



Abschlussprüfung an der Fachoberschule im Schuljahr 2022/2023

Fach	Mathematik (B)
Nur für die Lehrkraft	
Prüfungstag	31.05.2023
Prüfungszeit	09:00 – 13:00 Uhr
Zugelassene Hilfsmittel	Nicht graphikfähiger Taschenrechner mit gelöschtem Programmiereteil, kein CAS-Rechner, Handbuch/Gebrauchsanleitung muss vorliegen, Formelsammlung, Rechtschreib-Wörterbuch (siehe Aufgabendeckblatt)
Allgemeine und spezielle Arbeitshinweise	Beachten Sie bitte das Schülerdeckblatt.
Erwartungshorizonte	<p>Die Beschreibungen der erwarteten Leistungen enthalten keine vollständigen Lösungen, sondern nur kurze Angaben. Hier nicht genannte, aber gleichwertige Lösungswege sind gleichberechtigt.</p> <p>Die aufgeführten Lösungswege zeigen immer nur eine Variante auf. Für andere Lösungswege oder Lösungsansätze, die schlüssig dargestellt werden und zu richtigen Zwischen- oder Endergebnissen führen, sind die vorgesehenen Bewertungseinheiten (BE) entsprechend zu vergeben. Wird jedoch der im Erwartungshorizont dargestellte Lösungsweg vom Prüfling verwendet, so sind die BE in der angegebenen Weise aufzuteilen. Damit die Möglichkeit besteht, den eigenen didaktischen Aspekten bei der Bewertung genug Raum zu geben, werden in der Regel die BE nicht kleinschrittig zugeordnet. Die Summe der BE pro Teilaufgabe ist verbindlich.</p> <p>Sind Zwischenergebnisse nicht korrekt ermittelt worden und die sich auf diesen Zwischenergebnissen aufbauenden weiteren Lösungswege schlüssig und nicht mit neuen Fehlern versehen, so sind die BE entsprechend zu erteilen (Folgefehler). Dieses Vorgehen ist nicht anzuwenden, wenn eine offensichtlich nicht sinnvolle Lösung unkommentiert bleibt oder der Lösungsweg durch den Fehler erheblich einfacher geworden ist.</p> <p>Die Verwendung von entsprechenden Operatoren in den Aufgabenstellungen erfordert vom Prüfling schriftliche Erläuterungen seiner Überlegungen. Bei der Bewertung dieser Erläuterungen, auf deren Darstellung im Erwartungshorizont weitgehend verzichtet wird, kann die Lehrkraft ihren pädagogischen Spielraum nutzen und sich an ihrer bisherigen Unterrichtspraxis orientieren. Im Erwartungshorizont wird teilweise auf formale mathematische Vollständigkeit verzichtet, wenn diese vom Schüler in der Regel nicht unbedingt zu erwarten ist.</p>

