

**Zentrale schriftliche Abiturprüfung****2016****Mathematik****Leistungskurs****Aufgabenvorschlag**

Hilfsmittel:

Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache

Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist bzw. für Berlin von der zuständigen Senatsverwaltung für die Verwendung im Abitur zugelassen ist.

Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder des automatisierten Lösens von Gleichungen verfügen.

Gesamtbearbeitungszeit:

270 Minuten inkl. Lese- und Auswahlzeit

Aufgabenstellung 1**Thema/Inhalt:**

Analysis

Hinweis:

Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 1.1 oder 1.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 2**Thema/Inhalt:**

Analytische Geometrie

Hinweis:

Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 3**Thema/Inhalt:**

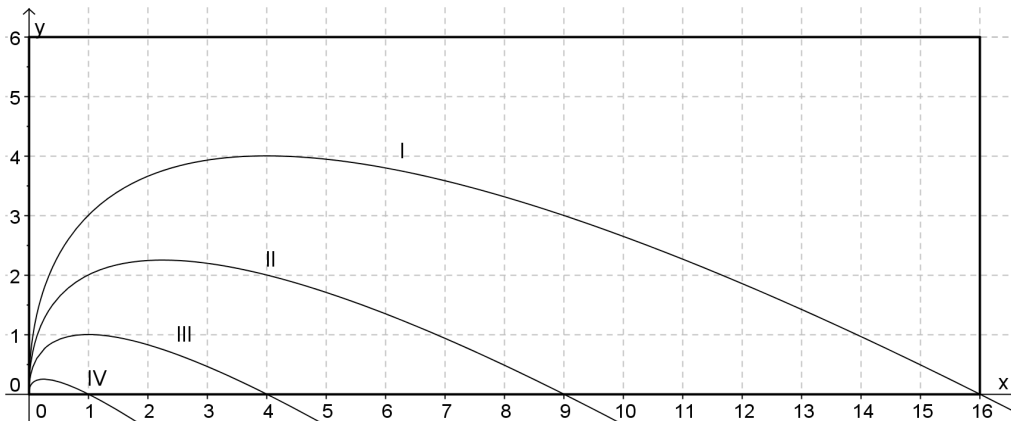
Stochastik

Hinweis:

Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 3.1 oder 3.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabe 1.1: IGA 2017

Die Vorbereitungen der internationalen Gartenbauausstellung 2017 in Berlin sind in vollem Gange. Eine Gärtnerei hat sich um ein $6\text{ m} \times 16\text{ m}$ großes rechteckiges Blumenbeet beworben, auf dem sie ihre Neuzüchtungen präsentieren wird. Die Unterteilung des Blumenbeetes erfolgt durch Funktionsgraphen der Schar $f_a(x) = 2a\sqrt{x} - x$; $a > 0$.



- a) Geben Sie für die Funktion f_2 die Funktionsgleichung und den Definitionsbereich an. Bestimmen Sie die Gleichung der Ableitungsfunktion f'_2 . Ermitteln Sie den Definitionsbereich der Ableitungsfunktion f'_2 .
- b) Berechnen Sie die Nullstellen von f_a und bestimmen Sie die Lage der Hochpunkte in Abhängigkeit vom Scharparameter a . Auf die Untersuchung einer hinreichenden Bedingung kann verzichtet werden. Weisen Sie nach, dass keiner der Schargraphen einen Wendepunkt hat.
- c) Bestimmen Sie die Werte des Parameters a für die in der Abbildung dargestellten Scharkurven III und IV und geben Sie die zugehörigen Funktionsgleichungen an.
- d) Für die Besucher soll ein Weg durch das Blumenbeet angelegt werden. Es ist geplant, den Weg durch die Hochpunkte der Funktionsgraphen zu legen. Ermitteln Sie die Gleichung einer Funktion w , deren Graph diesen Weg darstellt. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion w in die obere Graphik ein.
- e) Schargraph I hat den Parameterwert $a = 2$, Schargraph II den Parameterwert $a = 1,5$. Auf der Fläche, die von diesen beiden Graphen sowie der x -Achse begrenzt wird, soll roter Phlox (Flammenblume) gepflanzt werden. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Fläche. Es gilt: $1\text{ LE} = 1\text{ m}$.
- f) P ist ein Punkt auf dem Graphen von f_2 . Die diagonal liegenden Eckpunkte eines achsenparallelen Rechtecks sind $P(x | f_2(x))$ und $R(16 | 6)$. Ermitteln Sie, für welchen Wert von x mit $x > 4$ das Rechteck zum Quadrat wird.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben							
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	6	12	5	3	8	6	40

Aufgabe 1.2: Bremsschuh

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = -e^{x-a} + e^{2x}$; $a \in \mathbb{R}$.

