Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Familie

Abschlussprüfung
an der Fachoberschule im Schuljahr 2016/17

Fach	Mathematik (B)
Nur für die Lehrkraft	
Prüfungstag	3. Mai 2017
Prüfungszeit	09:00 – 13:00 Uhr
Zugelassene Hilfsmittel	Nicht graphikfähiger Taschenrechner mit gelöschtem Programmierteil, kein CAS-Rechner, Handbuch/Gebrauchsanleitung muss vorliegen, Formelsammlung, Rechtschreib-Wörterbuch (siehe Aufgabendeckblatt)
Allgemeine und spezielle Arbeitshinweise	Beachten Sie bitte das Schülerdeckblatt.
Erwartungs-horizonte	Die Beschreibungen der erwarteten Leistungen enthalten keine vollständigen Lösungen, sondern nur kurze Angaben. Hier nicht genannte, aber gleichwertige Lösungswege sind gleichberechtigt. Die aufgeführten Lösungswege zeigen immer nur eine Variante auf. Für andere Lösungswege oder Lösungsansätze, die schlüssig dargestellt werden und zu richtigen Zwischen- oder Endergebnissen führen, sind die vorgesehenen Bewertungseinheiten (BE) entsprechend zu vergeben. Wird jedoch der im Erwartungshorizont dargestellte Lösungsweg vom Prüfling verwendet, so sind die BE in der angegebenen Weise aufzuteilen. Damit die Möglichkeit besteht, den eigenen didaktischen Aspekten bei der Bewertung genug Raum zu geben, werden in der Regel die BE nicht kleinschrittig zugeordnet. Die Summe der BE pro Teilaufgabe ist verbindlich. Sind Zwischenergebnisse nicht korrekt ermittelt worden und die sich auf diesen Zwischenergebnissen aufbauenden weiteren Lösungswege schlüssig und nicht mit neuen Fehlern versehen, so sind die BE entsprechend zu erteilen (Folgefehler). Dieses Vorgehen ist nicht anzuwenden, wenn eine offensichtlich nicht sinnvolle Lösung unkommentiert bleibt oder der Lösungsweg durch den Fehler erheblich einfacher geworden ist. Die Verwendung von entsprechenden Operatoren in den Aufgabenstellungen erfordert vom Prüfling schriftliche Erläuterungen seiner Überlegungen. Bei der Bewertung dieser Erläuterungen, auf deren Darstellung im Erwartungshorizont weitgehend verzichtet wird, kann die Lehrkraft ihren pädagogischen Spielraum nutzen und sich an ihrer bisherigen Unterrichtspraxis orientieren. Im Erwartungshorizont wird teilweise auf formale mathematische Vollständigkeit verzichtet, wenn diese vom Schüler in der Regel nicht unbedingt zu erwarten ist.

Aufgabe Nr.:	Soll
1	40
2	32
3	28
Summe:	100

Abschlussprüfung Fachoberschule 2017
Mathematik

Aufgabenvorschlag B

1 Funktionsuntersuchung /40

Gegeben ist die Funktion *f* mit der Funktionsgleichung $f(x) = 10x^3 - 10x^2 - 20x + 20$, $x \in IR$.

1.1 Berechnen Sie die fehlenden Funktionswerte *f(x)* für folgende Werte von *x*. Tragen Sie die Ergebnisse in die Wertetabelle ein. **/5**

x	-1,5	-1	1	1,25	1,5
f(x)					

Notieren Sie aufgrund der ausgefüllten Wertetabelle, in welchen Intervallen oder an welcher Stelle genau die Nullstellen der Funktion *f* liegen.

1.2 Bestimmen Sie alle Schnittpunkte des Funktionsgraphen von *f* mit den Koordinatenachsen. **/6**

1.3 Bestimmen Sie die Hoch-, Tief- und Wendepunkte des Graphen von *f*. **/17**

1.4 Auf der nächsten Seite sehen Sie ein Koordinatensystem mit dem Funktionsgraphen von *f* . Das Koordinatensystem weist keine Skalierung (Einteilung der Achsen) auf. **/5**

Ergänzen Sie in dem Koordinatensystem die Einteilung der Achsen. (Hinweis: Dazu können Sie die Lage der in 1.1 bis 1.3 ermittelten Punkte verwenden.)