Aufgabe Nr.	Soll
1	40
2	30
3	30
Summe:	100



1 Funktionsuntersuchung

/40

Gegeben ist die Parabel p mit der Funktionsgleichung

$$p(x) = \frac{1}{25}x^2 - \frac{9}{5}x + 25; x \in \mathbb{R}.$$

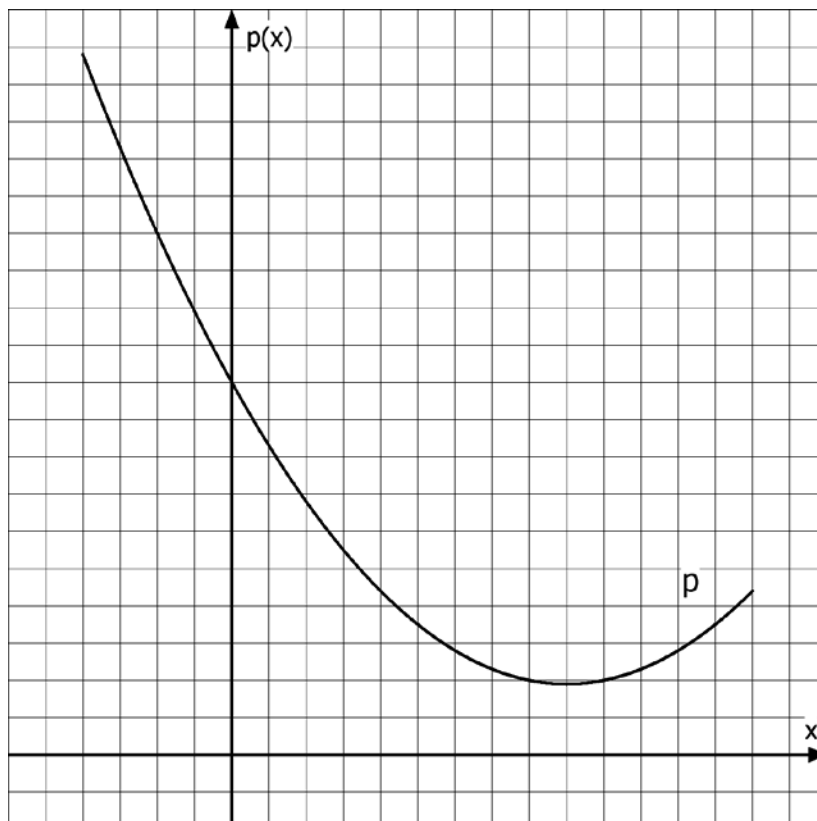
Geben Sie bei den folgenden Aufgaben Ihre Ergebnisse auf drei Stellen nach dem Komma an.

1.1 Begründen Sie, weshalb die Parabel p nicht achsensymmetrisch zur y -Achse verläuft. /2

1.2 Ermitteln Sie die Schnittpunkte der Parabel p mit der Geraden g mit $g(x) = 17$. /4

1.3 Ermitteln Sie den Scheitelpunkt der Parabel p . /3
Geben Sie die Funktionsgleichung der Parabel p in der Scheitelpunktform an.

Die Parabel p ist im Intervall $-10 \leq x \leq 35$ in dem untenstehenden Koordinatensystem dargestellt.



1.4 Ergänzen Sie bei dem Koordinatensystem die Einteilung der beiden Achsen. /2

Fortsetzung auf der nächsten Seite

- 1.5** Bestimmen Sie die Stelle, an der die Tangente an die Parabel p die Steigung $m = 1,8$ besitzt. /3

In einem Forschungslabor muss die Innentemperatur stets konstant gehalten werden. Bei hohen Außentemperaturen muss gekühlt werden, bei niedrigen Außentemperaturen muss geheizt werden. Die Parabel p stellt näherungsweise den täglichen Energieverbrauch des Labors in Abhängigkeit von der Außentemperatur dar. Dabei gibt $p(x)$ den Energieverbrauch in kWh an und x die Außentemperatur in °C.

- 1.6** Geben Sie den Energieverbrauch des Labors in kWh an, wenn die Außentemperatur 0 °C beträgt. /2

Nach einer Verbesserung der Heiz- und Klimaanlage in dem Labor kann der Energieverbrauch in Abhängigkeit zur Außentemperatur nun näherungsweise beschrieben werden durch die Funktion f mit

$$f(x) = ax^3 + 0,08x^2 - 2x + 18; x \in \mathbb{R} \text{ und } -10 \leq x \leq 33.$$

- 1.7** Bestimmen Sie den Wert des Parameters a , wenn das Labor bei einer Außentemperatur von -10 °C einen Energieverbrauch von 47 kWh hat. /3

Im Folgenden gilt: $a = -0,001$.

- 1.8** Berechnen Sie, bei welcher Außentemperatur der Energieverbrauch des Labors nach der Verbesserung am geringsten ist. /8
Geben Sie auch den entsprechenden Energieverbrauch an.

