Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2016

Mathematik

Grundkurs

Aufgabenvorschlag

Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist bzw. für Berlin von der zuständigen Senatsverwaltung für die Verwendung im Abitur zugelassen ist. Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder des automatisierten Lösens von Gleichungen verfügen
Gesamtbearbeitungszeit:	210 Minuten inkl. Lese- und Auswahlzeit

Aufgabenstellung 1

Thema/Inhalt: Analysis

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 1.1 oder 1.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 2

Thema/Inhalt: Analytische Geometrie

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 3

Thema/Inhalt: Stochastik

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 3.1 oder 3.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabe 1.1: Medikament

Nach der Einnahme eines Medikaments geht der Wirkstoff des Medikaments in das Blut über, wobei sich die Konzentration des Wirkstoffs im Blut mit der Zeit verändert.

Die Konzentration wird für $0 \le t \le 6$ durch die Funktion f mit $f(t) = \frac{1}{4}t^3 - 3t^2 + 9t$ beschrieben (Graph siehe Anlage). Dabei ist t die Zeit in Stunden seit Beginn der Einnahme und $f(t)$ die Konzentration in µg pro Liter.

a) Geben Sie anhand des Graphen die Zeitintervalle an, in denen die Konzentration des Wirkstoffs im Blut zunimmt und in denen sie abnimmt.
Das Medikament ist nur wirksam, wenn die Konzentration des Wirkstoffs im Blut mindestens 3,7 µg pro Liter beträgt.

Geben Sie ein Zeitintervall an, in dem das Medikament wirksam ist.

Berechnen Sie die Nullstellen von f.

b) Geben Sie anhand des dargestellten Graphen die Koordinaten des Hochpunktes an.

Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Konzentration des Wirkstoffs nach 6 Stunden ein Minimum erreicht.

c) Bestimmen Sie für den Zeitpunkt $t = 4$ h die momentane Änderungsrate der Konzentration des Wirkstoffs im Blut.

Berechnen Sie den Zeitpunkt, in dem die Konzentration des Wirkstoffs im Blut am stärksten abnimmt.

d) Ein Pharmakonzern hat ein anderes Medikament entwickelt, bei dem die Konzentration des Wirkstoffs im Blut im Intervall $[0;5]$ durch die Funktion k mit $k(t) = at^3 + bt^2 + 5t$ bestimmt werden kann.
Bekannt ist, dass bei der vorgesehenen Einnahme
- die Konzentration nach 5 Stunden wieder den Wert null erreicht,
- bei $t = 5$ sich die Konzentration nicht ändert, d. h. die Änderungsrate auf null sinkt.

Ermitteln Sie aus diesen Angaben die Parameter der Funktion k.
[Zur Kontrolle: $a = 0{,}2$; $b = -2$]

e) Die Änderungsraten der beiden Konzentrationen lassen sich anhand der Ableitungsfunktionen f' bzw. k' beschreiben.

Untersuchen Sie, ob es im Intervall $[0;5]$ einen Zeitpunkt gibt, in dem die Änderungsraten der beiden Konzentrationen gleich sind.

f) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion k in das gegebene Koordinatensystem.