Skizzieren Sie in dem darunter liegenden Koordinatensystem den Graph der ersten Ableitungsfunktion *f´*.

1.5 In der oben gegebenen Funktion *f* wird der Koeffizient (die Vorzahl) von *x* durch die Variable *c*, $c \in IR$, ersetzt: **/7**

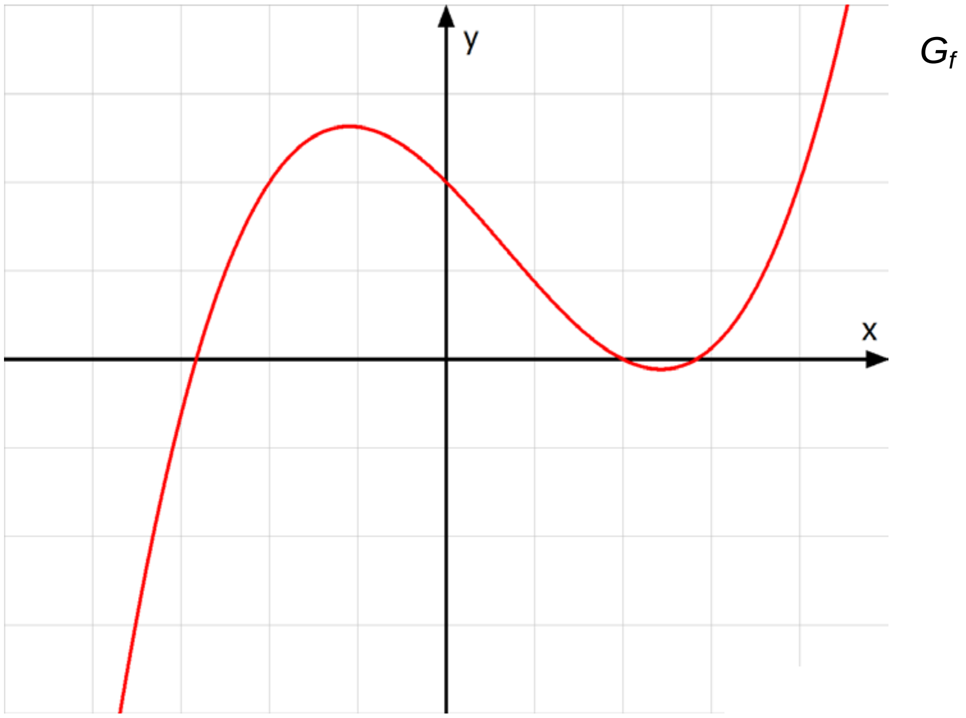
$$f(x) = 10x^3 - 10x^2 - c\,x + 20$$

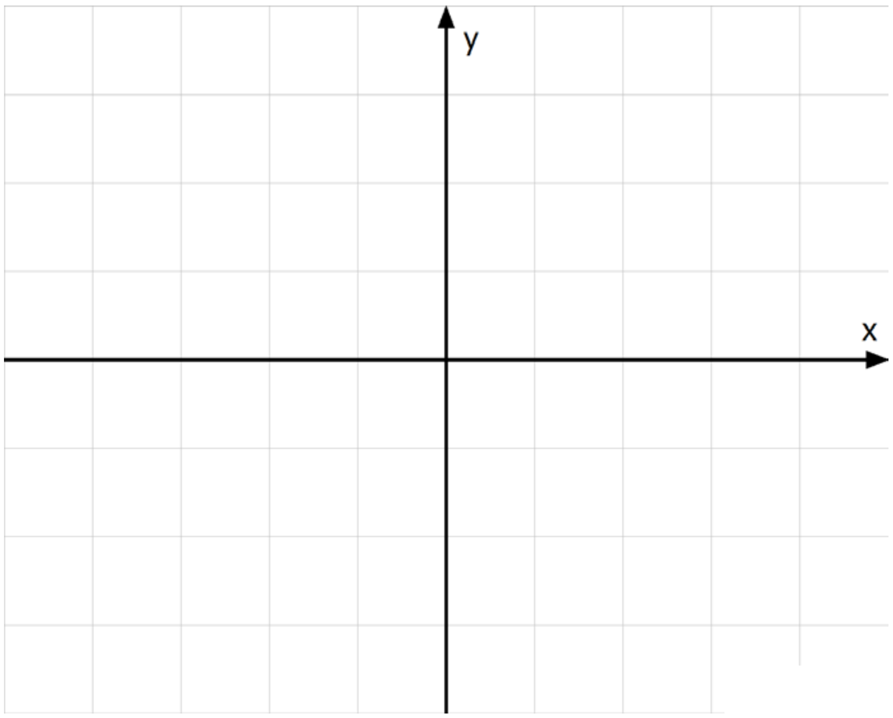
Zeigen Sie, dass die Funktion *f* keine Extremwerte besitzt, wenn $c = -4$ ist.