- 1.9** Berechnen Sie, bei welcher Außentemperatur der Energieverbrauch am stärksten angestiegen ist. /4

- 1.10** Die Parabel p und der Graph der Funktion f haben einen Schnittpunkt an der Stelle $x = -10$. /2
Deuten Sie diesen Schnittpunkt im Sachzusammenhang.

- 1.11** Prüfen Sie rechnerisch, ob die Parabel p und der Graph der Funktion f weitere Schnittpunkte besitzen. /7

2 Integralrechnung

/30

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^4 + 23x^2 + 50$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Der Graph der Funktion f ist in Abbildung 1 dargestellt.

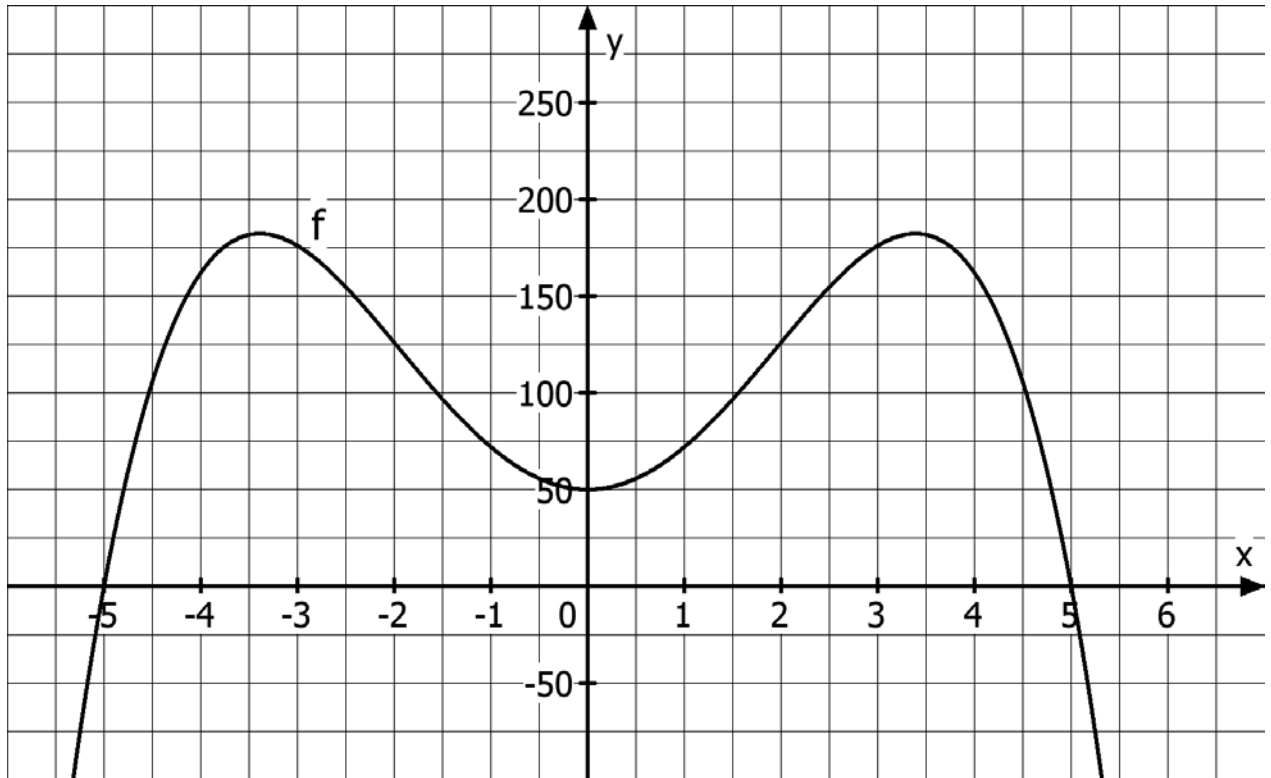


Abbildung 1

Zusätzlich sind die Eckpunkte $A(-5|0)$, $B(5|0)$, $C(3|126)$ und $D(-3|126)$ eines gleichschenkligen Trapezes gegeben.