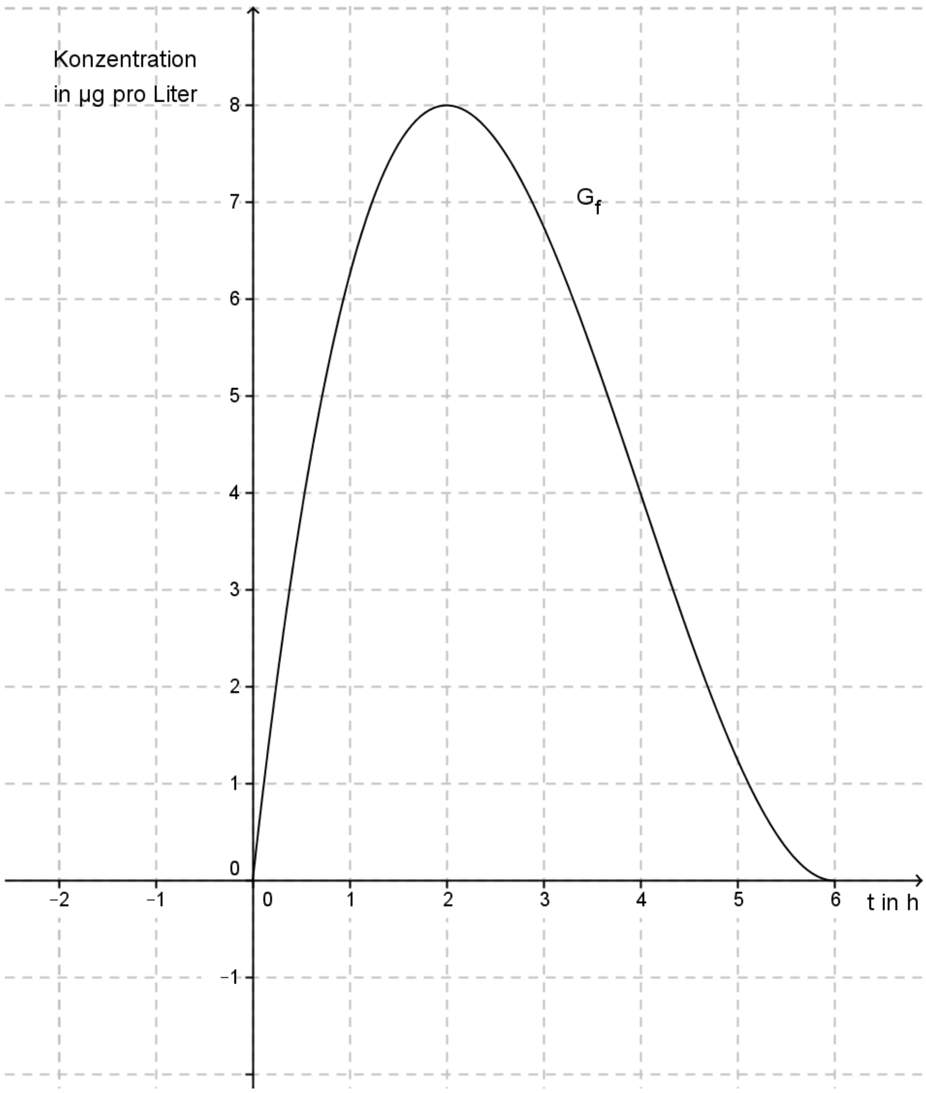
Beschreiben Sie anhand der Graphen von f und k drei Unterschiede in der zeitlichen Entwicklung der Konzentration der Medikamente.

Der Pharmakonzern behauptet: „Vom Medikament f wird etwa doppelt so viel Wirkstoff aufgenommen wie vom Medikament k."
Erläutern Sie, wie diese Behauptung überprüft werden könnte.

	Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	6	5	6	8	5	10	40

Anlage

Anlage zu Aufgabe 1.1: Medikament



Aufgabe 1.2: Weidezelt

Weidezelte werden in der Landwirtschaft vielfältig genutzt. Sie bestehen aus einem Gerüst aus Stahlrohren, welches mit einer Plane bespannt ist, siehe Abbildung 1.

Abbildung 1

a) Hersteller A nutzt für die Konstruktion der bogenförmigen Rohre als Modell den Graphen G_f der Funktion $f(x) = -e^{0,3x^2} + 5$; $x \in IR$. Dabei liegt die x-Achse in der Höhe des Erdbodens, die y-Achse verläuft durch den höchsten Punkt von G_f, siehe Abbildung 2.
Zeigen Sie, dass $x_{1;2} \approx \pm 2{,}3$ die Nullstellen von f sind und bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes von G_f mit der y-Achse.
Geben Sie die Höhe und die Breite des Weidezeltes an, $1\,\text{LE} = 1\,\text{m}$.

b) Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph G_f der Funktion f genau einen Extrempunkt besitzt und dieser ein Hochpunkt ist. Geben Sie die Koordinaten des Hochpunktes an.
Weisen Sie rechnerisch nach, dass es keine Wendepunkte gibt.
[Zur Kontrolle: $f''(x) = e^{0,3x^2}(-0{,}6 - 0{,}36x^2)$]

c) Für die Tierhaltung nutzt man häufig für die Frontflächen Planen mit eingearbeiteten, lichtdurchlässigen Windschutznetzen. In der Abbildung 2 ist ein solches rechteckiges Netz dargestellt. Seine untere Begrenzung befindet sich in 2 m Höhe. Der Flächeninhalt des Netzes soll möglichst groß sein. Stellen Sie eine Zielfunktion, also eine Funktion für den Flächeninhalt des Rechtecks, auf.
Zeigen Sie, dass bei einer Breite des Rechtecks von rund 2,46 m der Flächeninhalt extremal ist.
Hinweis: Auf die Überprüfung mithilfe der 2. Ableitung wird verzichtet.

