeitschrift, 190*, 28-34.

Merschmeyer-Brüwer, C. (2013). Räumliches Symmetrieverständnis fördern: Spiegelungen von Würfelbauwerken. *Mathematik differenziert, 3*, 41-46.

PIKAS. (o. J.). *Symmetrie*. Abgerufen von *https://pikas.dzlm.de/243*, *https://pikas.dzlm.de/197* (Zugriff am 20.06.2021).

PRIMAKOM. (o. J.). *Symmetrie*. Abgerufen von *http://primakom.dzlm.de/500* (Zugriff am 20.06.2021).

Reinhold, S. (2013). Schönes sehen: Mehrfachspiegelungen in Kaleidoskopen & Co. *Mathematik differenziert, 3*, 22-26.

Ruwisch, S. (2013). Symmetrie – ein vielfältiger Begriff. *Mathematik differenziert, 3*, 10-13.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2015). *Handbuch für den Mathematikunterricht: 2. Schuljahr*. Braunschweig: Bildungshaus, S. 162-180.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2017). *Handbuch für den Mathematikunterricht: 3. Schuljahr*. Braunschweig: Bildungshaus, S. 160-173.

Schmidt-Thieme, B., & Weigand, H.-G. (2014). Symmetrie und Kongruenz. In H.-G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth, G. Wittmann (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe* (S. 186-213). Berlin: Springer Spektrum.

Schütte, S. (Hrsg.). (2006). *Die Matheprofis: Ein Mathematikbuch für das 4. Schuljahr*. Stuttgart: Oldenbourg, S. 84-87.

Symmetrie: Themenheft. (2010). *Mathematik lehren, 161.*

11.10 PUNKTE IM KOORDINATENSYSTEM AUFFASSEN UND DARSTELLEN (KS)

Das Orientieren an Skalen und in Koordinatensystemen spielt im täglichen Leben der Schülerinnen und Schüler eine große Rolle. Hierzu gehört das Ablesen von (analogen) Thermometern, Maßskalen auf Messbechern, analogen Waagen, Linealen (eindimensionale Koordinaten), aber auch das Lesen von Stadtplänen oder Diagrammen, z. B. Wachstumsdiagrammen (zweidimensionale Koordinaten) (Malle, 2005, S. 4).

Die Grundidee bei der Orientierung in zweidimensionalen (analog auch in dreidimensionalen) Koordinatensystemen besteht darin, dass ein gegebenes Zahlenpaar (Zahlentripel) als Punkt in der Ebene (im Raum) dargestellt werden kann und umgekehrt ein Punkt in der Ebene (im Raum) durch ein Zahlenpaar (Zahlentripel) beschrieben werden kann – und diese Zuordnung ist eindeutig (Malle, 2005, S. 5).

Doch auch innermathematisch ist die Orientierung in Koordinatensystemen höchst relevant, nämlich im Zusammenhang mit Zuordnungen, Funktionen und Vektoren (Malle, 2005).

Probleme bei der Orientierung in Koordinatensystemen und ihrer Nutzung können einerseits dazu führen, dass viele Darstellungen des alltäglichen Lebens nicht sicher gedeutet werden können (s. o.), und andererseits zur Folge haben, dass das Koordinatensystem z. B. auch im Inhaltsbereich „Zuordnungen und Funktionen“ nicht angemessen genutzt werden kann. Ein erfolgreiches Weiterlernen in diesem Bereich wäre somit erheblich erschwert.

Ausgabe:
Grundlage für die Ausgabe des Förderinhaltes sind fehlerhafte Bearbeitungen von Aufgaben, bei denen Punkte im Koordinatensystem dargestellt und aufgefasst werden sollen (wenn also Zahlenpaare Punkten zugeordnet werden sollen und umgekehrt) (8 Items).

Der Förderinhalt wird ausgegeben, wenn mehr als fünf der insgesamt acht Items falsch gelöst wurden.

Tabelle III.11-28: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes KS (Niveaustufe D)

Anzahl falsch:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (KS)	9 %	9 %	13 %	11 %	10 %	8 %	11 %	15 %	14 %	933
Bewertung	Unauffällig: 60 %						Auffällig: 40 %			

Ergänzende prozessorientierte Diagnose und Fördervorschläge

Tabelle III.11-29: Ergänzende prozessorientierte Diagnose (KS, Niveaustufe D)

Aufgabe	Beobachtungen
Zur Orientierung auf einer eindimensionalen Skala (Zahlenstrahl)	▪ Vgl. Förderinhalt OR (Ordinale Zahlvorstellungen aufbauen in den Niveaustufen B, C und D.

Koordinatensystem vorlegen (Skalierung der natürlichen Zahlen, Beschriftung bei 1 und 5, vgl. Aufgaben in ***ILeA plus***).
Wo liegt der Punkt $\binom{3}{2}$?
Wie gehst du vor?
 	