Die Graphen der Schar f_a sind G_a .

- a) Ermitteln Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_a mit den beiden Koordinatenachsen in Abhängigkeit von a .
Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f_1 für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$ an.

- b) Jeder Graph G_a hat im Punkt $E_a(-a - \ln 2 \mid f_a(-a - \ln 2))$ eine zur x-Achse parallele Tangente. Zur Ermittlung des x-Wertes dieses Punktes hat ein Schüler den folgenden Lösungsweg korrekt angegeben:

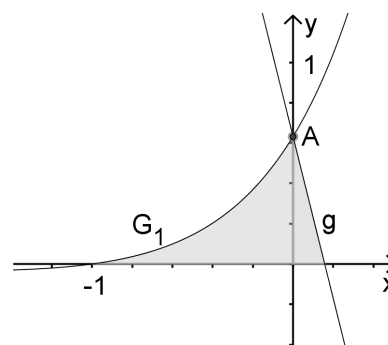
- (1) $f'_a(x) = -e^{x-a} + 2e^{2x}$
- (2) $0 = -e^{x-a} + 2e^{2x} \Leftrightarrow e^{x-a} = 2e^{2x}$
- (3) $e^{-x-a} = 2$
- (4) $x = -a - \ln 2$

Geben Sie drei Regeln an, die beim Ableiten des Funktionsterms von f_a genutzt worden sind und begründen Sie die Umformung von Gleichung (2) zu Gleichung (3).
Zeigen Sie, dass für $a = 0$ der Punkt E_0 ein lokaler Extrempunkt von G_0 ist.
Bestimmen Sie dessen Koordinaten sowie die Art des Extremums.

- c) Der Graph G_1 und die Gerade g mit der Gleichung

$y = -4x + 1 - \frac{1}{e}$ begrenzen gemeinsam mit der x-Achse eine Fläche, die dem Querschnitt eines Bremsschuhs entspricht, der das Wegrollen von Fahrzeugen verhindert (1 LE = 25 cm).

Die „Tiefe“ des Bremsschuhs beträgt 20 cm.
Zeigen Sie, dass sich G_1 und g auf der y-Achse schneiden.
Berechnen Sie das Volumen eines solchen Bremsschuhs.



- d) Ermitteln Sie die Größe des Winkels, den G_1 und g im Punkt $A(0 \mid 1 - \frac{1}{e})$ einschließen.

- e) Der Produzent der Bremsschuhe möchte auf der Querschnittsfläche des Bremsschuhs sein rechteckiges Firmenlogo mit den Seitenlängen 5 cm und 15 cm so einstanzen lassen, dass die längere der beiden Seiten parallel zur x-Achse verläuft.
Untersuchen Sie, ob das möglich ist.

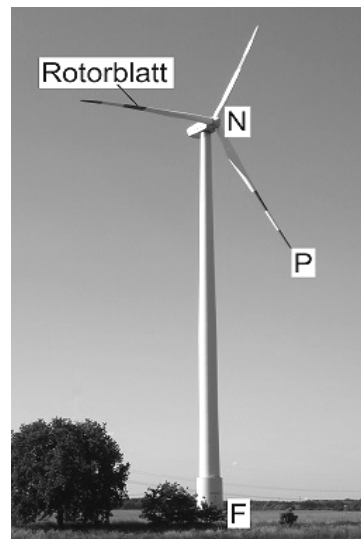
Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	6	11	13	5	5	40

Aufgabe 2.1: Windrad

Bei einer Windkraftanlage ist auf einem hohen Turm die Gondel mit dem Rotor angebracht. Die drei Rotorblätter laufen im Punkt $N(2 | 2 | 140)$ zusammen. Die Spitzen der Rotorblätter bewegen sich bei der Drehung durch den Punkt $P(34 | -22 | 110)$.