- 2.1 Zeichnen Sie das Trapez in das Koordinatensystem in der *Abbildung 1* ein. /2
Beschriften Sie die Eckpunkte des Trapezes.
- 2.2 Berechnen Sie den Flächeninhalt A_1 des Trapezes aus 2.1. /2
- 2.3 Zeigen Sie rechnerisch, dass die Punkte A und B die Schnittpunkte des Graphen der Funktion f mit der x -Achse sind (siehe *Abbildung 1*). /2
- 2.4 Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche A_2 , die von dem Graphen der Funktion f und der x -Achse vollständig eingeschlossen wird. /6
- 2.5 Eine Gerade g verläuft durch die Punkte B und C . /2
Weisen Sie nach, dass diese Gerade g durch die Funktionsgleichung $g(x) = -63x + 315$ beschrieben wird.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

- 2.6** Eine weitere Gerade h mit der Funktionsgleichung $h(x) = 126$ verläuft durch die Punkte C und D und schneidet den Graphen der Funktion f mehrmals. Berechnen Sie die Schnittstellen der Graphen von f und h . /6

Die Seiten des Trapezes im 1. Quadranten und der Graph der Funktion f schließen die Fläche A_3 vollständig ein (Abbildung 2).

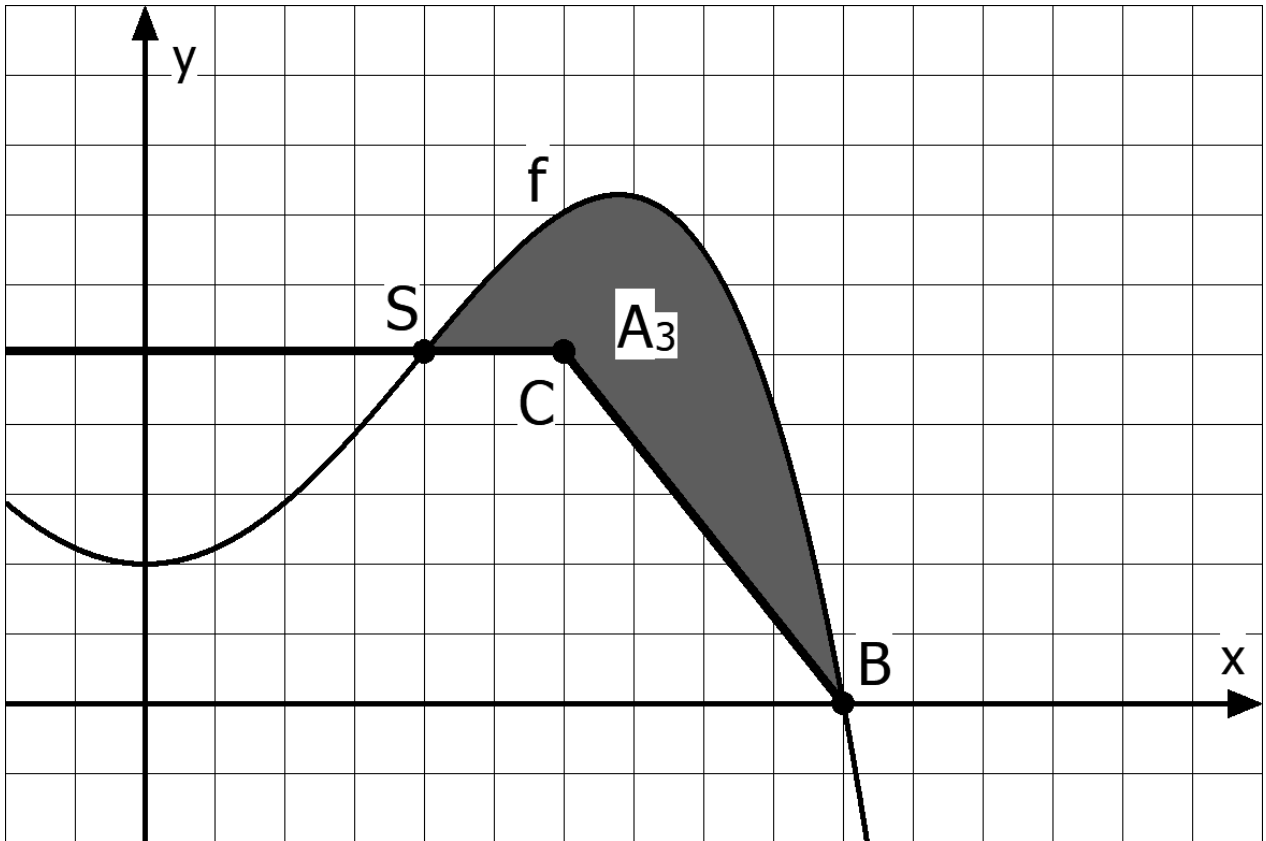


Abbildung 2

- 2.7** Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche A_3 . Verwenden Sie hierfür alle Angaben aus der *Abbildung 2*. /7
- 2.8** Die folgende Aussage ist richtig: /3

$$\int_0^5 (-4x^4 + 92x^2 + 200) dx = 2 \cdot A_2$$

Begründen Sie die Richtigkeit dieser Aussage, ohne den Wert des Integrals direkt auszurechnen.

3 Stochastik**/30**

Ein Kurierdienst setzt für seine Fahrten Stammkräfte und Aushilfskräfte ein. Der Kurierdienst nennt den Kunden den voraussichtlichen Lieferzeitpunkt und wirbt damit, dass die Sendungen pünktlich geliefert werden. Die Geschäftsleitung hat die Fahrten der letzten drei Monate ausgewertet.