Welches Zahlenpaar gehört zu diesem Punkt $\binom{4}{2}$?
Woher weißt du das?
Wie gehst du vor?
	▪ Werden die Skalierungsstriche auf den beiden Achsen richtig gedeutet oder
	  ▪ werden Kästchen und nicht Skalierungsstriche gezählt?
	  ▪ wird der Ursprung (als 1) mitgezählt?
	  ▪ wird der erste Skalierungsstrich als Ursprung angenommen?
	▪ Wird die Konvention der Schreibweise des Zahlenpaares genutzt (erst der Wert der x-Achse, dann der der y-Achse)?
	▪ „Verrutscht“ die Schülerin bzw. der Schüler in der Spalte oder Zeile beim Auffinden des Punktes bzw. beim Ermitteln der Werte?

Tabelle III.11-30: Fördervorschläge (KS, Niveaustufe D)

Ziel	Förderung
Orientierung auf einer eindimensionalen Skala (Zahlenstrahl)	▪ Vgl. Förderinhalt OR (Ordinale Zahlvorstellungen aufbauen in den Niveaustufen B, C und D)

Orientierung auf Plänen und Rastern	▪ Koordinaten nutzen, um Orte zu beschreiben. Beispiele: Schachspiel, Stadtplan, „Schätze finden“ („Schiffe versenken“).
	▪ Zunächst wird eine Achse mit Buchstaben markiert, die andere mit Zahlen.
	▪ Strategien und Sorgfalt thematisieren:
	  ▪ vom Planquadrat zur Ortsangabe (Suche am Rand die passende Buchstaben-Zahlen-Kombination. Wie gehst du vor?)
	  ▪ von der Ortsangabe zum Planquadrat (Finde den passenden Ort auf dem Raster. Wie gehst du vor?)
	  ▪ „Wie ändert sich diese Ortsangabe, wenn du ein Quadrat weiter nach rechts gehst? Noch eins nach rechts? Was ändert sich, was bleibt gleich?“
	  ▪ Schau dir die Ortsangaben an: D3, D4, D6. Kannst du dich durch die Quadrate bewegen, ohne zu springen? Begründe.

	▪ Verrutschen in Spalten und Zeilen vermeiden (z. B. mit einem Pappstreifen) ▪ Beide Achsen werden mit Zahlen markiert. ▪ Vertauschen der Koordinaten vermeiden: ▪ klären, dass nun eine Konvention zur eindeutigen Bestimmung festgelegt werden muss ▪ Merkplakat mit Markierung und Verbindung der Positionen auf den Achsen und im Zahlenpaar (z. B. durch Pfeile)
Übertragung auf Koordinatensysteme	▪ Übertragung der Strategien und Sorgfalt von Planquadraten auf Schnittpunkte ▪ Schnittpunkte herstellen durch Holzstäbe (senkrecht zu den Achsen, durch die entsprechenden Skalierungspunkte)

Literatur zum Weiterlesen:

Koth, M., & Malle, G. (2005). Mathe-Welt Koordinaten. *Mathematik lehren, 133*, 28-42.

Malle, G. (2005). Von Koordinaten zu Vektoren. *Mathematik lehren, 133*, 4-7.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2018). *Handbuch für den Mathematikunterricht: 4. Schuljahr*. Braunschweig: Bildungshaus, S. 192-198.

vom Hofe, R., Straumberger, W. (2013). Vom Satelliten auf die Tafel. Analysieren und Strukturieren von Umweltsituationen. *Mathematik lehren, 178*, 28-33.

11.11 WINKELGRÖßEN BESTIMMEN UND WINKELBEZIEHUNGEN NUTZEN (WI)

Winkelmessung spielt eine wichtige Rolle im Geometrieunterricht der Sekundarstufe, denn „der Winkelbegriff ist für die (ebene) Geometrie von fundamentaler Bedeutung und bildet ein zentrales Konzept für die Ausbildung und Entwicklung geometrischen Wissens und Denkens“ (Dohrmann & Kuzle, 2015, S. 29).

Die Kenntnis über die Zusammenhänge von Gleichheit, Summen und Differenzen von Winkeln sowie ein tragfähiges Begriffsverständnis des Winkels als Objekt-, Relations- und Maßbegriff sind für die gesamte (Schul-)Geometrie relevant (vgl. ebd.).

Wichtige Kompetenzen auf der Niveaustufe D sind in diesem Zusammenhang:

- das Erkennen bzw. Schätzen von typischen Winkeln (45°, 60°, 90°) und anderen Winkeln in Relation zu diesen,
- die Kenntnis relevanter Begriffe (spitz, rechtwinklig, stumpf, überstumpf),
- das Zeichnen und Ausmessen von Winkeln,
- die Kenntnis und Nutzung der Winkelbeziehungen (Scheitel-, Neben-, Stufenwinkel),
- das Nutzen dieser Beziehungen zur Beschreibung von Drei- und Vierecken.

