Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2017

Mathematik

Leistungskurs mit CAS

Aufgabenvorschlag

Hilfsmittel:

Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache

Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist bzw. für Berlin von der zuständigen Senatsverwaltung für die Verwendung im Abitur zugelassen ist.

Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder des automatisierten Lösens von Gleichungen verfügen

CAS, das zugelassen und an der Schule eingeführt ist.

Gesamtbearbeitungszeit: 270 Minuten inkl. Lese- und Auswahlzeit

Aufgabenstellung 1

Thema/Inhalt: Analysis

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 1.1 oder 1.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 2

Thema/Inhalt: Analytische Geometrie

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 3

Thema/Inhalt: Stochastik

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 3.1 oder 3.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabe 1.1 CAS: Verbindungsbrücke

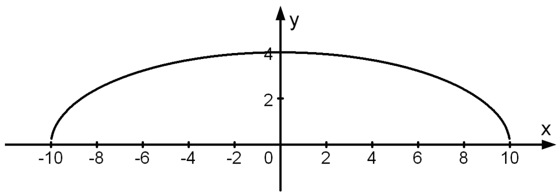


Abbildung 1

Abbildung 2

Die Abbildung 2 zeigt eine Überbauung der Französischen Straße zwischen zwei Bürogebäuden aus der Kaiserzeit vor 1914. Der Bogen des Gewölbes, das den darüber liegenden Gang trägt, hat eine Breite von 20 m und in der Mitte eine Höhe von 4 m, gemessen ab der Höhe der Sockel, die das Gewölbe an den Häuserwänden halten.

Ein Koordinatensystem wird entsprechend der Abbildung 1 so festgelegt, dass die *x*-Achse in Höhe der Sockel liegt, $1\,\text{LE} = 1\,\text{m}$.

Der Bogen wird mit einer Wurzelfunktion *f* mit $f(x) = k \cdot \sqrt{a - x^2}$, $k > 0$, $a > 0$, modelliert.

a) Untersuchen Sie die Funktion *f* auf Nullstellen in Abhängigkeit von a .
Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Graphen von *f* genau einen Hochpunkt an der Stelle $x = 0$ besitzen und berechnen Sie dessen Koordinaten.
Weisen Sie nach, dass *f* keine Wendestellen besitzen kann.
Bestimmen Sie die Definitionsbereiche für *f* und für *f '*.

b) Nennen Sie die drei Bedingungen, die der Graph von *f* mindestens erfüllen muss, um den Gewölbebogen zu modellieren und berechnen Sie die Parameterwerte für *a* und *k*.

Im Folgenden wird die Funktion *v* mit $v(x) = 0{,}4 \cdot \sqrt{100 - x^2}$ verwendet.

c) Im Inneren der Brücke laufen die Fußgänger vom Punkt $R(-10 \mid y_R\ )$ aus auf einer schiefen Ebene nach oben, die von der Seite gesehen wie eine Tangente auf dem Bogen aufliegt. Diese Tangente berührt den Bogen im Punkt $B(-6 \mid v(-6))$.
Berechnen Sie die Größe des Winkels, mit dem die Ebene ansteigt.
Ermitteln Sie eine Gleichung für die Tangente und *y*-Koordinate des Punktes *R*.
Berechnen Sie die Länge der schiefen Ebene von Punkt *R* bis zum Punkt *B*.

d) Am Gewölbe wird zwischen den Punkten $P(-\sqrt{96} \mid 0{,}8)$ und $Q(\sqrt{96} \mid 0{,}8)$ ein Drahtseil gespannt, an dem in der Mitte eine schwere Straßenlaterne im Punkt L angebracht wird. Das Drahtseil hängt durch und bildet ein Dreieck mit den Eckpunkten *P*, *Q* und *L*.
In *P* und *Q* trifft das Drahtseil orthogonal von unten auf den Gewölbebogen.
Bestimmen Sie die Koordinaten von *L* und den Winkel des Drahtes bei *L*.