Insgesamt wurden 12800 Sendungen ausgeliefert, davon waren 11136 Lieferungen pünktlich. Von den pünktlichen Lieferungen erfolgten 25 % durch Aushilfskräfte. Insgesamt wurden 77 % der Sendungen durch Stammkräfte ausgeliefert.

- 3.1** Erstellen Sie zu diesem Sachverhalt eine Vierfeldertafel. **/5**
Benennen Sie die verwendeten Abkürzungen.
- 3.2** Ermitteln Sie, welcher Anteil der Sendungen, die von Stammkräften ausgeliefert wurden, unpünktlich geliefert wurde. **/2**
- 3.3** Ermitteln Sie, welcher Anteil der unpünktlich gelieferten Sendungen von einer Aushilfskraft ausgeliefert wurde. **/2**
- 3.4** Die angegebenen oder ermittelten relativen Häufigkeiten können für die Zukunft als Wahrscheinlichkeiten angenommen werden. **/4**

Betrachtet werden die beiden Ereignisse:

AK: „Eine Sendung wird durch eine **Aushilfskraft** ausgeliefert.“

PÜ: „Eine Sendung wird **pünktlich** ausgeliefert.“

Untersuchen Sie, ob die Ereignisse AK und PÜ stochastisch unabhängig sind.

- 3.5** Ein Mitglied der Geschäftsleitung macht folgende Aussage: **/3**

„Die Aushilfskräfte arbeiten fast nur am Wochenende. Daher ist die Aussagekraft der statistischen Auswertung stark eingeschränkt.“

Beurteilen Sie diese Aussage und erläutern Sie Ihre Beurteilung.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Ein Fahrer, der stets mehrere Sendungen bei seinen Fahrten ausliefert, untersucht die Pünktlichkeit genauer. Er beobachtet bei sich selbst: Wenn er eine Sendung unpünktlich ausliefert, kann er die Zeit bei der Fahrt zum nächsten Kunden nur manchmal wieder aufholen.