Probleme beim Erkennen, Messen und Konstruieren von Winkeln können dazu führen, dass Zusammenhänge von und Beziehungen zwischen Winkeln nicht erkannt und genutzt werden können. Diese wiederum sind die Grundlage für eine Vielzahl mathematischer Aktivitäten (Beweisführungen, Definitionen, Trigonometrie etc). Fehlen die beschriebenen Kompetenzen, wird ein geometrisches Weiterlernen erheblich gestört.

Ausgabe:
Grundlage für die Ausgabe dieses Förderinhaltes sind alle Aufgaben, bei denen die Kenntnis von Winkelbeziehungen für die Angabe von Winkelgrößen genutzt werden muss (an geschnittenen Geraden oder in Drei- und Vierecken). Auch Aufgaben zur Bestimmung von Winkelgrößen bilden die Grundlage für die Ausgabe dieses Förderinhaltes.

Die Kenntnis der Namen von Winkelbeziehungen (Scheitelwinkel), fließt nicht in die Berechnung dieses Förderinhaltes ein, sondern wird dem Kompetenzbereich „Begriffe kennen und nutzen“ zugerechnet.

Der Förderinhalt wird ausgegeben, wenn mehr als acht von zwölf Items fehlerhaft bearbeitet werden.

Tabelle III.11-31: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes WI (Niveaustufe D)

Anzahl falsch:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11-12	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (WI)	1 %	3 %	5 %	5 %	8 %	11 %	13 %	14 %	13 %	10 %	9 %	8 %	878
Bewertung	Unauffällig: 73 %									Auffällig: 27 %			

Ergänzende prozessorientierte Diagnose und Fördervorschläge

Tabelle III.11-32: Ergänzende prozessorientierte Diagnose (WI, Niveaustufe D)

Aufgabe	Beobachtungen
Winkelgrößen bestimmen (ohne Messen): Wie groß ist der Winkel? Woher weißt du das? Beschreibe.	▪ Werden typische Winkelgrößen erkannt? ▪ Werden Stützpunktvorstellungen zu typischen Winkelgrößen genutzt, um andere Winkelgrößen zu bestimmen? ▪ Wird geometrisches Vokabular genutzt?
Winkelgrößen bestimmen (mit Messen): Wie groß ist der Winkel. Bitte miss genau. Beschreibe, wie du misst.	▪ Wird das Geodreieck richtig angesetzt? ▪ Kann die Skalierung richtig genutzt werden? ▪ Kann das Vorgehen angemessen beschrieben werden? Wird geometrisches Vokabular genutzt?
Winkelbeziehungen an geschnittenen Geraden: Abbildungen von geschnittenen Strecken/ Parallelen vorlegen: Zeige mir an diesem Bild, was ein Scheitelwinkel/Stufenwinkel/Nebenwinkel ist. Woran erkennst du das? Begründe.	▪ Können die Begriffe richtig zugeordnet werden oder werden sie vertauscht? Welche Begriffe werden vertauscht, welche sind sicher? ▪ Wird zur Erklärung geometrisches Vokabular genutzt?
Winkelgrößen bestimmen an geschnittenen Geraden und in Drei- und Vierecken: Abbildungen von geschnittenen Strecken/Parallelen und Dreiecken/Vierecken vorlegen mit einzelnen vorgegebenen Winkeln: Ermittle die anderen Winkel. Wie gehst du vor?	▪ Werden die Winkelbeziehungen genutzt? ▪ Werden Beziehungen vertauscht (z. B.: Nebenwinkel sind gleich groß)? ▪ Welche Beziehungen können genutzt werden, welche noch nicht?

Tabelle III.11-33: Fördervorschläge (WI, Niveaustufe D)

Ziel	Förderung
Erarbeitung der Winkelbeziehungen und deren Benennung	▪ Vgl. auch Förderinhalt BE (Geometrische Objekte, ihre Eigenschaften und Beziehungen anhand von Beschreibungen und Grafiken erkennen und benennen). ▪ Thematisierung von Scheitel-, Stufen- und Nebenwinkeln und deren Beziehungen mit konkreten, dynamischen Objekten (z. B. sich schneidende Stäbe mit einem flexiblen Scharnier (und ggf. fixierten Parallelen) ▪ Wortspeicher und Lernplakate zur Visualisierung von Winkel-beziehungen auch mit nicht typischen Beispielen (z. B. sehr kleinen Winkeln) ▪ Lernplakat zur Visualisierung typischer Winkelgrößen und Winkeleigenschaften (spitz, stumpf, rechter Winkel, ...)
Winkelbeziehungen in Drei- und Vierecken	▪ Innenwinkel im Dreieck ausmessen und addieren ▪ Übertragung von Winkelbeziehungen an einer Gerade auf besondere Vierecke (z. B. Parallelogramme): ▪ Parallelogramme als Ergebnis von zwei paarweise parallelen Strecken. Neben-, Scheitel- und Stufen-winkel identifizieren und farbig markieren

Umgang mit dem Geodreieck	▪ Anlegen, Ablesen und Einzeichnen verbalisieren:
	  ▪ Worauf musst du achten?
	  ▪ Lernplakat und Wortspeicher zur Veranschaulichung des Messprozesses von Winkeln (Zuerst ..., dann ..., zum Schluss ...)
	  ▪ Untersuchung des Geodreiecks: Wofür ist welche Skalierung gedacht? Wofür kann ein Geodreieck genutzt werden? Wofür nicht?
	  ▪ Lernplakat Geodreieck

Literatur zum Weiterlesen:

Bettner, M. (2005). *Winkel: Kopiervorlagen für den Mathematikunterricht: 5.-8. Schuljahr*. Horneburg: Persen.