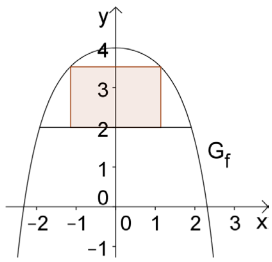


Abbildung 2

d) Hersteller B stellt das Gerüst der Frontfläche aus drei Stahlrohren her, siehe Abbildung 3.
Das Teilstück III wird mit dem Graphen G_p der Funktion p mit $p(x) = ax^2 + b$ modelliert.
Entnehmen Sie der Abbildung die Koordinaten geeigneter Punkte und bestimmen Sie die Werte für a und b.
[Zur Kontrolle: $a = -0{,}5$; $b = 4$]

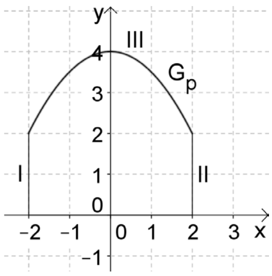


Abbildung 3

e) Weidezelte, die für Lagerzwecke genutzt werden, werden häufig mit Planen für die Frontflächen versehen.
Ermitteln Sie die Größe der Frontfläche für das Zelt von Hersteller B.
Ein Bauer möchte im Weidezelt 10 t Heu lagern. $1\,\text{m}^3$ Heu hat eine Masse von 100 kg.
Berechnen Sie, wie lang das Weidezelt dafür sein müsste.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	8	14	4	4	10	40

Aufgabe 2.1: Ikarus

Ein Ballon mit Forschern schwebt in der Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix};\ r,s \in IR$.

Der fliegende Ikarus wird von ihnen um 12:00 Uhr in einer Höhe von 2 km im Punkt $A(10\,|\,6\,|\,2)$ gesichtet. Eine Minute später erreicht Ikarus bei seinem geradlinigen Flug den Punkt $B(10{,}6\,|\,6{,}36\,|\,2{,}02)$.

Es gilt: 1 LE = 1 km.

a) Bestimmen Sie den Vektor $\overrightarrow{AB}$ und geben Sie eine Gleichung der Geraden g an, auf der die Flugbahn von Ikarus liegt.

Berechnen Sie die Länge des Weges, den Ikarus in einer Minute zurücklegt.

Ermitteln Sie die Geschwindigkeit von Ikarus in der Einheit $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

b) Ikarus ist in der *x*-*y*-Ebene gestartet.

Berechnen Sie die Koordinaten des Startpunktes.

Geben Sie an, um welche Uhrzeit Ikarus gestartet ist. Begründen Sie Ihre Aussage.

c) Bestimmen Sie für die Ebene *E*, in der der Ballon mit den Forschern schwebt, eine Gleichung in Normalenform.

[Ein Kontrollergebnis: Ein Normalenvektor für *E* ist z. B. $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$.]

d) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes, in dem Ikarus die Ebene *E* des Ballons der Forscher erreicht.

Ikarus trifft in einem sehr kleinen Winkel auf die Ebene *E*.

Bestimmen Sie die Größe dieses Winkels.

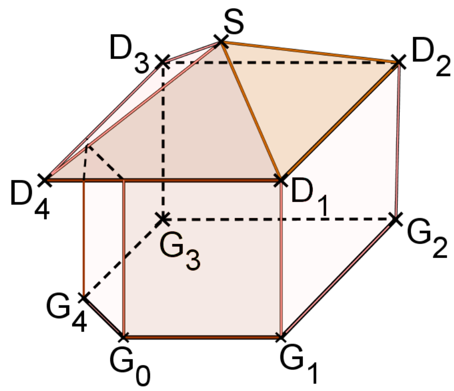
e) Die Forscher schweben mit ihrem Ballon in ihrer Ebene *E* längs einer Geraden. Der Ballon erreicht die Flugbahn des Ikarus in einem Punkt *P*.