e) Der Brückenbogen kann auch mit dem Graphen einer Funktion mit der Gleichung $g(x) = \dfrac{5a}{x^2 - a} + b$ modelliert werden. Dabei sollen die Höhe und die Breite des Brückenbogens unverändert bleiben.
Ermitteln Sie a und b und berechnen Sie für $-10 \le x \le 10$ die sichtbare Fläche der Gebäudebrücke zwischen dem Bogen und der oberen waagerechten Begrenzungslinie mit $y = 9$.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

f) Der Graph von *v* rotiert um die *x*-Achse. Dabei entsteht ein Rotationskörper.
Ermitteln Sie das Volumen des Rotationskörpers.

g) Der Bogen kann auch mit einer Funktion *g* mit $g(x) = ax^4 + bx^2 + c$ modelliert werden; $a, b, c \in IR$ mit *a* und *b* ungleich null.
Untersuchen Sie den Graphen von *g* auf Punkte mit waagerechter Tangente in Abhängigkeit von *a* und *b.* Entscheiden und begründen Sie, welche Eigenschaften *a* und *b* erfüllen müssen, damit der Graph von *g* nur einen Extrempunkt besitzt und dies ein Hochpunkt ist. Geben Sie dessen Koordinaten an.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben								
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	Summe
BE	13	5	7	8	6	3	8	50

Aufgabe 1.2 CAS: Straßenverlauf

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = e^{2ax} + e^{-2ax}$; $x \in IR$, $a \in IR$, $a \neq 0$.
Die zugehörigen Graphen sind G_a.

a) Geben Sie für $a > 0$ das Verhalten der Funktionswerte von f_a für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ an.
Begründen Sie, dass keine Funktion f_a eine Nullstelle hat und weisen Sie nach, dass alle Graphen G_a achsensymmetrisch zur *y*-Achse verlaufen.

b) Zeigen Sie, dass alle Graphen G_a denselben lokalen Extrempunkt besitzen und ermitteln Sie dessen Art und Koordinaten. Untersuchen Sie G_a auf mögliche Wendepunkte.

c) Der Graph $G_{0,15}$ wird von den Parallelen zur *x*-Achse mit der Gleichung $y = k$; $2 < k < 6$ in den Punkten A_k und B_k geschnitten. A_k, B_k und der Punkt $C(0\,|\,6)$ bilden ein Dreieck.
Zeichnen Sie in das Koordinatensystem (siehe nächste Seite) eines der möglichen Dreiecke A_kB_kC ein.
Begründen Sie ohne Rechnung, dass keines der möglichen Dreiecke A_kB_kC einen minimalen Flächeninhalt haben kann, aber ein solches Dreieck mit maximalem Flächeninhalt existiert.
Ermitteln Sie eine Gleichung, mit der man in Abhängigkeit vom *x*-Wert des im I. Quadranten liegenden Eckpunktes den Flächeninhalt des Dreiecks A_kB_kC bestimmen kann.

d) Begründen Sie, dass es zu jedem Graphen G_{a_1} der Schar einen zweiten Graphen G_{a_2} der Schar gibt, der mit G_{a_1} identisch ist. Ermitteln Sie die reellen Zahlen a_1 und a_2, für die die Graphen G_{a_1} und G_{a_2} durch den Punkt $R(2\,|\,4)$ verlaufen.

Für die folgenden Teilaufgaben gilt: $1\,\text{LE} = 150\,\text{m}$.

e) Eine langgezogene Kurve auf einer Landstraße kann im Intervall $[-2;4]$ in sehr guter Näherung durch den Graphen $G_{0,15}$ modelliert werden.
Im Punkt $P(4\,|\,f_{0,15}(4))$ mündet sie tangential, d. h. ohne Knick, in eine zunächst geradlinig verlaufende Schnellstraße.
Zeigen Sie, dass ein Teil dieser Schnellstraße für $x \geq 4$ näherungsweise durch einen Teil der Geraden *g* mit der Gleichung $y = 0{,}9x$ modelliert werden kann.