Zeigen Sie anschließend folgendes:

- Es muss $c > -\frac{10}{3}$ sein, damit die Funktion *f* Extremwerte besitzt.
- Für $c = -\frac{10}{3}$ besitzt die Funktion *f* einen Sattelpunkt.

Koordinatensystem zu Aufgabe 1.4





2 Integralrechnung /32

Auf dem Vorplatz eines großen Fußballstadions soll ein aus zwei Grautönen bestehender Belag gepflastert werden. In der Skizze sehen Sie den Blick von oben auf die beiden Farbflächen.

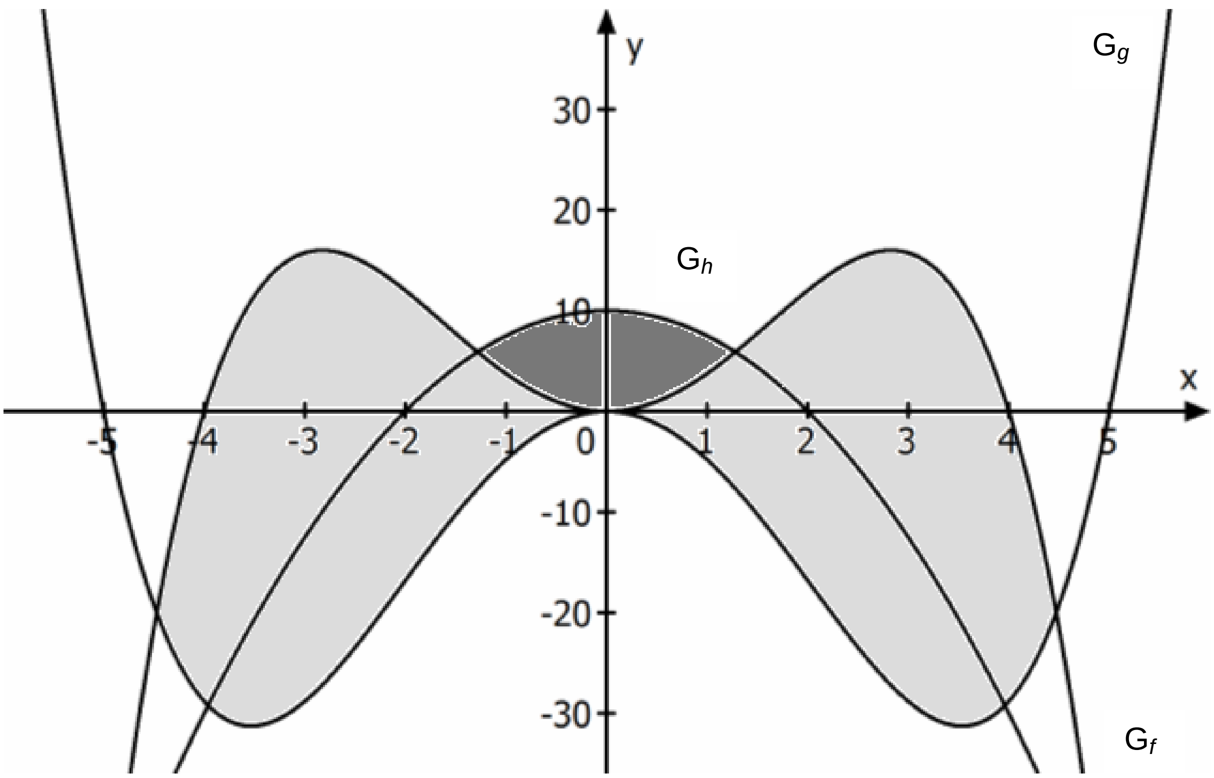
Die Pflasterung weist eine hellgraue und eine dunkelgraue Farbfläche auf.