Geben Sie mit einer Begründung die Koordinaten von *P* an.

Ermitteln Sie, wie viele Minuten Ikarus nicht weiter als 100 m von der Ebene des Forscherballons entfernt ist.

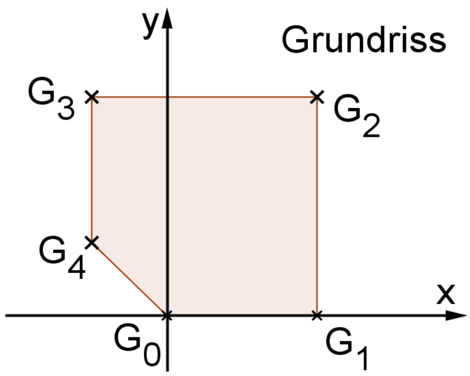
Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	6	5	5	10	4	30

Aufgabe 2.2: Gartenhaus



Ein Gartenhaus hat als Grundfläche ein Fünfeck mit den Eckpunkten $G_0(0\,|\,0\,|\,0)$, G_1, $G_2(2\,|\,3\,|\,0)$, G_3 und $G_4(-1\,|\,1\,|\,0)$ (s. Abbildung). Das Dach des Gartenhauses ist eine quadratische Pyramide mit den Eckpunkten D_1, D_2 und D_3, die in 2 m Höhe genau senkrecht über G_1, G_2 und G_3 liegen. Der vierte Eckpunkt D_4 liegt nicht über einem Eckpunkt der Grundfläche.
Es gilt: $1\text{ LE} = 1\text{ m}$.

a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte G_1, G_3 und D_2 an.
Weisen Sie nach, dass $D_1(2\,|\,0\,|\,2)$ auf der Geraden
$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0{,}8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -0{,}4 \end{pmatrix};\ r \in IR \text{ liegt.}$$
Die Dachspitze hat die Koordinaten $S(0{,}5\,|\,1{,}5\,|\,h)$ und liegt auch auf der Geraden g.
Berechnen Sie die Höhe h des Gartenhauses.
[Zur Kontrolle: $S(0{,}5\,|\,1{,}5\,|\,2{,}6)$]



b) Die Firstkanten des Daches sind die vier Kanten der Pyramide, die sich im Punkt S treffen.
Berechnen Sie die Länge einer Firstkante und die Größe des Winkels, den zwei benachbarte Firstkanten an der Spitze S einschließen.

c) Das Dach soll mit Dachziegeln gedeckt werden. Ein Paket Dachziegel reicht für 3,1 m^2 Dachfläche.
Untersuchen Sie, ob drei Pakete ausreichend sind, um das gesamte Dach zu decken.

d) Zu einer bestimmten Tageszeit fällt das Sonnenlicht parallel zur Dachkante $\overline{D_1S}$ ein und erzeugt von D_1 und S einen gemeinsamen Schattenpunkt S_1 in der x-y-Ebene.
Berechnen Sie die Koordinaten von S_1.
[Zur Kontrolle: $S_1(7\,|\,-5\,|\,0)$]
Der Schattenpunkt von D_2 ist der Punkt $S_2(7\,|\,-2\,|\,0)$.
Weisen Sie nach, dass die Schattenlinie $\overline{S_1S_2}$ parallel zur Dachkante $\overline{D_1D_2}$ verläuft.

e) Wählen Sie zwei geeignete Eckpunkte des Daches so aus, dass deren Schattenlinie senkrecht zu $\overline{S_1S_2}$ verläuft. Begründen Sie Ihre Wahl.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	9	6	5	6	4	30

Aufgabe 3.1: Kartenspiel

Hinweis: Die vereinfachte Bezeichnung „Spieler" wird im Sinne von „Spielerin oder Spieler" verwendet, dies gilt auch für „Spielpartner" „Gewinner" und „Zweiter".