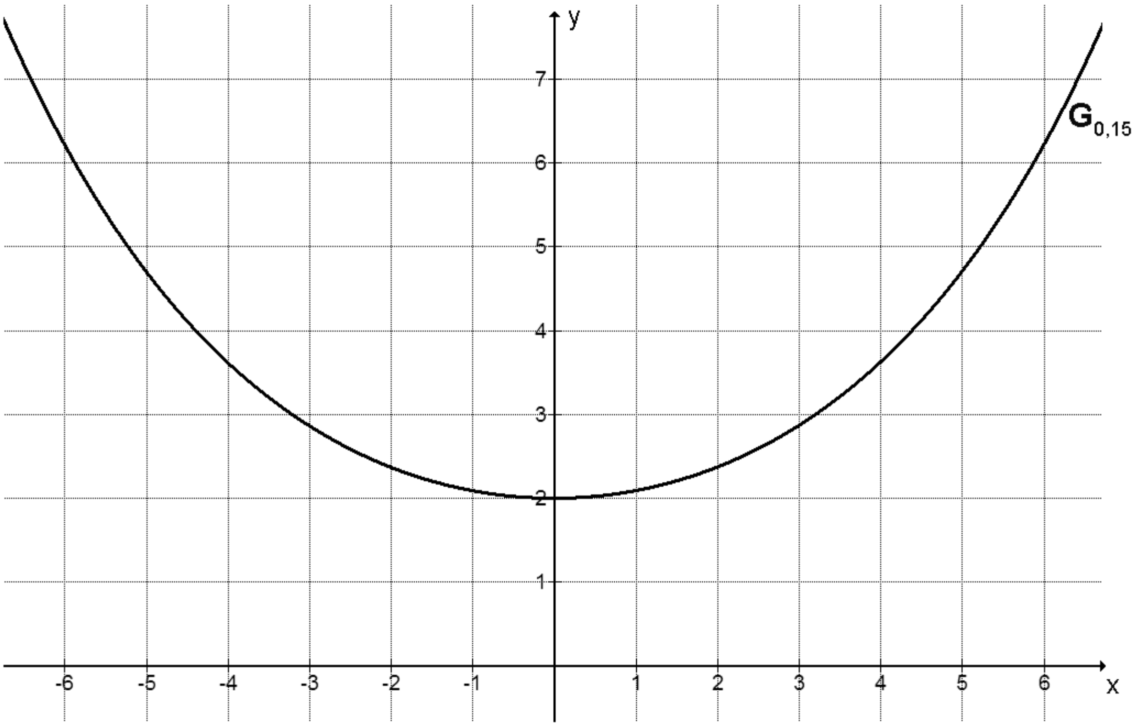
f) Die Schnellstraße verläuft ab dem Punkt *P* aus Teilaufgabe e) für eine Strecke von 2,1 km bis zum Punkt *S* geradlinig und führt dann knickfrei durch eine scharfe Rechtskurve auf eine Bundesstraße. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes *S*.
[Zur Kontrolle: $S(14{,}4\,|\,13)$]
Die Rechtskurve kann durch eine quadratische Parabel beschrieben werden, auf der unter anderem der Punkt $Q(15{,}5\,|\,13{,}3)$ liegt.
Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Ermittlung der Parabelgleichung auf.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

g) Die Fläche, die von den beiden Koordinatenachsen, der Landstraße, der Schnellstraße und der Geraden $x = 7$ eingeschlossen wird, nutzt ein Landwirt zu 80% für den Anbau von Getreide.
Ermitteln Sie die Größe der Getreideanbaufläche und geben Sie diese in Hektar an.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben								
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	Summe
BE	6	9	9	5	6	10	5	50

Koordinatensystem zu Aufgabe 1.2 c)



Aufgabe 2.1 CAS: Solarmodule

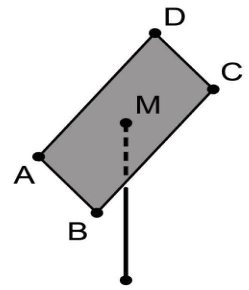
In einem kartesischen Koordinatensystem ist das Viereck *ABCD* mit $A(0\,|\,0\,|\,1)$, $B(2\,|\,6\,|\,1)$, $C(-4\,|\,8\,|\,5)$ und $D(-6\,|\,2\,|\,5)$ gegeben. Der Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks wird mit *M* bezeichnet.

a) Begründen Sie, dass die Gerade *AB* parallel zur *x*-*y*-Ebene verläuft.