Der Punkt $F(2 | 2 | 0)$ liegt in der x - y -Ebene (siehe Bild).

1 LE = 1 m.



- a) Berechnen Sie die Länge eines Rotorblattes.
 Berechnen Sie die Gesamthöhe des Windrades vom Punkt F bis zum höchsten Punkt H , den die Spitzen der Rotorblätter bei ihrer Drehung durchlaufen.

- b) Die Rotorblätter drehen sich in der Ebene E , welche die Punkte F , N und P enthält.
 Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform. [Zur Kontrolle: $E : 3x + 4y = 14$]

- c) Ein Vogel fliegt entlang der Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 127 \\ 230 \\ 150 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$.

Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Flugbahn mit der Ebene E .
 Untersuchen Sie, ob der Vogel durch die sich drehenden Rotorblätter gefährdet ist.

- d) Zur optimalen Nutzung der Windenergie sollte der Wind senkrecht auf die Ebene E treffen, in der sich die Rotorblätter drehen.

Der Wind weht in Richtung $\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Begründen Sie, dass der Wind nicht senkrecht auf die Ebene E trifft.
 Berechnen Sie, um welchen Winkel die Gondel gedreht werden muss, damit der Wind senkrecht auf die Ebene trifft, in der sich die Rotorblätter drehen.

- e) Bei Sonnenlicht erzeugen die sich drehenden Rotorblätter einen sich bewegenden Schatten in der x - y -Ebene. Zu einer bestimmten Tageszeit wird vom Punkt $N(2 | 2 | 140)$ der Schattenpunkt $S_N(-54 | -82 | 0)$ erzeugt. Gleichzeitig entsteht von der Spitze $P(34 | -22 | 110)$ eines Rotorblattes der Schattenpunkt S_P .

Berechnen Sie die Koordinaten von S_P .

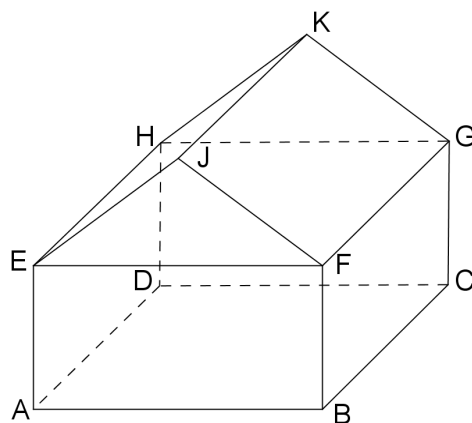
[Zur Kontrolle: $S_P(-10 | -88 | 0)$]

Untersuchen Sie, ob alle möglichen Schattenpunkte der Rotorspitzen auf einem Kreis um S_N liegen.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	4	5	6	6	9	30

Aufgabe 2.2: Haus

Die Abbildung zeigt ein Haus.
 Das Koordinatensystem wird so gewählt, dass sich die rechteckige Grundfläche des Hauses achsenparallel in der x - y -Ebene befindet. Gegeben sind die Koordinaten der Punkte $D(0|0|0)$, $F(10|8|4)$, $G(0|8|4)$ und $J(10|4|7)$. Es gilt: 1 LE = 1 m.



- a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte K und E an.
 Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E^* , in der die Dachfläche $FGKJ$ liegt, in Koordinatenform.
 [Kontrollergebnis: $E^* : 3y + 4z = 40$]
 Berechnen Sie den Neigungswinkel der Dachfläche $FGKJ$ gegenüber einer horizontalen Ebene.

- b) Paralleles Licht fällt in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -\sqrt{39} \\ y \\ -5 \end{pmatrix}$ auf das Hausdach.

Bestimmen Sie einen möglichen Wert für y so, dass der Winkel zwischen der Richtung der Lichtstrahlen und der Dachfläche $FGKJ$ 30° beträgt.