Die Farbflächen werden durch die Graphen G_f, G_g und G_h der Funktionen f, g und h mit den folgenden Funktionsgleichungen begrenzt:

$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 4x^2,\ x \in IR$ und $g(x) = \frac{1}{5}x^4 - 5x^2,\ x \in IR$.

Von der Parabel h sind nur der Scheitelpunkt und die Nullstellen bekannt und können aus der Skizze abgelesen werden: $h(x) = a(x - x_S)^2 + y_S,\ \ x, a, x_S\ und\ y_S \in IR$.

<u>HINWEIS:</u> Rechnen Sie mit drei Stellen nach dem Komma.



1 Längeneinheit (LE) entspricht 10 Metern.

2.1 Jeder der drei Graphen hat eine Symmetrieeigenschaft. Geben Sie die jeweilige Symmetrieeigenschaft an und begründen Sie Ihre Angabe. **/3**

2.2 Zeigen Sie, dass $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{20}$ und $x_3 = -\sqrt{20}$ Schnittstellen der beiden Funktionsgraphen G_f und G_g sind. **/3**

2.3 Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der Parabel G_h. **/2**

Falls Sie die Funktionsgleichung nicht ermitteln können, gehen Sie von folgender Funktionsgleichung aus: $h(x) = -\frac{5}{2}x^2 + 10$

2.4 Berechnen Sie die Schnittstellen der beiden Funktionsgraphen G_f und G_h im Intervall $[-4;4]$. **/6**

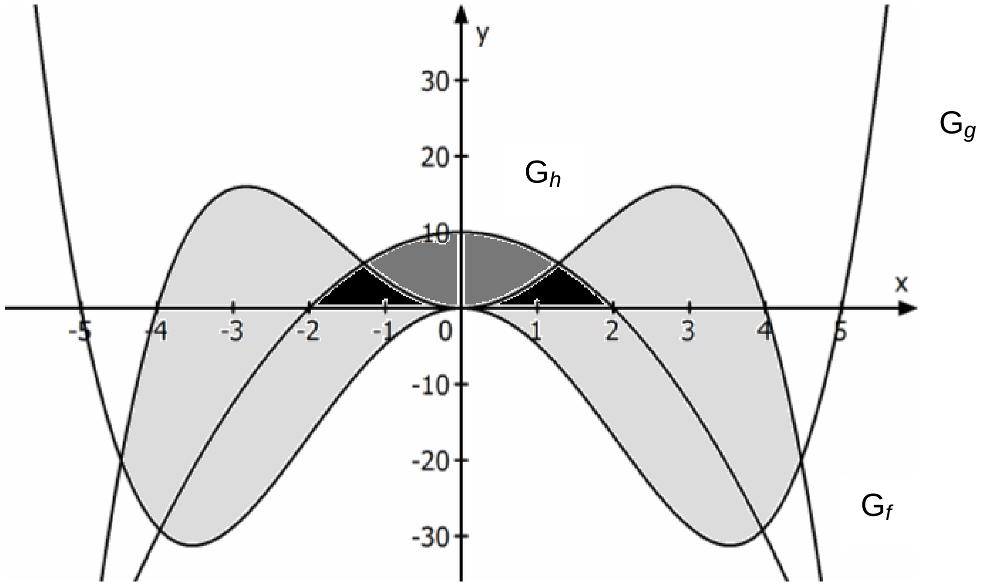
Falls Sie die Schnittstellen der Funktionsgraphen G_f und G_h nicht bestimmen können, gehen Sie von $x_1 \approx 1{,}281$ und $x_2 \approx -1{,}281$ aus.