Weisen Sie nach, dass das Viereck *ABCD* ein Rechteck ist.

Geben Sie die Koordinaten von *M* an.

b) Das Rechteck *ABCD* liegt in einer Ebene *E*. Ermitteln Sie eine Gleichung von *E* in Koordinatenform.
[Zur Kontrolle: $3x - y + 5z = 5$]



Solarmodule werden auf einem Trägergestell montiert, das an einem vertikal stehenden Metallrohr befestigt ist. Die gesamte Fläche der Solarmodule wird zu einem bestimmten Zeitpunkt modellhaft durch das Rechteck *ABCD* dargestellt. Das Metallrohr lässt sich im Modell durch eine Strecke beschreiben, der Befestigungspunkt am Trägergestell durch den Punkt *M* (vgl. Abbildung). Im Koordinatensystem beschreibt die *x*-*y*-Ebene die Horizontale; eine Längeneinheit entspricht 0,8 m in der Wirklichkeit.

c) Berechnen Sie, wie weit der Befestigungspunkt von einer seitlichen Kante, $\overline{AD}$ oder $\overline{BC}$, entfernt ist.

Im Sinne eines möglichst großen Energieertrags sollte der Neigungswinkel φ der Modulfläche gegenüber der Horizontalen zwischen 30° und 36° liegen.

Prüfen Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist.

d) Zum betrachteten Zeitpunkt fällt das Sonnenlicht, das im Modell durch parallele Geraden dargestellt wird, senkrecht auf die Fläche der Solarmodule. Diese Fläche erzeugt auf dem horizontalen Untergrund einen rechteckigen Schatten. Begründen Sie unter Verwendung einer geeignet beschrifteten Skizze, dass der Flächeninhalt des Schattens mithilfe des Terms $\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \dfrac{\left|\overrightarrow{AD}\right|}{\cos(\varphi)} \cdot (0{,}8\text{ m})^2$ berechnet werden kann.

Um die Solarmodule während eines Tages ständig möglichst gut nach der Sonneneinstrahlung ausrichten zu können, lässt sich das Metallrohr mit dem Trägergestell um die Längsachse des Rohres drehen. Die Neigung des Trägergestells bleibt dabei unverändert.

e) Betrachtet wird der untere linke Eckpunkt der Modulfläche, der im Modell durch den Punkt *A* dargestellt wird. Berechnen Sie den Radius des Kreises, auf dem sich dieser Eckpunkt bei der Drehung des Metallrohrs bewegt.

f) Begründen Sie ohne zu rechnen, dass der in Teilaufgabe e) ermittelte Radius entsprechend auch für den unteren rechten Eckpunkt der Modulfläche gilt.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben							
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	6	3	4	5	4	3	25

Aufgabe 2.2 CAS: Zelt

Ein geschlossenes Zelt, das auf horizontalem Untergrund steht, hat die Form einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Die seitlichen Kanten der Zeltwände werden durch vier gleich lange Stangen gebildet. Das Zelt ist 3,90 m hoch, die Seitenlänge des Zeltbodens beträgt 5,00 m.

Das Zelt kann in einem kartesischen Koordinatensystem durch eine Pyramide *ABCDS* mit der Spitze *S* modellhaft dargestellt werden. Der Punkt *A* liegt im Koordinatenursprung, *B* auf dem positiven Teil der *x*-Achse und *D* auf dem positiven Teil der *y*-Achse. Der Punkt *C* hat die Koordinaten $(5\,|\,5\,|\,0)$, der Mittelpunkt der Grundfläche wird mit M bezeichnet.
Das Dreieck *ABS* liegt in der Ebene $E:\ -39y+25z=0$
Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.

