Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2017

Mathematik

Grundkurs mit CAS

Aufgabenvorschlag

Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist bzw. für Berlin von der zuständigen Senatsverwaltung für die Verwendung im Abitur zugelassen ist. Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder des automatisierten Lösens von Gleichungen verfügen CAS, das zugelassen und an der Schule eingeführt ist.
Gesamtbearbeitungszeit:	210 Minuten inkl. Lese- und Auswahlzeit

Aufgabenstellung 1

Thema/Inhalt: Analysis

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 1.1 oder 1.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 2

Thema/Inhalt: Analytische Geometrie

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 3

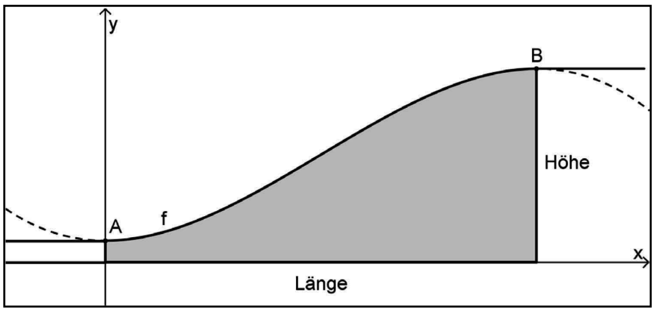
Thema/Inhalt: Stochastik

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 3.1 oder 3.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabe 1.1 CAS: Holzeisenbahn

Die Abbildung zeigt das Brückenteil einer Holzeisenbahn.

Die obere Begrenzungslinie des Brückenteils lässt sich durch die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = -\frac{1}{500}x^3 + \frac{3}{50}x^2 + 1$ beschreiben. $1\,\text{LE} = 1\,\text{cm}$.



Die linke untere Ecke liegt im Koordinatenursprung.

a) Ermitteln Sie rechnerisch die Extrempunkte von f und weisen Sie deren Art nach.

In den oberen Eckpunkten A und B geht die Oberkante des Brückenteils ohne Knick in die waagerechten Anschlussschienen über. Begründen Sie, warum die beiden Extrempunkte von f mit diesen Eckpunkten übereinstimmen müssen.

[Zur Kontrolle: $A(0\,|\,f(0))$ bzw. $B(20\,|\,f(20))$]

b) Berechnen Sie die mittlere Steigung des Brückenteils.

Berechnen Sie die Stellen, an denen die lokale Steigung von f den gleichen Wert hat wie die mittlere Steigung.

c) Der Hersteller verkauft batteriebetriebene Lokomotiven für die Holzeisenbahn. Dafür muss sichergestellt sein, dass der Anstiegswinkel an keiner Stelle größer als 32° ist.

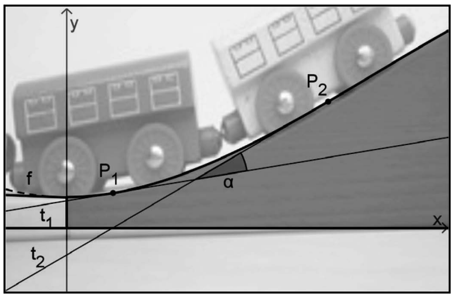
Bestimmen Sie rechnerisch, in welchem Punkt das Brückenteil den größten Anstieg hat. Ein Nachweis mithilfe einer hinreichenden Bedingung ist nicht erforderlich.

Berechnen Sie den maximalen Anstiegswinkel und entscheiden Sie, ob das genannte Kriterium erfüllt ist.

d) Damit sich die angehängten Waggons nicht gegenseitig behindern, darf der Neigungswinkel zwischen ihnen nicht größer als 25° werden.

Zur Untersuchung des Neigungswinkels werden die Tangenten t_1 und t_2 an den Graphen von f in den Punkten $P_1(1{,}5\,|\,f(1{,}5))$ bzw. $P_2(8{,}5\,|\,f(8{,}5))$ betrachtet.