2.5 Sehen Sie sich die Skizze auf der vorherigen Seite an und berechnen Sie die Größe der hellgrauen und der dunkelgrauen Farbflächen. **/12**

Geben Sie Ihr Ergebnis jeweils in Quadratmetern an.

2.6 Ein Architekt macht einen Vorschlag für das Einfügen einer dritten Farbe auf dem Pflaster. **/6**

Auf der Skizze sind die beiden neuen Farbflächen schwarz ausgefüllt.



Beschreiben Sie, wie die schwarzen Farbflächen berechnet werden und notieren Sie die entsprechenden Integrale.

3 Stochastik /28

Der Passagierraum eines Flugzeugs besteht aus 29 Reihen zu je 6 Sitzplätzen. In jeder Reihe gibt es 3 Sitzplätze links und 3 Sitzplätze rechts vom Mittelgang.
Die beiden äußersten Plätze jeder Sechser-Reihe sind Fensterplätze.

3.1 Ein junges Pärchen möchte nebeneinander sitzen (die beiden Gangplätze gelten nicht als benachbart), wobei es egal ist, wer links und wer rechts sitzt. **/5**

Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, die es im Flugzeug dafür gibt.

3.2 Die beiden nebeneinanderliegenden Plätze für das Pärchen werden zufällig aus den vorhanden Möglichkeiten dafür ausgewählt. **/3**

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass einer der beiden Plätze ein Fensterplatz ist.

Bei einem Flug sind bis auf fünf Plätze alle besetzt. 93 Passagiere sind weiblich.
Alle Passagiere erhalten ein Mittagessen, wahlweise vegetarisch oder nicht vegetarisch.
Insgesamt werden 71 vegetarische Essen ausgegeben, davon 58 an Frauen.

3.3 Erstellen Sie eine zu den Angaben passende Vierfeldertafel für die Merkmale Geschlecht und Menüwahl. **/8**

3.4 Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewählter Passagier weiblich und verzehrt ein vegetarisches Essen? **/3**

3.5 Einem Passagier wird nach dem Verzehr des nicht-vegetarischen Essens übel. Bestimmen Sie Wahrscheinlichkeit dafür, dass es ein Mann ist. **/4**

3.6 Untersuchen Sie, ob die Merkmale Menüwahl und Geschlecht des Passagiers stochastisch abhängig sind. **/5**

Abschlussprüfung Fachoberschule 2016
Mathematik

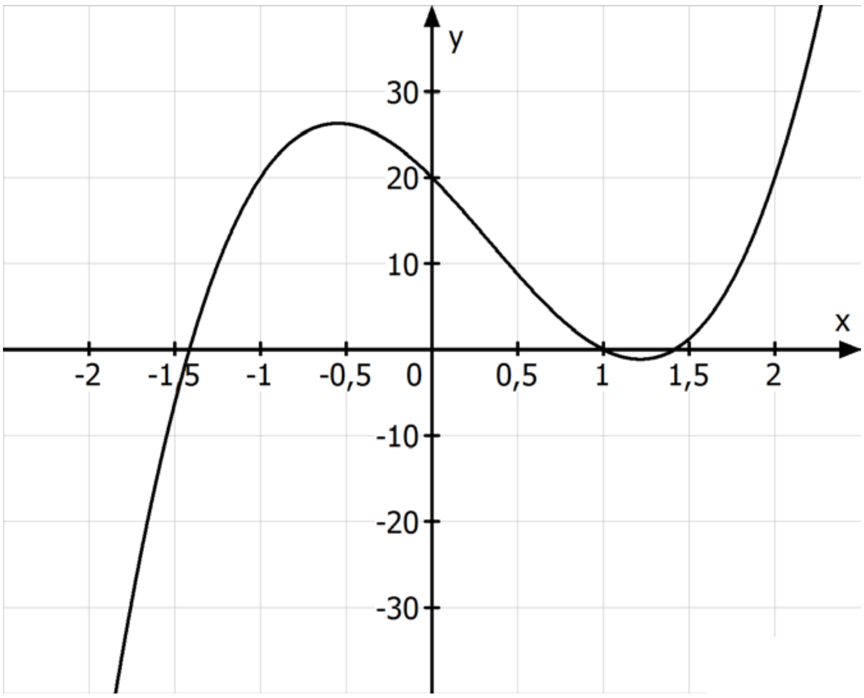
Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag B