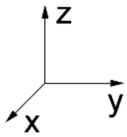


Abb. 1

a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte *B*, *D*, *M* und *S* an und zeichnen Sie die Pyramide in ein Koordinatensystem gemäß Abbildung 1 ein.

b) Jeweils zwei benachbarte Zeltwände schließen im Inneren des Zelts einen stumpfen Winkel ein. Ermitteln Sie dessen Größe.

c) Im Zelt ist eine Lichtquelle so aufgehängt, dass sie von jeder der vier Wände einen Abstand von 80 cm hat. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes, der die Lichtquelle im Modell darstellt.

d) Der Ortsvektor eines Punktes *P* lässt sich in der Form $\overrightarrow{OP}=r\cdot\overrightarrow{OC}+s\cdot\overrightarrow{OS}$ mit $r,\ s\in[0;1]$ und $r+s=1$ darstellen. Weisen Sie nach, dass *P* auf der Strecke $\overline{CS}$ liegt.

Betrachtet wird die Zeltwand, die im Modell durch das Dreieck *CDS* dargestellt wird. Dieses Dreieck liegt in der Ebene $F:\ 39y+25z=195$.
Ein Teil dieser Zeltwand kann mithilfe zweier weiterer Stangen zu einem horizontalen Vordach aufgespannt werden (vgl. Abbildung 2).

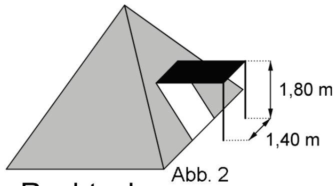


Abb. 2

Die dadurch entstehende Öffnung in der Zeltwand kann im Modell durch ein Rechteck dargestellt werden. Eine Seite dieses Rechtecks liegt so auf der Strecke $\overline{CD}$, dass der eine Endpunkt dieser Seite von *C* ebenso weit entfernt ist wie der andere Endpunkt von *D*.

e) Weisen Sie nach, dass die Länge des Vordachs etwa 2,14 m beträgt.
Alle Punkte derjenigen Kante des Vordachs, an deren Enden die beiden Stangen befestigt sind, haben im Modell die gleiche *y*-Koordinate. Bestimmen Sie diese *y*-Koordinate. [Zur Kontrolle: Die *y*-Koordinate beträgt etwa 5,98.]

f) Auf das Zelt treffendes Sonnenlicht lässt sich im Modell zu einem bestimmten Zeitpunkt durch parallele Geraden mit einem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -4{,}2 \\ a \end{pmatrix}$ beschreiben. Zu diesem Zeitpunkt trifft Sonnenlicht durch ein kleines Loch im horizontalen Vordach genau auf den Mittelpunkt des Zeltbodens.
Für a kommen verschiedene ganzzahlige Werte infrage. Ermitteln Sie einen dieser Werte und geben Sie die Koordinaten des zugehörigen Punktes an, der im Modell eine mögliche Position des Lochs im Vordach darstellt.

Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	5	4	4	3	4	5	25

Aufgabe 3.1 CAS: Autopanne

Laut Statistik war im Jahre 2014 ein Defekt in der Elektrik häufigste Pannenursache bei Personenkraftwagen. Im Falle einer Panne wird die Zentrale der Pannenhilfe informiert und ein Pannenhelfer zum Einsatz geschickt.
Die Tabelle zeigt, mit welcher Häufigkeit verschiedene Defekte als Pannenursache auftreten.

Elektrik	Motor	Bremsen	Sonstige
46 %	23 %	20 %	11 %

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben mit Hilfe der Angaben aus der Tabelle. Es wird davon ausgegangen, dass jedes Pannenfahrzeug genau einen Defekt hat.

a) In einer Meldezentrale werden eingehende Anrufe zu Pannen registriert. An einem Tag gehen 50 Anrufe ein.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten für das Ereignis
A: In mehr als 9 von 50 Fällen sind die Bremsen defekt.

b) Ein Pannenhelfer fährt zu 14 Einsätzen. Dabei werden die folgenden Ereignisse betrachtet:
B: Bei genau *k* Pannenfahrzeugen sind die Bremsen defekt.
C: Bei genau *k+1* Pannenfahrzeugen sind die Bremsen defekt.