Bettner, M., & Dinges, E. (2010). *Mathe an Stationen: Umgang mit Geodreieck und Zirkel in der Sekundarstufe I.* Donauwörth: Auer.

Dohrmann, Ch., & Kuzle, A. (2015). Winkel in der Sekundarstufe I: Schülervorstellungen erforschen. In M. Ludwig, A. Filler, A. Lambert (Hrsg.). *Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen. Jubiläumsband des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* (S. 29-45). Wiesbaden: Springer Spektrum.

11.12 RÄUMLICHE BEWEGUNGEN UND BEZIEHUNGEN MENTAL NACHVOLLZIEHEN UND VORSTELLEN UND SICH MENTAL IM RAUM ORIENTIEREN (WV)

Die Fähigkeiten, den Raum und räumliche Objekte wahrzunehmen, sich darin und mit ihnen zu orientieren sowie konkret und gedanklich im Raum und mit räumlichen Objekten zu operieren, ist grundlegend für einen erfolgreichen Umgang in alltäglichen und schulischen Situationen. Insbesondere „stellt die Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens eines der Hauptziele des Geometrieunterrichts dar" (Franke & Reinhold, 2016, S. 39). Beim räumlichen Vorstellungsvermögen werden räumliche Objekte gedanklich repräsentiert und verändert.

Räumliche Fähigkeiten können vor allem in drei Bereiche gegliedert werden (Schulz, 2015, S. 23). Diese hängen zusammen und können – beispielsweise zur Gestaltung von Fördermaßnahmen – noch weiter spezifiziert werden:

- Beziehungen zwischen Objekten werden erfasst bzw. vorgestellt. Wurde ein Objekt (gedanklich) gedreht oder gespiegelt? Beispiele: Überprüfen auf Schubsymmetrie (über gedankliches Verschieben der Grundfigur), auf Drehsymmetrie (durch gedankliches Rotieren).
- Gedankliches Operieren mit Objekten (Falten, Zerlegen, Verschieben), die somit ihre räumliche Beziehung zu anderen Objekten ändern. Beispiele: Eine Figur durch mentale Drehung drehsymmetrisch ergänzen, gedankliches Umbauen eines Würfelbauwerks, gedankliches Aufklappen eines Körpernetzes.

Räumliches Orientieren: Orientierung im wahrgenommenen Raum sowie gedankliches Hineinversetzen in andere Perspektiven. Beispiele: Wo sehe ich das Fenster? Wo sieht mein Gegenüber das Fenster: rechts oder links? Orientierung auf Lageplänen.

Ohne Raumvorstellung sind grundlegende Situationen des Alltags nicht zu bewältigen: Wie wird sich ein fahrendes Auto weiterbewegen? Wie gelingt eine Orientierung auf Landkarten und Plänen? Auch im Unterricht greifen Inhalte jenseits des Mathematikunterrichts auf räumliche Kompetenzen zurück: Im Sachunterricht werden räumliche Situationen zweidimensional im Bild dargestellt, beim Sport findet eine Orientierung an Markierungen etc. statt. Selbstverständlich sind tragfähige Kompetenzen zur Raumvorstellung unverzichtbar für ein erfolgreiches Weiterlernen im Geometrieunterricht. Das konkrete und zunehmend auch gedankliche In-Beziehung-Stellen geometrischer Objekte ist ein Leitgedanke des Geometrieunterrichts (Franke & Reinhold, 2016, S. 80).

Ausgabe:
Grundlage für die Ausgabe des Förderinhaltes sind fehlerhafte Bearbeitungen bei der Aufgabe „Körpernetze“. Hier ist das mentale Aufklappen von Körpernetzen (3 Items) gefordert. Der Förderinhalt wird bereits ausgegeben, wenn mehr als eins der insgesamt drei Items falsch gelöst wurde.

Tabelle III.11-34: Häufigkeiten nicht richtiger Antworten und Ausgabe des Förderinhaltes WV (Niveaustufe D)

Anzahl falsch:	0	1	2	3	N
Anteil der Schülerinnen und Schüler (WV)	18 %	29 %	30 %	23 %	950
Bewertung	Unauffällig: 47 %		Auffällig: 53 %		

Aufgrund der geringen Anzahl der zugrunde liegenden Items und des vergleichsweise niedrigen Anforderungsgrads der Items ist es ratsam, bereits bei mehr als einer falsch gelösten Aufgabe eine weiterführende prozessorientierte Diagnose durchzuführen, um ggf. eine zielführende Förderung beginnen zu können.