Ganz genau hat er folgende Feststellung gemacht:

Solange er pünktlich ist, beträgt die Wahrscheinlichkeit, die nächste Sendung auch pünktlich auszuliefern, 85 %. Insbesondere die erste Lieferung ist immer zu 85 % pünktlich, da er von seinem Startpunkt immer pünktlich losfährt. Wenn er jedoch bei einer Lieferung unpünktlich ist, sinkt die Wahrscheinlichkeit, die nächste Sendung pünktlich auszuliefern, auf 40 %.

Der Fahrer will drei Sendungen ausliefern.

- 3.6** Erstellen Sie für den oben beschriebenen Fall ein Baumdiagramm. **/6**
Geben Sie dabei alle Zweigwahrscheinlichkeiten an.
Benennen Sie die verwendeten Abkürzungen.
- 3.7** Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse: **/6**
 E_1 : „Alle drei Sendungen werden pünktlich ausgeliefert.“
 E_2 : „Nur genau eine Sendung wird unpünktlich ausgeliefert.“
 E_3 : „Höchstens zwei Sendung werden unpünktlich ausgeliefert.“

Bei der Weihnachtsfeier des Kurierdienstes werden stets zwei Geschenke verlost. Ein Fahrer erhält einen großen Geschenkkorb und ein anderer Fahrer einen kleinen Geschenkkorb. Die Gewinner werden stets zufällig ermittelt.

- 3.8** Der Kurierdienst hat 8 Fahrer. **/2**
Bestimmen Sie, die Anzahl der Möglichkeiten für die zwei Gewinner der beiden Preise.



Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag B

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
1.1	Die Funktionsgleichung $p(x)$ besitzt gerade und ungerade Exponenten von x .	2		
1.2	$17 = \frac{1}{25}x^2 - \frac{9}{5}x + 25$ $0 = x^2 - 45x + 200$ $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \frac{45}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{45}{2}\right)^2 - 200}$ $x_1 = 40 ; x_2 = 5$ $p(5) = 17 \Rightarrow S_1(40 17) ; S_2(5 17)$	4		
1.3	$x_S = -\frac{p}{2} = \frac{45}{2} = 22,5$ $y_S = p(22,5) = \frac{1}{25} \cdot 22,5^2 - \frac{9}{5} \cdot 22,5 + 25 = 4,75 ; S(22,5 4,75)$ $p(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$ $a = \frac{1}{25}$ $p(x) = \frac{1}{25}(x - 22,5)^2 + 4,75$	3		
1.4		2		

Teil- aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
1.5	$p'(x) = \frac{2}{25}x - \frac{9}{5}$ $1,8 = \frac{2}{25}x - \frac{9}{5}$ $3,6 = \frac{2}{25}x$ $x_t = 45$		3	
1.6	$p(0) = 25$ Bei einer Außentemperatur von 0°C beträgt der Energieverbrauch 25 kWh.	2		
1.7	$47 = a \cdot (-10)^3 + 0,08 \cdot (-10)^2 - 2 \cdot (-10) + 18$ $47 = -1000a + 46$ $a = -0,001$			3
1.8	$f'(x) = -0,003x^2 + 0,16x - 2$ $0 = -0,003x^2 + 0,16x - 2$ $0 = x^2 - \frac{160}{3}x + \frac{2000}{3}$ $x_{E1/E2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \frac{80}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{80}{3}\right)^2 - \frac{2000}{3}}$ $x_{E1} = \frac{100}{3}; x_{E2} = 20$ $f''(x) = -0,006x + 0,16$ $f''\left(\frac{100}{3}\right) = -0,006 \cdot \frac{100}{3} + 0,16 < 0; \text{Hochpunkt}$ $f''(20) = -0,006 \cdot 20 + 0,16 > 0; \text{Tiefpunkt}$ $f(20) = -0,001 \cdot 20^3 + 0,08 \cdot 20^2 - 2 \cdot 20 + 18 = 2$ Bei einer Außentemperatur von 20 °C ist der Energieverbrauch am geringsten und beträgt 2 kWh.		8	