Ermitteln und vergleichen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(B)$ und $P(C)$ für $k = 5$.
Es gibt einen Wert von *k* für den gilt: $P(B) = P(C)$.
Stellen Sie eine Gleichung auf, mit der dieser Wert von *k* ermittelt werden kann und berechnen Sie diesen Wert.

c) Unter 14 Pannenfahrzeugen sind genau 5 Kleinwagen und 9 andere Fahrzeuge. Ein Pannenhelfer ist bei genau 6 der 14 Pannenfahrzeuge im Einsatz.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis
D: Unter den 6 Pannenfahrzeugen sind höchstens 2 Kleinwagen.

Die durchschnittlichen Kosten für eine Reparatur hängen davon ab, welcher Defekt vorliegt. Bei einem Defekt der Elektrik betragen die Kosten 250 €. Bei einem Defekt am Motor betragen die Kosten 400 €. Bei anderen Defekten betragen die Reparaturkosten 320 €.

d) Berechnen Sie den Erwartungswert für die Reparaturkosten.

e) Ein Defekt der Elektrik führt mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % zu Startproblemen. Ein Defekt am Motor führt mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % zu Startproblemen. Andere Fehler führen nicht zu Startproblemen.
Bestimmen Sie den Erwartungswert der Reparaturkosten für ein Fahrzeug mit Startproblemen.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	3	9	5	3	5	25

Aufgabe 3.2 CAS: Freizeit

Fernsehen ist die mit Abstand häufigste Freizeitbeschäftigung der deutschen Bevölkerung ab 14 Jahre: 96 % aller Personen sehen mindestens einmal pro Woche fern. Zwei weitere beliebte Freizeitbeschäftigungen der Bevölkerung sind beispielsweise Lesen (Zeitungen, Zeitschriften und Bücher): 72,6 % und Arbeit am Computer: 60,3 %.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
   A: Zufällig ausgewählte Personen werden nacheinander befragt. Erst die fünfte befragte Person antwortet, dass sie gern am Computer arbeitet.
   B: Nur die dritte und fünfte von acht zufällig ausgewählten Personen arbeitet gern am Computer.
   C: Unter 100 zufällig ausgewählten Personen befinden sich mehr als 78 und weniger als 92 Personen, die mindestens einmal pro Woche fernsehen.

b) Berechnen Sie, wie viele Personen höchstens ausgewählt werden dürften, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, wenigstens eine Person zu finden, die in ihrer Freizeit nicht gern liest, unter 98 % liegt

c) 76 % der weiblichen Bevölkerung und 69 % der männlichen Bevölkerung lesen in ihrer Freizeit gern.
   Berechnen Sie den Anteil der Frauen in der deutschen Bevölkerung.
   Veranschaulichen Sie Ihren Lösungsansatz z. B. durch ein (reduziertes) Baumdiagramm oder eine Vierfeldertafel.

Ein Buchhändler organisiert eine Lesung des aktuellen Bestsellers eines beliebten Autors. Die Veranstaltung findet in einem Saal mit einer Kapazität von 175 Plätzen statt. Da im Mittel 6 % der bestellten Karten storniert werden, lässt der Buchhändler 180 Kartenreservierungen annehmen.

d) Es ist k die Anzahl der stornierten Karten.
   Geben Sie einen Term für $P(k)$ an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden kann, dass genau k der 180 bestellten Karten storniert werden.
   Ermitteln Sie den größten Wert dieser Wahrscheinlichkeit $P(k)$.

e) Tatsächlich nehmen 174 Besucher an der Lesung teil, darunter ein Deutschkurs und dessen Lehrerin. Es werden fünf Personen ausgelost, die eine Freikarte für die nächste Veranstaltung des Buchhändlers erhalten.
   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Lehrerin unter den Gewinnern einer Freikarte ist.
   Begründen Sie, dass das Modell der Binomialverteilung für die Berechnung ungeeignet ist.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	8	4	5	4	4	25