Die vorgeschlagenen Bereiche der prozessorientierten Diagnose gehen daher auch über die Kompetenzen hinaus, die zur Lösung der Aufgabe „Körpernetze“ erforderlich wären.

Ergänzende prozessorientierte Diagnose und Fördervorschläge

Tabelle III.11-35: Ergänzende prozessorientierte Diagnose (WV, Niveaustufe D)

Aufgabe	Beobachtungen
Verschiedene Formen in unterschiedlicher Ausrichtung vorlegen (davon sind einige kongruent, die anderen in Grundzügen ähnlich): Welche von diesen Formen kannst du übereinanderlegen, ohne dass etwas übersteht (ohne die Formen anzufassen)? Wie gehst du vor? Woher weißt du das?	▪ Gelingt das mentale Drehen und Verschieben? ▪ Werden markante Punkte, Winkel, Längen, Beziehungen für eine Begründung genutzt? ▪ Wird nur über das „Aussehen" begründet?
Körpernetze vorlegen und Anordnungen zu Formen, die nicht zu einem Körper aufgefaltet werden können: Welche von den Netzen kannst du zu einem Körper auffalten (ohne die Netze anzufassen)? Wie gehst du vor? Welcher Körper kann das sein?	▪ Wird mit Eigenschaften des Körpers (z. B. dessen Begrenzungsflächen) argumentiert: Wenn ein „Netz" aus nur fünf Rechtecken besteht, kann das kein Quadernetz sein. ▪ Werden Größen- und Lagebeziehungen berücksichtigt? ▪ Gelingt das mentale Auffalten? ▪ Wird mit „Überlappungen" argumentiert? ▪ Wird eine Grundfläche festgelegt? ▪ Können nur „typische" Körpernetze (z. B. das „Kreuz" als Würfelnetz) identifiziert werden? ▪ Das mentale Auffalten gelingt, nicht aber die Benennung des entstehenden Körpers. ▪ Vgl. prozessorientierte Diagnose „Begriffe kennen und nutzen".

Tabelle III.11-36: Fördervorschläge (WV, Niveaustufe D)

Ziel	Förderung

Zerlegen und Zusammensetzen von geometrischen Objekten	▪ Tangram oder weitere Legepuzzles
	▪ Konkretes und gedankliches Auslegen von vorgegebenen Umrissen mit verschiedenen ebenen Figuren
	▪ Konkretes und gedankliches Ausfüllen von vorgegebenen Begrenzungen mit verschiedenen räumlichen Objekten,
	  ▪ z. B. Würfelbauwerke nachbauen, zu Quadern (Würfeln) ergänzen, Schuhschachtel füllen
	  ▪ Worauf achtest du?
	  ▪ (Um)bauen von einfachen und komplexen Würfel-Quaderbauwerken
	▪ Weitere Fördermöglichkeiten: Vgl. Förderinhalt SY (Ebene Figuren auf Symmetrien untersuchen und charakteristische Eigenschaften dieser Symmetrien kennen und nutzen).

Beziehungen zwischen geometrischen Objekten herstellen (Körpernetze)	▪ Ausschneiden und Auffalten von Würfel-, Quader-, Prismen-, Pyramiden und anderen Körpernetzen ▪ Bei gegebenen Netzen zunächst Vermutungen darüber anstellen, ob ein Würfel/Quader/Prisma, ... entstehen kann ▪ Wortspeicher zur Beschreibung von Faltrichtungen erarbeiten (vorne, hinten, rechte Seite, linke Seite, nach links, rechts, vorne, hinten klappen ...) ▪ Untersuchung von Lage-, Flächen-, Winkel-, Längenbeziehungen an Netzen und an den Objekten im Vergleich. Hierbei werden mehrere Netze zum gleichen Körper analysiert. Entwicklung von Strategien, wie Netze geprüft werden können auf der Grundlage dieser Vergleiche (z. B.: es gibt keinen Kreis beim Netz, also kann es kein Zylinder sein)

Literatur zum Weiterlesen:

Bauer, R. (1997). *Geometrische Körper*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Bettner, M., & Dinges, E. (2011). *Mathe an Stationen: Umgang mit dem Geobrett in der Sekundarstufe I.* Donauwörth: Auer.

Franke, M., & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie: In der Grundschule* (3. Aufl.). Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum, S. 61-86, 185-190, 199f., 212-216.

Kotlenga, A. (2005). *Lernzirkel Geometrische Körper.* Horneburg: Persen.

Müller, G. N., Röhr, M., & Wittmann E. Ch. (1997). *Schauen und Bauen: Geometrische Spiele mit Quadern.* Leipzig: Klett.