- c) Ein Drittel der Dachfläche $FGKJ$ wird mit Solarzellen bestückt.
 Ermitteln Sie die Größe dieser Fläche.
 Die Solarzellen können sowohl in der Dachfläche montiert werden als auch in Ebenen F_a , die parallel zur Dachfläche liegen. Dabei darf der Abstand der Ebenen F_a zur Dachfläche maximal 20 cm betragen.
 Entwickeln Sie unter Verwendung des Parameters a eine Gleichung für die Ebenen F_a und geben Sie ein Intervall für die Einschränkung des Parameters a an.
- d) Im Innern des Hauses ist auf dem Fußboden $EFGH$ des Dachraumes im Punkt $P(1|5|4)$ ein 4 m langer, senkrecht stehender Mast für eine Satellitenantenne montiert. Dieser Mast ragt durch das Dach ins Freie.
 Ermitteln Sie die Länge des Teiles dieses Mastes, der sich außerhalb des Hauses befindet.
 Berechnen Sie den Abstand der Mastspitze S zur Ebene E^* .

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben					
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	Summe
BE	9	5	7	9	30

Aufgabe 3.1: Straßenverkehr

In einer Stadt werden 25 % des täglichen Straßenverkehrs als Berufsverkehr eingestuft. Eine viel befahrene Straße wird saniert. Aus Erfahrung weiß man, dass beim Befahren dieser Straße während des Berufsverkehrs mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,7 ein Stau auftritt. Außerhalb dieser Verkehrszeit liegt die Stauwahrscheinlichkeit bei 0,2.

- a) Stellen Sie die oben beschriebenen Zusammenhänge in einem Baumdiagramm dar. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Fahrzeug im Stau steht. Untersuchen Sie, ob die Ereignisse Berufsverkehr und Stau stochastisch abhängig sind.
- b) Ein Autofahrer aus dieser Stadt hat für sich ein bestimmtes Fahrverhalten festgelegt. Während des Berufsverkehrs benutzt er immer die Umgehungsstraße. Fährt er außerhalb des Berufsverkehrs, so benutzt er mit 50 %-iger Wahrscheinlichkeit die Umgehungsstraße.
Ereignis U : „Dieser Autofahrer benutzt die Umgehungsstraße.“
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(U)$.
- c) Der Anteil der Busse im Straßenverkehr macht durchschnittlich 4 % aus. In einem Stau stehen 60 Fahrzeuge.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse B_1 und B_2 .
 B_1 : „Es stehen genau zwei Busse im Stau.“
 B_2 : „Es stehen mindestens zwei Busse im Stau.“
- d) Es werden im Folgenden nur Fahrzeuge betrachtet, die in einem Stau stehen. Unter diesen Fahrzeugen liegt der PKW-Anteil bei 55 %. Von diesen PKW kommen 31 % aus der Stadt.
Insgesamt kommen aber nur 24 % der im Stau stehenden Fahrzeuge aus der Stadt.
Ein zufällig ausgewähltes Fahrzeug im Stau ist kein PKW.
Bestimmen Sie unter dieser Bedingung die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieses Fahrzeug aus der Stadt kommt.
- e) Von f Fahrzeugen, die in einem Stau stehen, sind genau zehn PKW. Von diesen f Fahrzeugen werden zwei zufällig ausgewählt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter diesen zwei Fahrzeugen genau ein PKW befindet, beträgt 50 %. Berechnen Sie, wie viele Fahrzeuge in diesem Stau stehen können.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	9	4	7	6	4	30

Aufgabe 3.2: Sportfan

Gemäß einer „Studie zur Gesundheit Erwachsener in Deutschland“ zeigt sich in Deutschland ein Trend zu mehr sportlicher Aktivität.

Ein Viertel der Erwachsenen treibt regelmäßig mindestens zwei Stunden Sport pro Woche (Sportfans), wobei der Anteil der Sportfans unter den Männern mit 29,3 % etwas höher ist als unter den Frauen.

Alle anderen Bundesbürger werden hier als „keine Sportfans“ bezeichnet.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

A : Nur der zweite und sechste von zehn zufällig ausgewählten Bundesbürgern sind Sportfans.

B : Unter 20 zufällig ausgewählten männlichen Bundesbürgern befinden sich genau drei Sportfans.

C : Unter zehn zufällig ausgewählten Bundesbürgern befindet sich höchstens ein Sportfan.