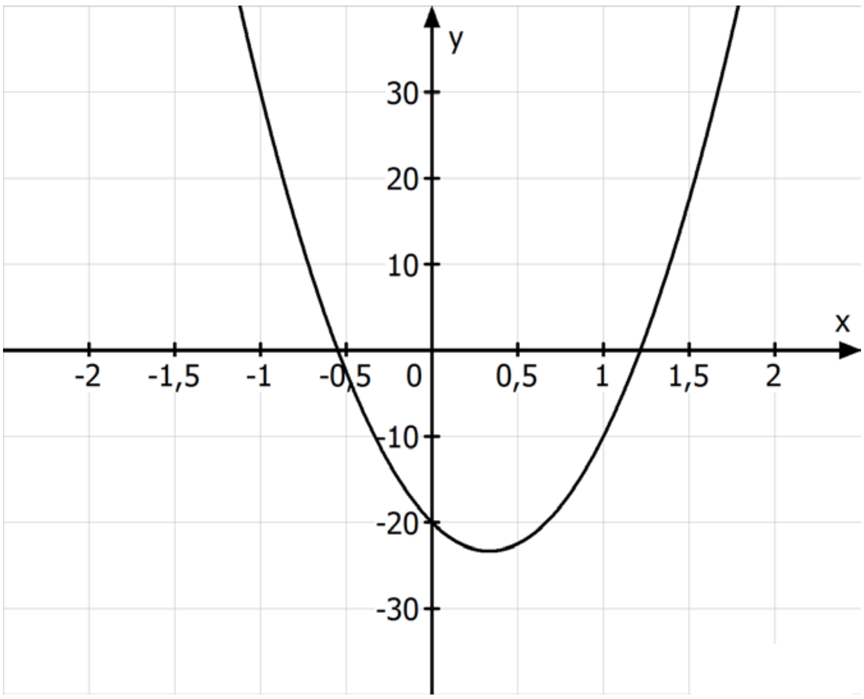
<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1.1</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>-1,5</td><td>-1</td><td>1</td><td>1,25</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>-6,25</td><td>20</td><td>0</td><td>$\approx$ -1,09</td><td>1,25</td></tr>
</table>
$x_1 = 1$ $x_2 \in [-1{,}5; -1]$ $x_3 \in [1{,}25; 1{,}5]$
</td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>
$f(0) = 20 \;\Rightarrow\; S_y\,(0|20)$
$f(x) = 0 = 10x^3 - 10x^2 - 20x + 20$
$0 = x^3 - x^2 - 2x + 2$
mit $x_1 = 1$ aus der Wertetabelle folgt:
$(x^3 - x^2 - 2x + 2) : (x - 1) = x^2 - 2$
$0 = x^2 - 2$
$x_{2/3} = \pm\sqrt{2}$
also: $S_{x_1}\,(1|0)$ $S_{x_2}\,(\sqrt{2}|0)$ $S_{x_3}\,(-\sqrt{2}\,|0)$
</td><td>6</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.3</td><td>
<u>Bestimmung der Extrempunkte</u>
$f'(x) = 0 = 30x^2 - 20x - 20$ notwendige Bedingung
$0 = x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$
$x_{1/2} = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{7}{9}}$
$x_1 \approx 1{,}22$ und $x_2 \approx -0{,}55$ mögliche Extremstellen