Schulz, A. (2015). Zwischen Handeln und Kopfgeometrie: Ein Raster zur Einordnung von Übungsformaten im Geometrieunterricht. *Fördermagazin Grundschule*, *37 (4)*, 22-26.

Spiegel, H., & Spiegel, J. (2003). *Potz-Klotz: 2 bis 6 Spieler, ab 7 Jahren*. *Spiegels Spiele*. Seelze-Velber: Kallmeyer.

Wollring, B. (2016). Wie entstehen geometrische Begriffe? Mentale Übungen an explodierenden Würfeln und schmelzenden Kugeln. *Mathematik differenziert, 1*, 6-9.

11.13 LITERATUR

Bana, J., Farrell, B., & McIntosh, A. (1997). Student error patterns in fraction and decimal concepts. In F. Biddulph & K. Carr (Hrsg.), *Mathematics Education Research Group of Australasia: People in mathematics education* (S. 81-87). Fremantle, Australia.

Bauer, R. (1997). *Geometrische Körper.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Besuden, H. (1998). *Arbeitsmappe: Verwendung von Arbeitsmitteln für die anschauliche Bruchrechnung.* Osnabrück: Wenner.

Besuden, H. (1999). Warum mit dem Kehrbruch malnehmen? *Mathematik in der Schule, 37 (1),* 6-9.

Bettner, M. (2005). *Winkel: Kopiervorlagen für den Mathematikunterricht: 5.-8. Schuljahr*. Horneburg: Persen.

Bettner, M., & Dinges, E. (2010). *Mathe an Stationen. Umgang mit Geodreieck und Zirkel in der Sekundarstufe I.* Donauwörth: Auer.

Bettner, M., & Dinges, E. (2011). *Mathe an Stationen. Umgang mit dem Geobrett in der Sekundarstufe I.* Donauwörth: Auer.

Breidenbach, W. (1964). *Raumlehre in der Volksschule* (7. Aufl.). Hannover: Schroedel.

Brueckner, L. J. (1928). Analysis of errors in fractions. *Elementary School Journal, 28 (10)*, 760-770.

Cramer, K., & Wyberg, T. (2009). Efficacy of different concrete models for teaching the part-whole construct for fractions. *Mathematical Thinking and Learning, 11 (4)*, 226-257.

Dohrmann, C., & Kuzle, A. (2015). Winkel in der Sekundarstufe I: Schülervorstellungen erforschen. In M. Ludwig, A. Filler & A. Lambert (Hrsg.), *Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen. Jubiläumsband des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* (S. 29-45). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Evermann, C. & Stoiber, T. (2015). Alles klar im Haus der Vierecke? Schülerfehler und begriffliche Schwierigkeiten beim Klassifizieren von Vierecken. *Mathematik lehren, 32* (191), 13-15.

Fischbein, E., Deri, M., Sainati Nello, M., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16 (1)*, 3-17.

Franke, M. (2001): *Didaktik der Geometrie*. Heidelberg: Spektrum.

Franke, M., & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule: Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II* (3. Aufl.). Berlin: Springer Spektrum.

Glade, M., & Schink, A. (2011). Vom Anteile bestimmen zur Multiplikation von Brüchen: Ein Weg mit System: Fortschreitende Schematisierung. *Mathematik lehren, 164*, 43-47.

Götz, D., & Schulz, A. (2018). Aus Fehlern lernen: Schülerlösungen als Ausgangspunkt für Diagnose und Förderung. *Grundschulmagazin, 4,* 33-37.

Götze, D., & Spiegel, H. (2004). „Windmühlen“: Erfahrungen zur Drehsymmetrie am Geobrett. *Grundschule Mathematik, 3,* 28-31.

Götze, D., & Spiegel, H. (2005). Mini-Umspannwerk: Erfahrungen mit ebenen Figuren am Geobrett. *Die Grundschulzeitschrift, 190*, 28-34.

Grassmann, M. (1995*). Immer wieder Brüche. Mathematik in der Schule, 33 (5),* 267-278.

Hafner, T. (2012): *Proportionalität und Prozentrechnung in der Sekundarstufe I: Empirische Untersuchung und didaktische Analysen* (1. Aufl.). Wiesbaden: Vieweg + Teubner.

Hasemann, K., & Gasteiger, H. (2014). *Anfangsunterricht Mathematik: Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II* (3., überarb. u. erw. Aufl.). Berlin: Springer Spektrum. Abgerufen von *https://doi.org/10.1007/978-3-642-40774-1* (Zugriff am 30.06.2021).

Heckmann, K. (2005). Von Euro und Cent zu Stellenwerten: Zur Entwicklung des Stellenwertverständnisses. *Mathematica Didactica*, *28 (2)*, 71-87.

Heckmann, K. (2006). *Zum Dezimalbruchverständnis von Schülerinnen und Schülern: Theoretische Analyse und empirische Befunde*. Berlin: Logos.