Nina und Tom treffen sich zu einem Spiel mit 32 Karten. 16 der 32 Karten zeigen auf einer Seite die Farbe Rot, die anderen 16 zeigen die Farbe Schwarz. Anhand ihrer Rückseiten sind die Karten nicht zu unterscheiden.

a) Zunächst mischt Nina und nimmt 3 Karten vom Stapel, in dem die 32 Karten verdeckt liegen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die 3 Karten die gleiche Farbe haben.

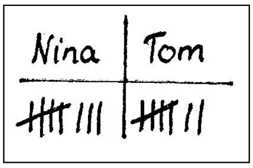
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wenigstens eine rote Karte unter den 3 gezogenen Karten ist.

Alle 32 Karten werden neu gemischt, das Spiel beginnt. Das Spiel besteht aus n Runden.
In jeder Runde zieht ein Spieler eine Karte, deckt sie auf und steckt sie wieder in den Stapel.
Zieht der Spielpartner danach die gleiche Farbe, hat er die erste Runde gewonnen.
Nach jeder Runde wird die Reihenfolge der Ziehenden gewechselt.

b) Begründen Sie, dass für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses
E: „Wer zuerst zieht, gewinnt die Runde" gilt: $P(E) = 0{,}5$.

c) Es werden 10 Runden gespielt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
A: Nina gewinnt die ersten 3 Runden.
B: Nina gewinnt mindestens 5 der 10 Runden.
C: Nina gewinnt die erste Runde und von den restlichen neun noch genau 5.

Nachdem Nina und Tom 15 Runden gespielt haben, sieht der Zettel mit den Ergebnissen wie abgebildet aus. Sie beschließen, noch genau 5 Runden zu machen. Wer dann mehr als die Hälfte der 20 Runden gewonnen hat, ist Gewinner des Spiels.



d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Tom noch genau 4 der 5 Runden gewinnt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Nina das Spiel gewinnt.

e) Am nächsten Tag wird das Spiel verändert. Nun wird eine Karte gezogen und offen auf den Tisch gelegt. Wer als Zweiter zieht und eine Karte derselben Farbe gezogen hat, der hat die Runde gewonnen. Andernfalls hat gewonnen, wer die erste Karte gezogen hat.
Das Spiel besteht aus m Runden.
Begründen Sie anhand einer geeigneten Rechnung, dass diese Spielvariante nur dann fair ist, wenn die Anzahl m der Runden gerade ist.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	6	3	10	7	4	30

Anlage

Anlage zu Aufgabe 3.1: Kartenspiel

Summierte Binomialverteilungen

Gerundet auf vier Nachkommastellen, weggelassen ist „0,“,
alle freien Plätze enthalten 1,0000.

Wird die Tabelle „von unten“ gelesen ($p > 0{,}5$), ist der gesuchte Wert 1 – (abgelesener Wert).