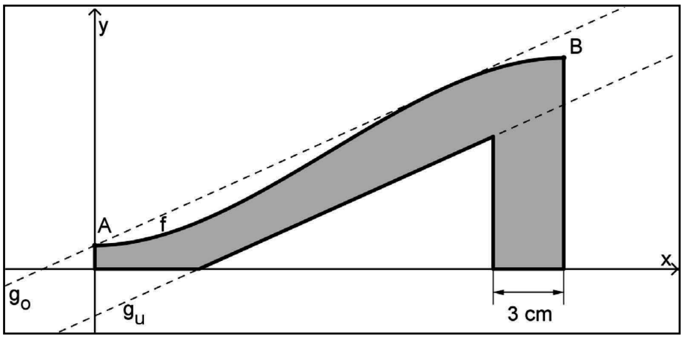
Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen diesen Tangenten und beurteilen Sie, ob der Neigungswinkel zu groß wird.



Fortsetzung auf der nächsten Seite

Fortsetzung von Aufgabe 1.1 CAS: Holzeisenbahn

e) Um Material zu sparen, wird das Brückenteil aus zwei Holzbrettern hergestellt. Das eine Holzbrett wird von den Geraden
$g_u(x) = \frac{45}{100}x - 2$ und
$g_o(x) = \frac{45}{100}x + 1$ begrenzt.



Weisen Sie nach, dass der Graph von f für $x \in [0; 20]$ vollständig in dem Bereich liegt, der von den beiden Geraden g_u bzw. g_o eingeschlossen wird.

Im Bereich $0 < x < 20$ gibt es eine Stelle, an der der vertikale Abstand der Gerade g_u zum Graphen von f am geringsten ist. Ermitteln Sie diese Stelle und den minimalen Abstand.

f) Das gesamte, in der Abbildung in Teilaufgabe e) grau dargestellte Brückenteil einschließlich der senkrechten Stütze am rechten Rand hat eine Tiefe von 4 cm.

Berechnen Sie das Volumen des gesamten Brückenteils.

	Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	8	4	5	5	10	8	40

Aufgabe 1.2 CAS: Dachformen

Auf dem Foto sehen Sie einen Teil des Daches eines Berliner Veranstaltungsortes.
Das Dach ist aus mehreren gleichartigen Dachelementen zusammengesetzt.
Für ein anderes Gebäude wird ein ähnliches Dach geplant. Die äußere Kante des geplanten Dachelementes lässt sich im Intervall $[0;2]$ annähernd durch die Funktion f mit $f(x)=(x^2-2x+1)\cdot e^{-x}$ beschreiben, $1\,\mathrm{LE}=10\text{ m}$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen.
Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im oben angegebenen Intervall.

b) Bilden Sie die erste Ableitung von f und geben Sie die verwendeten Ableitungsregeln an.
Bestimmen Sie Art und Lage aller Extrempunkte des Graphen von f.
Der Graph von f hat zwei Wendepunkte. Ermitteln Sie die Koordinaten dieser Punkte.

c) Im Intervall $[0;2]$ gibt es eine Stelle x_P, an der der Graph von f an die maximale positive Steigung hat.
Bestimmen Sie den Wert von x_P und die Steigung des Graphen von f an dieser Stelle.
Hinweis: Es genügt die Untersuchung der notwendigen Bedingung.

d) Für eine Veranstaltung soll unter einem Dachelement eine Trennwand errichtet werden. Diese Trennwand wird im Intervall $[0;1]$ begrenzt durch den Funktionsgraphen und die x-Achse.
Berechnen Sie den Flächeninhalt der Trennwand, $1\,\mathrm{LE}=10\text{ m}$.

e) Es wird vorgeschlagen, statt der Trennwand eine kleinere Wand zu verwenden, die begrenzt ist durch die Koordinatenachsen und die Tangente an den Graphen von f im Punkt $R(0\,|\,1)$.
Ermitteln Sie eine Gleichung für diese Tangente.
Berechnen Sie, wie viele Quadratmeter Wandfläche durch den Vorschlag eingespart werden.

f) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q, in dem das Dachelement ein Gefälle von 45° hat.

g) Der Graph einer quadratischen Funktion p soll in den Punkten $R(0|1)$ und $S(1|0)$ tangential zum Graphen von f verlaufen.
Geben Sie vier Bedingungen an, die p erfüllen muss und untersuchen Sie, ob es eine solche Funktion p gibt.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben								
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	Summe
BE	5	9	5	3	7	4	7	40

Aufgabe 2.1 CAS: Startbahn Ost

Bei östlichen Winden wird vom Flughafen in Berlin-Tegel von einer Startbahn gestartet, die in eine nordöstliche Richtung zeigt.