Teil- aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
1.9	$0 = -0,006x + 0,16$ $0,006x = 0,16$ $x_W = \frac{80}{3}$ $f'''(x) = -0,006 \neq 0$; Wendestelle bei x_W . Bei einer Außentemperatur von ca. 26,667 °C ist der Energieverbrauch am stärksten angestiegen. <i>Weiterer Nachweis nicht erforderlich, da x_W zwischen zwei Extrempunkten liegt.</i>			4
1.10	Bei -10 °C ist der Energieverbrauch nach der Verbesserung genauso hoch wie vor der Verbesserung.		2	
1.11	$\frac{1}{25}x^2 - \frac{9}{5}x + 25 = -0,001x^3 + 0,08x^2 - 2x + 18$ $0 = -0,001x^3 + 0,04x^2 - 0,2x - 7$ $(-0,001x^3 + 0,04x^2 - 0,2x - 7) : (x + 10) = -0,001x^2 + 0,05x - 0,7$ $\underline{-(-0,001x^3 - 0,01x^2)}$ $(0,05x^2 - 0,2x)$ $\underline{-(0,05x^2 + 0,5x)}$ $(-0,7x - 7)$ $\underline{(-0,7x - 7)}$ 0 $0 = -0,001x^2 + 0,05x - 0,7$ $0 = x^2 - 50x + 700$ $\frac{p^2}{4} - q = 625 - 700 < 0$, also hat die quadratische Gleichung keine Lösung. Die Parabel p und der Graph der Funktion f besitzen keine weiteren Schnittpunkte.		7	
	Mögliche BE	13	20	7
	Summe Aufgabe	40		

Teil- aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
2.1		2		
2.2	$A_{\text{Trapez}} = \frac{10+6}{2} \cdot 126 = 1008 \text{ FE.}$	2		
2.3	$f(-5) = -(-5)^4 + 23 \cdot (-5)^2 + 50 = 0$ $f(5) = -5^4 + 23 \cdot 5^2 + 50 = 0$	2		
2.4	$A_2 = 2 \cdot \int_0^5 f(x) dx = 2 \cdot \int_0^5 (-x^4 + 23x^2 + 50) dx$ $A_2 = 2 \cdot \left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{23}{3}x^3 + 50x \right]_0^5 = 2 \cdot \left(\left(\frac{7000}{3} \right) - 0 \right) = \frac{3500}{3} \text{ FE}$ $A_2 = 1166,\bar{6} \text{ FE}$		6	
2.5	$g(5) = -63 \cdot 5 + 315 = 0$ $g(3) = -63 \cdot 3 + 315 = 126$	2		
2.6	$h(x) = f(x)$ $126 = -x^4 + 23x^2 + 50 \text{ (Normierung)}$ $\Rightarrow 0 = x^4 - 23x^2 + 76 \text{ (Substitution: } x^2 = z)$ $\Rightarrow 0 = z^2 - 23z + 76$ $p\text{-}q\text{-Formel anwenden: } z_1 = 19; z_2 = 4$ $\text{Die Resubstitution: } \sqrt{z} = \pm x_{1/2} \text{ ergibt:}$ $x_1 \approx -4,36 \text{ und } x_2 \approx 4,36$ $x_3 = -2 \text{ und } x_4 = 2$			6