Heckmann, K. (2007). Von Zehnern zu Zehnteln: Das Stellenwertverständnis auf Dezimalbrüche erweitern. *Mathematik lehren, 142*, 45-51.

Heckmann, K. (2011). Ausbildung von Dezimalbruchverständnis über Sachprobleme? Eine differenzierte Analyse. *Der Mathematikunterricht, 3,* 55-62.

Heckmann, K. (2013). Was ist eigentlich 0,5? (Fehlende) Anschaulichkeit und ihre Bedeutung für die Dezimalbruchrechnung. In J. Meyer & F. Leydecker (Hrsg.), *Bruchrechnung verstehen* (S. 641 ff.). Braunschweig: Schroedel.

Hußmann, S., & Prediger, S. (2007). Mit Unterschieden rechnen: Differenzieren und Individualisieren. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *49 (17)*, 1-8.

Koth, M., & Malle, G. (2005). Mathe-Welt Koordinaten. *Mathematik lehren, 133*, 28-42.

Kotlenga, A. (2005). *Lernzirkel Geometrische Körper.* Horneburg: Persen.

Ludwig, M., & Weigand, H.-G. (2014). Konstruieren. In H.-G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth, …, G. Wittmann (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie in der Sekundarstufe I* (2. Aufl., S. 55-80). Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Malle, G. (2005). Von Koordinaten zu Vektoren. *Mathematik lehren, 133*, 4-7.

Marxer, M., & Wittmann, G. (2011). Förderung des Zahlenblicks: Mit Brüchen rechnen, um ihre Eigenschaften zu verstehen. *Mathematikunterricht, 57 (3)*, 26-36.

Marxer, M., & Wittmann, G. (2013). Auch Dezimalbrüche sind Brüche: Mit Dezimalbrüchen flexibel rechnen, um ihre Eigenschaften zu verstehen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *55 (52)*, 30-34.

Merschmeyer-Brüwer, C. (2013). Räumliches Symmetrieverständnis fördern: Spiegelungen von Würfelbauwerken. *Mathematik differenziert, 3*, 41-46.

Mosandl, C., & Sprenger, L. (2014). Von den natürlichen Zahlen zu den Dezimalzahlen – nicht immer ein einfacher Weg! *Praxis der Mathematik in der Schule, 56*, 16-21.

Müller, G. N., Röhr, M., & Wittmann E. Ch. (1997). *Schauen und Bauen: Geometrische Spiele mit Quadern.* Leipzig: Klett.

Neumann, K. (2010). *Mathematik selbst entdecken: Vierecke.* Buxtehude: AOL-Verlag.

Padberg, F., & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung*. Heidelberg: Spektrum.

Prediger, S. (2004). Brüche bei den Brüchen – angreifen oder umschiffen? *Mathematik lehren, 123*, 10-13.

Prediger, S. (2006). Vorstellungen zum Operieren mit Brüchen entwickeln und erheben: Vorschläge für vorstellungsorientierte Zugänge und diagnostische Aufgaben. *Praxis der Mathematik in der Schule, 11*, 8-12.

Prediger, S. (2007). Konzeptwechsel in der Bruchrechnung: Analyse individueller Denkweisen aus konstruktivistischer Sicht. In I. Lehmann (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 203-206). Hildesheim: Franzbecker.

Prediger, S. (2011a). Why Johnny can't apply multiplication? Revisiting the choice of operations with fractions. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 6 (2)*, 65-88.

Prediger, S. (2011b). Vorstellungsentwicklungsprozesse initiieren und untersuchen: Einblicke in einen Forschungsansatz am Beispiel Vergleich und Gleichwertigkeit von Brüchen in der Streifentafel. *Der Mathematikunterricht*, *57 (3)*, 5-14.

Prediger, S., Glade, M., & Schmidt, U. (2011). Wozu rechnen wir mit Anteilen? *Praxis der Mathematik in der Schule*, *52,* 37.

Prediger, S., Krägeloh, N., & Wessel, L. (2013). Wieso $\frac{3}{4}$ von 20, und wo ist der Kreis? Brüche für Teile von Mengen handlungsorientiert und operativ erarbeiten. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *55 (52)*, 9-14.

Prediger, S., & Schink, A. (2013). Verstehens- und strukturorientiertes Üben am Beispiel des Brüchespiels ‚Fang das Bild'. In H. Allmendinger, K. Lengnink, A. Vohns, & G. Wickel (Hrsg.), *Mathematik verständlich unterrichten* (S. 11-26). Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Reinhold, S. (2013). Schönes sehen: Mehrfachspiegelungen in Kaleidoskopen & Co. *Mathematik differenziert, 3*, 22-26.

Roth, J., & Wittmann, G. (2014): Ebene Figuren und Körper. In H.-G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth, …, G. Wittmann (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (2. Aufl., S. 123-156). Berlin: Springer Spektrum.

Ruwisch, S. (2013). Symmetrie: ein vielfältiger Begriff. *Mathematik differenziert, 3*, 10-13.