D : Von 100 zufällig ausgewählten Bundesbürgern gehören mindestens 70 und weniger als 79 Personen zu denjenigen, die keine Sportfans sind.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Bundesbürger, die mindestens befragt werden müssten, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,96 wenigstens einen zu entdecken, der Sportfan ist.

c) Unter allen Bundesbürgern liegt der Anteil der Männer bei 48,88 % (Zensus 2011). Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Sportfan ein Mann ist.
Bestimmen Sie den Anteil der Sportfans unter den Frauen.

d) In einem Sportstudio trainieren 25 Bundesbürger, von denen genau acht zur Gruppe der Sportfans gehören. Es werden zufällig sieben Personen „ohne Zurücklegen“ ausgewählt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses *E*, dass sich unter den sieben ausgewählten Personen genau drei Sportfans befinden.

e) In einem Kochkurs befindet sich unter den *n* Kursteilnehmern genau ein Sportfan. Es werden zehn der Kursteilnehmer zufällig nacheinander und „ohne Zurücklegen“ ausgewählt. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Sportfan unter den ausgewählten Kursteilnehmern befindet, soll mindestens 80 % betragen.
Bestimmen Sie für diesen Fall die maximale Anzahl *n* der Kursteilnehmer.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	11	4	8	3	4	30

Anlage

Anlage zur Aufgabe 3.2: Sportfan

Summierte Binomialverteilungen

Gerundet auf vier Nachkommastellen, weggelassen ist „0,“,
 alle freien Plätze links unten enthalten 1,0000, rechts oben 0,0000.

Wird die Tabelle „von unten“ gelesen ($p > 0,5$), ist der gesuchte Wert $1 -$ (abgelesener Wert).

n	k \ p	0,02	0,05	0,10	$\frac{1}{6}$	0,20	0,25	0,30	$\frac{1}{3}$	k	
100	0	1326	0059							99	
	1	4033	0371	0003						98	
	2	6767	1183	0019						97	
	3	8590	2578	0078						96	
	4	9492	4360	0237	0001					95	
	5	9845	6160	0576	0004					94	
	6	9959	7660	1172	0013	0001				93	
	7	9991	8720	2061	0038	0003				92	
	8	9998	9369	3209	0095	0009				91	
	9	9999	9718	4513	0231	0023				90	
	10		9885	5832	0427	0057	0001			89	
	11		9957	7030	0777	0126	0004			88	
	12		9985	8018	1297	0253	0010			87	
	13		9995	8761	2000	0469	0025	0001		86	
	14		9999	9274	2874	0804	0054	0002		85	
	15			9601	3877	1285	0111	0004		84	
	16			9794	4942	1923	0211	0010	0001	83	
	17			9900	5994	2712	0376	0022	0002	82	
	18				9954	6965	3621	0630	0045	0005	81
	19				9980	7803	4602	0995	0089	0011	80
	20				9992	8481	5595	1488	0165	0024	79
	21				9997	8998	6540	2114	0288	0048	78
	22				9999	9370	7389	2864	0479	0091	77
	23					9621	8109	3711	0755	0164	76
	24					9783	8686	4617	1136	0281	75
	25					9881	9125	5535	1631	0458	74
	26					9938	9442	6417	2244	0715	73
	27					9969	9658	7224	2964	1066	72
	28					9985	9800	7925	3768	1524	71
	29					9993	9888	8505	4623	2093	70
	30					9997	9939	8962	5491	2766	69
	31					9999	9969	9307	6331	3525	68
	32						9985	9554	7107	4344	67
	33						9993	9723	7793	5188	66
	34						9997	9836	8371	6019	65
	35						9999	9906	8839	6803	64
	36						9999	9948	9201	7511	63
	37							9973	9470	8123	62
	38							9986	9660	8630	61
	39							9993	9790	9034	60
	40							9997	9875	9341	59
	41							9999	9928	9566	58
	42							9999	9960	9724	57
	43								9979	9831	56
	44								9989	9900	55
	45								9995	9943	54
	46								9997	9969	53
	47								9999	9983	52
	48								9999	9991	51
	49									9996	50
	50									9998	49
	51									9999	48
52										47	
n	k	0,95	0,90	$\frac{5}{6}$	0,80	0,75	0,70	$\frac{2}{3}$		k \ p	