Teil- aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
2.7	$A_3 = \int_2^3 (f(x) - h(x)) dx + \int_3^5 (f(x) - g(x)) dx$ $A_3 = \int_2^3 (-x^4 + 23x^2 - 76) dx + \int_3^5 (-x^4 + 23x^2 + 63x - 265) dx$ $A_3 = \left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{23}{3}x^3 - 76x \right]_2^3 + \left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{23}{3}x^3 + \frac{63}{2}x^2 - 265x \right]_3^5$ $A_3 = \frac{412}{15} + \frac{2234}{15} = \frac{882}{5} = 176,40 \text{ FE}$		7	
2.8	<p>Flächeninhalt der Fläche aus 2.4 verdoppeln:</p> $2 \cdot A_2 = 2 \cdot \int_{-5}^5 f(x) dx = 2 \cdot \int_{-5}^5 (-x^4 + 23x^2 + 50) dx$ <p>Aufgrund der Achsensymmetrie zur y-Achse:</p> $2 \cdot A_2 = 2 \cdot \left(2 \cdot \int_0^5 f(x) dx \right) = 4 \cdot \int_0^5 (-x^4 + 23x^2 + 50) dx$ $= \int_0^5 4 \cdot (-x^4 + 23x^2 + 50) dx$ $= \int_0^5 (-4x^4 + 92x^2 + 200) dx$			3
	Mögliche BE	8	19	3
	Summe Aufgabe	30		

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB																		
		I	II	III																
3.1	<p>P: Pünktlich S: Stammkräfte</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th></th> <th>P</th> <th>\bar{P}</th> <th>Σ</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>S</td> <td>8352</td> <td>1504</td> <td>9856</td> </tr> <tr> <td>\bar{S}</td> <td>2784</td> <td>160</td> <td>2944</td> </tr> <tr> <td>Σ</td> <td>11136</td> <td>1664</td> <td>12800</td> </tr> </tbody> </table> <p>Fett: Angaben wurden direkt oder durch Umrechnung von Prozentwerten aus dem Text entnommen.</p>		P	\bar{P}	Σ	S	8352	1504	9856	\bar{S}	2784	160	2944	Σ	11136	1664	12800	5		
	P	\bar{P}	Σ																	
S	8352	1504	9856																	
\bar{S}	2784	160	2944																	
Σ	11136	1664	12800																	
3.2	$h = \frac{1504}{9856} \approx 0,153$ <p>Die Angaben die Ergebnisse in Prozentwerten sind bei dieser und allen weiteren Aufgaben ebenfalls möglich. Bei Prozentwerten reicht eine Angabe von einer Nachkommastelle.</p>	2																		
3.3	$h = \frac{160}{1664} \approx 0,096$	2																		
3.4	<p>Bedingung für stochastische Unabhängigkeit: $P_{AK}(P\ddot{U}) = P(P\ddot{U})$</p> $P_{AK}(P\ddot{U}) = \frac{2784}{2944} = \frac{87}{92} \approx 0,946$ $P(P\ddot{U}) = \frac{11136}{12800} = \frac{87}{100} = 0,87$ $P_{AK}(P\ddot{U}) \neq P(P\ddot{U})$ <p>Unter den Aushilfskräften ist der Anteil der pünktlich ausgelieferten Sendungen höher als der Anteil der insgesamt pünktlich ausgelieferten Sendungen. Damit sind AK und PÜ stochastisch abhängig.</p>			4																
3.5	<p>Da an den Wochenenden unter Umständen andere Bedingungen für die Fahrer vorliegen, ist die Aussage der Geschäftsleitung begründet und vermutlich zutreffend. Beispielsweise ist davon auszugehen, dass an den Wochenenden eine andere Verkehrssituation vorliegt als an den Wochentagen</p> <p><i>Andere sinnvolle Beurteilungen und Erläuterungen sind ebenfalls zu akzeptieren..</i></p>			3																

Teil- aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
3.6 P: pünktlich, \bar{P} : nicht pünktlich 				
3.7 $P(E_1) = 0,85 \cdot 0,85 \cdot 0,85 \approx 0,614$ $P(E_2) = 0,85 \cdot 0,85 \cdot 0,15 + 0,85 \cdot 0,15 \cdot 0,4 + 0,15 \cdot 0,4 \cdot 0,85 \approx 0,210$ $P(E_3) = 1 - 0,15 \cdot 0,6 \cdot 0,6 \approx 0,946$				6
3.8 $8 \cdot 7 = 56$ Es existieren 56 verschiedene Möglichkeiten				2
Mögliche BE		9	14	7
Summe Aufgabe				30