$f''(x) = 60x - 20$
$f''(x_E) \neq 0$ Überprüfen der notwendigen und hinreichenden Bedingung
$f''(1{,}22) > 0 \Rightarrow T\,(1{,}22|-1{,}13)$ lokales Minimum bei $x_2 = 1{,}22$
$f''(-0{,}55) < 0 \Rightarrow\; H(-0{,}55\,|26{,}31)$ lokales Maximum bei $x_3 = -0{,}55$

<u>Bestimmung der Wendepunkte</u>
$f''(x) = 0 = 60x - 20$ notwendige Bedingung
$0 = x - \frac{1}{3}$
$x = \frac{1}{3}$ mögliche Wendestellen
</td><td></td><td>6

6</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>$f'''(x)=60$
$f'''(x_W)\neq 0$ Überprüfen der notwendigen und hinreichenden Bedingung
$f'''(\frac{1}{3})\neq 0 \Rightarrow W(\frac{1}{3}\mid 12,6)$ ist Wendepunkt</td><td></td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>1.4</td><td>


</td><td></td><td>2</td><td>3</td></tr>
</table>

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
1.5	Aus $c = -4$ folgt: $f(x) = 10x^3 - 10x^2 + 4x + 20$ $f'(x) = 30x^2 - 20x + 4$ $0 = 30x^2 - 20x + 4$ $0 = x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{15}$ $x_{1/2} = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{2}{15}} \Rightarrow x_{1/2} \notin IR$			2
	Allgemein: $f'(x) = 30x^2 - 20x - c$ $0 = 30x^2 - 20x - c$ $0 = x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{c}{30}$ $x_{1/2} = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{c}{30}}$ $\frac{1}{9} + \frac{c}{30} \geq 0$ für $c \geq -\frac{10}{3}$ Insbesondere ergibt sich für $c = -\frac{10}{3}$:			3
	$x_{1/2} = \frac{1}{3} \pm 0$ $f''(\frac{1}{3}) = 0$ und $f'''(\frac{1}{3}) \neq 0$, also liegt ein Sattelpunkt vor.			2
	Mögliche BE	11	19	10
	Summe Aufgabe	40		

Teilaufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
2.1	Alle drei Funktionsgraphen sind achsensymmetrisch zur y-Achse, da die in den Funktionstermen vorkommenden Exponenten alle gerade sind. Das gilt natürlich auch für die Parabel zweiten Grades, da der Scheitelpunkt nur in Richtung der y-Achse verschoben ist.	3		
2.2	Es gilt: $f(0)=g(0)=0$ $f(\sqrt{20})=g(\sqrt{20})=-20$ $f(-\sqrt{20})=g(-\sqrt{20})=-20$	3		
2.3	$h(x)=a(x-x_S)^2+y_S$ $0=a(2-0)^2+10$ $0=4a+10$ $a=-\frac{5}{2}$ Also: $h(x)=-\frac{5}{2}x^2+10$	2		
2.4	Bestimmung der Schnittpunkte der zwei Funktionsgraphen G_f und G_h: $f(x)=h(x)$ $0=f(x)-h(x)$ $0=-\frac{1}{4}x^4+\frac{13}{2}x^2-10$ $0=x^4-26x^2+40$ Substitution: $x^2=u$ $0=u^2-26u-40$ $u_{1/2}=13\pm\sqrt{129}$ $u_1\approx 24{,}358$ und $u_2\approx 1{,}642$ Resubstitution ergibt: $x_{1/2}\approx\pm 1{,}281$ und $x_{3/4}\approx\pm 4{,}935$, $x_{3/4}$ nicht relevant für die Aufgabe		6	
2.5	$A_1=2\left(\int_0^{1{,}281}(h(x)-f(x))\,dx\right)$ Die Differenzfunktion lautet: $d(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{13}{2}x^2+10$ $A_1=2\left(\int_0^{1{,}281}(\frac{1}{4}x^4-\frac{13}{2}x^2+10)\,dx\right)$ $A_1=2\left(\frac{1}{20}x^5-\frac{13}{6}x^3+10x\ \Big\vert_0^{1{,}281}\right)$ Mit $D(1{,}281)\approx 8{,}428$ folgt $A_1=2\cdot 8{,}428=16{,}856$ Die dunkelgraue Farbfläche beträgt 1685,8 m^2.		6	