Ein Jet hebt im Punkt $P_0(\,1140\,|\,240\,|\,0)$ von der Startbahn ab und erreicht eine Sekunde später die Position $P_1(\,1200\,|\,251\,|\,30)$.

Der Jet verändert seine Richtung beim Starten nicht nach rechts oder links.

Der Jet fliegt geradlinig und verändert seine Geschwindigkeit zunächst nicht.

Der Flughafen und Berlin liegen in der *x*-*y*-Ebene. Es gilt $1\,\text{LE} = 1\,\text{m}$.

a) Geben Sie den Richtungsvektor $\vec{r} = \overrightarrow{P_0P_1}$ und eine Gleichung der Geraden g an, auf der der Jet unmittelbar nach dem Start fliegt.

Berechnen Sie die Länge der Strecke, die der Jet in einer Sekunde zurücklegt.

Berechnen Sie die Startgeschwindigkeit des Jets in der Einheit $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Berechnen Sie den Winkel, mit dem der Jet gestartet ist.

b) In gerader Verlängerung der Startbahn liegt 7 km vom Punkt $P_0(\,1140\,|\,240\,|\,0)$ entfernt das Rathaus Pankow.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Rathauses.
Runden Sie auch Zwischenergebnisse ganzzahlig.
[Kontrollergebnis: $R(\,8040\,|\,1505\,|\,0)$]

c) 10 Sekunden nach dem Start ändert der Jet im Punkt $P_{10}(1740\,|\,350\,|\,300)$ seine Geschwindigkeit und fliegt weniger steil mit der Richtung $\vec{r}_{neu} = \begin{pmatrix} 90 \\ 16{,}5 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}$ weiter.

Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Jet das Rathaus überfliegt.

Bestimmen Sie die Höhe, in der das Rathaus überflogen wird.

d) In der Ebene E mit der Gleichung $x - 20z = -1560$ befindet sich die untere Begrenzung einer dichten Wolkendecke.

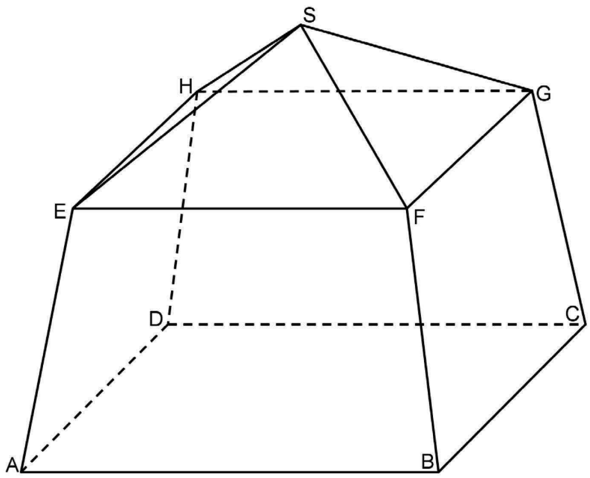
Weisen Sie nach, dass die neue Flugbahn parallel zu der unteren Begrenzung der Wolkendecke verläuft.

Der Bürgermeister schaut vom Rathaus im dem Moment nach oben, in dem sich der Jet genau über dem Rathaus befindet. Untersuchen Sie, ob der Bürgermeister den Jet sehen kann oder nur die Wolkendecke.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben					
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	Summe
BE	7	5	4	4	20

Aufgabe 2.2 CAS: Schokotrüffel

Eine Verpackung für Schokotrüffel hat die Form eines geraden quadratischen Pyramidenstumpfes mit einer aufgesetzten geraden quadratischen Pyramide als Deckel.
Die Kantenlänge $\overline{AB}$ des Pyramidenstumpfs beträgt 10 cm, die Kantenlänge $\overline{EF}$ seiner Deckfläche 8 cm.
Der Pyramidenstumpf ist 6 cm hoch.
Insgesamt hat die Verpackung eine Höhe von 9 cm.
1 LE = 1 cm



a) Die Punkte $B(10\,|\,10\,|\,0)$, $D(0\,|\,0\,|\,0)$ und $F(9\,|\,9\,|\,6)$ sind Eckpunkte des Pyramidenstumpfes. Die Spitze der aufgesetzten Pyramide ist $S(5\,|\,5\,|\,9)$.

Geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte *A, E* und *H* an.

b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E_1, in der die Seitenwand *ABFE* liegt, in Koordinatenform.

[Zur Kontrolle: $E_1\colon\ 6x + z = 60$]

c) Ermitteln Sie die Größe des Winkels γ, den die Seitenwand *ABFE* mit der angrenzenden dreieckigen Deckelfläche *EFS* einschließt.

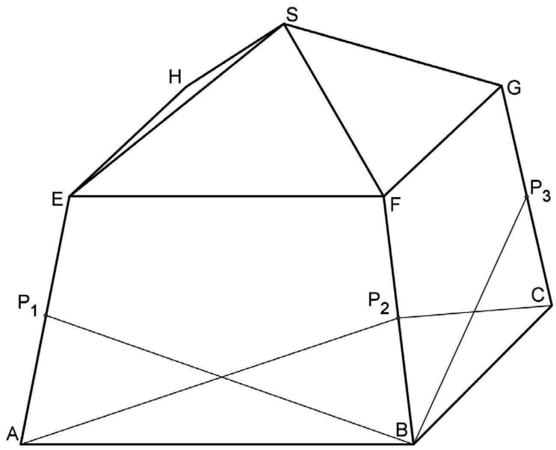
Berechnen Sie den größten Abstand zweier Punkte innerhalb der Verpackung.

d) Die vier Flächen des Deckels werden mit Goldfolie überzogen.

Berechnen Sie, wie viele cm² Goldfolie für einen Deckel benötigt werden.

e) Die vier großen Seitenflächen des Pyramidenstumpfs erweisen sich im Praxistest als nicht stabil genug. Deshalb werden diese durch Messingdraht verstärkt. Durch den Draht wird der Punkt P_1 mit den Ecken *D* und *B* verbunden. Die Punkte P_2, P_3 und P_4 werden auf die gleiche Weise mit den entsprechenden Ecken verbunden. Die Punkte P_1 bis P_4 befinden sich in 3 cm Höhe über der Grundfläche. (siehe Abbildung)

Zeigen Sie, dass 80 cm Draht pro Verpackung ausreichend sind.



Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	2	4	6	3	5	20

Aufgabe 3.1 CAS: Smartphone

Ein Hersteller bringt ein neues Smartphone auf den Markt.
Ein Händler erhält eine Lieferung dieser Smartphones.

a) Die gelieferten Geräte haben sechs verschiedene Farben. Für die Auslage einiger Geräte im Schaufenster sollen vier Farben ausgewählt werden.

Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten für diese Auswahl.

b) Die Lieferung umfasst 50 Geräte; davon sind drei fehlerhaft. Aus der Lieferung werden zehn Geräte zufällig ausgewählt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: Von den zehn ausgewählten Geräten ist keines fehlerhaft.

B: Von den zehn ausgewählten Geräten ist mindestens eines fehlerhaft.

Die Geräte werden in vier Werken in jeweils großer Stückzahl hergestellt.
Der Tabelle können für jedes Werk folgende Daten entnommen werden:

- der Anteil der in diesem Werk hergestellten Geräte an der Gesamtzahl aller hergestellten Geräte,
- der Anteil der fehlerhaften Geräte unter den in diesem Werk hergestellten Geräten.

Werk	A	B	C	D
Anteil an der Gesamtzahl	10%	30%	20%	40%
Anteil der fehlerhaften Geräte	5%	3%	4%	2%

c) Weisen Sie nach, dass der Anteil der fehlerhaften Geräte unter allen hergestellten Geräten 3 % beträgt.

d) Ein unter allen hergestellten Geräten zufällig ausgewähltes Gerät ist fehlerhaft.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es im Werk A hergestellt wurde.

e) Von im Werk A hergestellten Geräten werden 250 zufällig ausgewählt.