Scherres, C. (2009). Warum habt ihr ausgerechnet in $\frac{7}{7}$ umgewandelt? Strategiekonferenzen über Vorgehensweisen zur Addition und Subtraktion mit Brüchen und Dezimalzahlen. *Praxis der Mathematik in der Schule, 27*, 15-21.

Schink, A. (2013a). Flexibler Umgang mit Brüchen: Empirische Erhebung individueller Strukturierungen zu Teil, Anteil und Ganzem. *Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts* (Bd. 9). Wiesbaden: Springer.

Schink, A. (2013b). Strukturelle Zusammenhänge zwischen Teil, Anteil und Ganzem: Herausforderungen und Ressourcen beim flexiblen Umgang mit Brüchen nutzen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *55 (52)*, 15-19.

Schink, A., & Meyer, M. (2013). Teile vom Ganzen: Brüche beziehungsreich verstehen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *55 (52)*, 2-8.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2015). *Handbuch für den Mathematikunterricht: 2. Schuljahr* (S. 46-54). Braunschweig: Bildungshaus.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2017a). *Handbuch für den Mathematikunterricht*. Braunschweig: Schroedel Westermann.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2017b). *Handbuch für den Mathematikunterricht: 3. Schuljahr* (S. 46-54). Braunschweig: Bildungshaus.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2018). *Handbuch für den Mathematikunterricht: 4. Schuljahr*. Braunschweig: Schroedel Westermann.

Schmidt-Thieme, B., & Weigand, H.-G. (2014). Symmetrie und Kongruenz. In H.-G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth, …, G. Wittmann (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (2. Aufl., S. 186-213). Berlin: Springer Spektrum.

Schulz, A. (2015). Zwischen Handeln und Kopfgeometrie: Ein Raster zur Einordnung von Übungsformaten im Geometrieunterricht. *Fördermagazin Grundschule, 37 (4)*, 22-26.

Schütte, S. (Hrsg.). (2006). *Die Matheprofis. Ein Mathematikbuch für das 4. Schuljahr.* Stuttgart: Oldenbourg.

Selter, C., Prediger, S., Nührenbörger, M., & Hußmann, S. (Hrsg.). (2014). Mathe sicher können: *Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen: Natürliche Zahlen* (1. Aufl.). Berlin: Cornelsen.

Spiegel, H., & Spiegel, J. (2003). *Potz-Klotz: 2 bis 6 Spieler, ab 7 Jahren*. *Spiegels Spiele*. Seelze-Velber: Kallmeyer.

Symmetrie: Themenheft. (2010). *Mathematik lehren, 161*, 201.

Thiemann, K. (2004). Problematische Schülervorstellungen bei der Multiplikation und Division von Dezimalbrüchen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *46 (1)*, 1-5.

Tunç-Pekkan, Z. (2015). An analysis of Elementary School children's fractional knowledge depicted with circle, rectangle, and number line representations. *Educational Studies in Mathematics, 89 (3)*, 419-441.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of Secondary School students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction, 28 (2)*, 181-209.

vom Hofe, R., Straumberger, W. (2013). Vom Satelliten auf die Tafel. Analysieren und Strukturieren von Umweltsituationen. *Mathematik lehren, 178*, 28-33.

Wartha, S. (2007). Verständnis entwickeln: Diagnose von Grund- und Fehlvorstellungen bei Bruchzahlen. *Mathematik lehren, 142*, 24-26, 43-44.

Wartha, S., & Wittmann, G. (2009). Ursachen für Lernschwierigkeiten im Bereich des Bruchzahlbegriffs und der Bruchrechnung. In A. Fritz (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I: Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden* (S. 73-108). Weinheim: Beltz.

Wartha, S. (2011). Handeln und Verstehen: Förderbaustein Grundvorstellungen aufbauen. *Mathematik lehren, 166*, 8-14.

Wartha, S. (2017a). Rechenschwäche in der Sekundarstufe: Auswirkungen nicht überwundener Lernhürden der Primarstufe auf das Arbeiten mit Brüchen. In A. Fritz, S. Schmidt & G. Ricken (Hrsg.), *Handbuch Rechenschwäche: Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie* (3. Aufl., S. 286-306). Weinheim: Beltz.

Wartha, S. (2017b). Stellenwertverständnis bei Dezimalbrüchen. *Fördermagazin Sekundarstufe, 1*, 8-14.

Weigand, H.-G. (2014): Begriffslernen und Begriffslehren. In H.-G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth, …, G. Wittmann (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (2. Aufl., S. 264 ff.). Berlin: Springer Spektrum.

Wittmann, G. (2007). Mit Bruchzahlen experimentieren: Darstellungen wechseln – Grundvorstellungen entwickeln. *Mathematik lehren, 142*, 17-23.

Wollring, B. (2016). Wie entstehen geometrische Begriffe? Mentale Übungen an explodierenden Würfeln und schmelzenden Kugeln. *Mathematik differenziert, 1*, 6-9.