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
	$A_2 = 2\left(\int_0^{\sqrt{20}} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \right)$ Die Differenzfunktion lautet: $d(x) = -\frac{9}{20}x^4 + 9x^2$ $A_2 = 2\left(\int_0^{\sqrt{20}} \left(-\frac{9}{20}x^4 + 9x^2\right)\mathrm{d}x \right)$ $A_2 = 2\left(-\frac{9}{100}x^5 + 3x^3 \Big\|_0^{\sqrt{20}} \right)$ Mit $D(\sqrt{20}) \approx 107{,}331$ folgt $A_2 = 2 \cdot 107{,}331 = 214{,}662$ Die hellgraue Farbfläche beträgt 21466,2 m².		6	
2.6	Zunächst werden die bereits errechneten Schnittstellen der beiden Funktionsgraphen G_f und G_h benötigt. Ausreichend ist eine der beiden Schnittstellen, da beide Funktionsgraphen achsensymmetrisch sind. Als nächstes wird eine der beiden Nullstellen der Funktion *h* errechnet bzw. aus der Skizze abgelesen. Dann werden das Integral der Funktion *f* in den Grenzen von Null bis zur Schnittstelle sowie das Integral der Funktion *h* in den Grenzen von der Schnittstelle bis zur Nullstellen berechnet. Die beiden Ergebnisse werden addiert und mit 2 multipliziert. $A = 2\left(\int_0^{1{,}281} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1{,}281}^{2} h(x)\,\mathrm{d}x \right)$ Alternative Lösungswege sind möglich.			6
	Mögliche BE	8	18	6
	Summe Aufgabe	32		

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>3.1</td><td>Pro Reihe gibt es 2 Möglichkeiten auf der linken Seite und 2 auf der rechten Seite; damit ergeben sich insgesamt $29 \cdot 4 = 116$ Möglichkeiten für das junge Pärchen.</td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3.2</td><td>Von den 4 Möglichkeiten pro Reihe sind 2 Möglichkeiten günstig, nämlich die mit einem Fensterplatz; deshalb ergibt sich die Wahrscheinlichkeit 50%.</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3.3</td><td>Geeignete Ereignisdefinitionen, z. B.
F: Passagier ist weiblich
V: Passagier wählt das vegetarische Essen.

Erstellen der Vierfelder-Tafel:
<table>
<tr><th></th><th>F</th><th>$\overline{F}$</th><th></th></tr>
<tr><td>V</td><td>58</td><td>13</td><td>71</td></tr>
<tr><td>$\overline{V}$</td><td>35</td><td>63</td><td>98</td></tr>
<tr><td></td><td>93</td><td>76</td><td>169</td></tr>
</table></td><td>2</td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>3.4</td><td>Ablesen der Werte aus der Vierfeldertafel:
$P(F \cap V) = \frac{58}{169} \approx 34\%$</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>3.5</td><td>Ablesen der Werte aus der Vierfeldertafel:
$P_{\overline{V}}\left(\overline{F}\right) = \frac{P\left(\overline{F} \cap \overline{V}\right)}{P\left(\overline{V}\right)} = \frac{63}{98} \approx 64\%$</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>3.6</td><td>Bedingung für stochastische Unabhängigkeit:
$P_{\overline{V}}\left(\overline{F}\right) = P_V\left(\overline{F}\right) = P\left(\overline{F}\right)$
$P_V\left(\overline{F}\right) = \frac{13}{71} \approx 18\%$ $P\left(\overline{F}\right) = \frac{76}{169} \approx 45\%$
Der Anteil der Männer unter den vegetarisch essenden Passagieren beträgt 18% und ist deutlich geringer als der Anteil der Männer unter den Passagieren insgesamt (45%).
Damit sind Menüwahl und Geschlecht stochastisch abhängig.</td><td></td><td></td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>Mögliche BE</td><td>10</td><td>13</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe Aufgabe</td><td colspan="3">28</td></tr>
</table>