n	k	p										k	n
		0,05	0,10	$\frac{1}{6}$	0,20	0,25	0,30	$\frac{1}{3}$	0,40	0,45	0,50		
5	0	7738	5905	4019	3277	2373	1681	1317	0778	0503	0313	4	5
	1	9774	9185	8038	7373	6328	5282	4609	3370	2562	1875	3	
	2	9988	9914	9645	9421	8965	8369	7901	6826	5931	5000	2	
	3		9995	9967	9933	9844	9692	9547	9130	8688	8125	1	
	4			9999	9997	9990	9976	9959	9898	9815	9688	0	
10	0	5987	3487	1615	1074	0563	0282	0173	0060	0025	0010	9	10
	1	9139	7361	4845	3758	2440	1493	1040	0464	0233	0107	8	
	2	9885	9298	7752	6778	5256	3828	2991	1673	0996	0547	7	
	3	9990	9872	9303	8791	7759	6496	5593	3823	2660	1719	6	
	4	9999	9984	9845	9672	9219	8497	7869	6331	5044	3770	5	
	5		9999	9976	9936	9803	9527	9234	8338	7384	6230	4	
	6			9997	9991	9965	9894	9803	9452	8980	8281	3	
	7				9999	9996	9984	9966	9877	9726	9453	2	
	8						9999	9996	9983	9955	9893	1	
	9								9999	9997	9990	0	
15	0	4633	2059	0649	0352	0134	0047	0023	0005	0001	0000	14	15
	1	8290	5490	2596	1671	0802	0353	0194	0052	0017	0005	13	
	2	9638	8159	5322	3980	2361	1268	0794	0271	0107	0037	12	
	3	9945	9444	7685	6482	4613	2969	2092	0905	0424	0176	11	
	4	9994	9873	9102	8358	6865	5155	4041	2173	1204	0592	10	
	5	9999	9978	9726	9389	8516	7216	6184	4032	2608	1509	9	
	6		9997	9934	9819	9434	8689	7970	6098	4522	3036	8	
	7			9987	9958	9827	9500	9118	7869	6535	5000	7	
	8			9998	9992	9958	9848	9692	9050	8182	6964	6	
	9				9999	9992	9963	9915	9662	9231	8491	5	
	10					9999	9993	9982	9907	9745	9408	4	
	11						9999	9997	9981	9937	9824	3	
	12								9997	9989	9963	2	
	13									9999	9995	1	
20	0	3585	1216	0261	0115	0032	0008	0003	0000	0000	0000	19	20
	1	7358	3917	1304	0692	0243	0076	0033	0005	0001	0000	18	
	2	9245	6769	3287	2061	0913	0355	0176	0036	0009	0002	17	
	3	9841	8670	5665	4114	2252	1071	0604	0160	0049	0013	16	
	4	9974	9568	7687	6296	4148	2375	1515	0510	0189	0059	15	
	5	9997	9887	8982	8042	6172	4164	2972	1256	0553	0207	14	
	6		9976	9629	9133	7858	6080	4793	2500	1299	0577	13	
	7		9996	9887	9679	8982	7723	6615	4159	2520	1316	12	
	8		9999	9972	9887	9591	8867	8095	5956	4143	2517	11	
	9			9994	9972	9861	9520	9081	7553	5914	4119	10	
	10			9999	9994	9961	9829	9624	8725	7507	5881	9	
	11				9999	9991	9949	9870	9435	8692	7483	8	
	12					9998	9987	9963	9790	9420	8684	7	
	13						9997	9991	9935	9786	9423	6	
	14							9998	9984	9936	9793	5	
	15								9997	9985	9941	4	
	16									9997	9987	3	
	17										9998	2	
n	k	0,95	0,90	$\frac{5}{6}$	0,80	0,75	0,70	$\frac{2}{3}$	0,60	0,55	0,50	k	N
		p											

Aufgabe 3.2: Smartphones

Smartphones sind mit unterschiedlichen Betriebssystemen ausgestattet.
In Deutschland nutzen von den Smartphone-Besitzern
70 % das Betriebssystem A,
20 % das Betriebssystem B,
10 % andere Betriebssysteme.
Im Folgenden werden entsprechend die Bezeichnungen A-Phone und B-Phone verwendet.

In einer Straßenbahn sitzen 20 Personen. Jede dieser Personen besitzt genau ein Smartphone.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

E_1: Genau 12 von ihnen besitzen ein A-Phone.

E_2: Weniger als 2 von ihnen besitzen ein B-Phone.

E_3: Jede der 20 Personen besitzt entweder ein A-Phone oder ein B-Phone.

b) Tatsächlich sitzen in der Straßenbahn genau 14 Personen, die ein A-Phone besitzen. Vier der 20 Personen steigen aus.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse.

E_4: Die ersten beiden Aussteigenden besitzen ein A-Phone, der dritte nicht.

E_5: Der erste Aussteigende besitzt ein A-Phone und von den anderen 3 noch genau einer.

E_6: Von den 16 Personen, die in der Straßenbahn geblieben sind, besitzen genau 11 ein A-Phone.

In einem Kursprojekt sollen Schülerinnen und Schüler die Verbreitung unterschiedlicher Betriebssysteme in Deutschland untersuchen. Sie befragen Personen nach der Art des Betriebssystems, welches Sie in ihrem Smartphone nutzen.

c) Berechnen Sie, wie viele Personen mindestens befragt werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens einen B-Phone-Nutzer zu finden.

d) An einer Haltestelle warten n Personen, die alle ein Smartphone besitzen. Ein Schüler behauptet, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle Wartenden ein A- oder ein B-Phone nutzen, mindestens 50 % beträgt.

Untersuchen Sie, für welche Anzahlen n diese Behauptung zutrifft.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben					
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	Summe
BE	11	11	4	4	30