Ermitteln Sie die Anzahl fehlerhafter Geräte, die darunter mit der größten Wahrscheinlichkeit auftritt.

f) Geben Sie einen Wert von s an, für den mit dem Term $200 \cdot 0{,}98^s \cdot 0{,}02 + 0{,}98^{200}$ im Sachzusammenhang die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses berechnet werden kann.

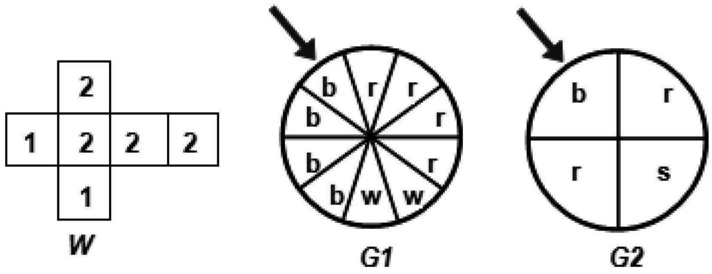
Beschreiben Sie das zugehörige Ereignis.

g) Ermitteln Sie, wie viele im Werk C hergestellte Geräte mindestens zufällig ausgewählt werden müssen, damit sich darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens 500 Geräte befinden, die nicht fehlerhaft sind.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben								
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	Summe
BE	2	3	2	3	2	4	4	20

Aufgabe 3.2 CAS: Zufallsexperimente

Lisa und Tom haben im Fundus der Schule einen Würfel und zwei Glücksräder (s. Abb.) gefunden. Sie führen damit verschiedene Zufallsexperimente durch.



Der Würfel *W* ist durch Neubeschriftung aus einem Laplacewürfel entstanden.
Die Glücksräder sind in jeweils gleich große Sektoren eingeteilt. Die Sektoren sind farbig markiert (s. Abb.; r: rot; b: blau; s: schwarz; w: weiß). Wird eines der Glücksräder gedreht, so bleibt es nach kurzer Zeit stehen und der zugehörige Zeiger zeigt (zufällig) auf einen der Sektoren. Es soll ausgeschlossen sein, dass der Zeiger auf die Grenze zwischen zwei Sektoren zeigt.

a) Im ersten Experiment würfelt Tom zunächst mit dem Würfel *W*, anschließend dreht Lisa dasjenige Glücksrad, das der Würfel anzeigt (zeigt *W* z. B. „1“, so wird *G1* gedreht).
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
A_1: Der Würfel *W* zeigt „2“ und das Glücksrad *G2* zeigt anschließend „Rot“.
A_2: Das Glücksrad, das entsprechend dem Würfelergebnis gedreht wird, zeigt „Weiß“ oder „Rot“.

b) In einem neuen Experiment wirft Tom den Würfel *W* und Lisa dreht gleichzeitig das Glücksrad *G2*. Von den jetzt möglichen sechs Ergebnissen haben drei die gleiche Wahrscheinlichkeit.
Ermitteln Sie diese drei Ergebnisse.

c) Jetzt dreht Lisa das Glücksrad *G1* zehnmal.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
C_1: Das Glücksrad *G1* zeigt genau viermal „Rot“.
C_2: Das Glücksrad *G1* zeigt mindestens fünfmal „Rot“. [Zur Kontrolle: $\mathrm{P}(C_2) \approx 0{,}3669$]

d) Tom spielt das 10-malige Drehen des Glücksrades *G1* (das Experiment aus c) in Gedanken 30-mal durch und bestimmt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis C_2 genau *i* mal eintritt (i = 0; 1; 2; …; 30).
Er behauptet, dass für genau fünf Werte von *i* diese Wahrscheinlichkeit größer als 10 % ist.
Prüfen Sie, ob seine Behauptung zutrifft.

e) Das Glücksrad *G1* soll 20-mal gedreht werden. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den ersten zehn Drehungen genau fünfmal „Rot“ das Ergebnis ist und insgesamt höchstens neunmal „Rot“ das Ergebnis ist.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	5	3	4	4	4	20