Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2018

Mathematik

Leistungskurs mit CAS

Aufgabenvorschlag

Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist bzw. für Berlin von der zuständigen Senatsverwaltung für die Verwendung im Abitur zugelassen ist. Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder des automatisierten Lösens von Gleichungen verfügen CAS, das zugelassen und an der Schule eingeführt ist.
Gesamtbearbeitungszeit:	270 Minuten inkl. Lese- und Auswahlzeit

Aufgabenstellung 1

Thema/Inhalt: Analysis

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 1.1 oder 1.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 2

Thema/Inhalt: Analytische Geometrie

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 3

Thema/Inhalt: Stochastik

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 3.1 oder 3.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabe 1.1 CAS: Vase

Gegeben ist die Funktionenschar f_a durch die Gleichung $f_a(x) = (x^2 + a) \cdot e^{0,5-x}; a \in \mathbb{R}$.
Die Graphen der Schar sind G_a.

a) Ermitteln Sie die Anzahl der Nullstellen von f_a in Abhängigkeit von a.
Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f_a für $x \to \infty$ und für $x \to -\infty$.

b) Geben Sie den Schnittpunkt des Graphen G_a mit der *y*-Achse an.
In der Abbildung 1 sind für ganzzahlige Parameterwerte a zwei Graphen der Funktionenschar f_a dargestellt.
Ermitteln Sie die Parameterwerte und beschriften Sie die Graphen.

c) Die Graphen G_2 und G_0, die *y*-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 3$ schließen eine Fläche ein. Berechnen Sie den Inhalt *A* dieser Fläche.

d) Weisen Sie nach, dass die Graphen G_a der Funktionenschar f_a für $a > 1$ keine Extrempunkte besitzen.

e) Weisen Sie nach, dass gilt: $f_2''(x) = (x-2)^2 e^{0,5-x}$.
Erläutern Sie, welche Schlussfolgerungen daraus über den Verlauf des Graphen G_2 gezogen werden können.

f) Der Graph G_2 verläuft im Intervall $[1;3]$ annähernd geradlinig und kann vereinfacht durch die Tangente t an diesen Graphen in $x = 2$ dargestellt werden.
Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente t.
[Zur Kontrolle: $t(x) = -2 \cdot e^{-1,5} \cdot x + 10 \cdot e^{-1,5}$]
Zeigen Sie, dass der Funktionswert der Tangente t an der Stelle $x = 1$ um weniger als 2 % vom Funktionswert von f_2 an dieser Stelle abweicht.

Der Graph $G_{0,65}$ der Funktion $f_{0,65}$ schließt über dem Intervall $[0;3]$ mit der *x*-Achse eine Fläche ein (siehe Abbildung 2).
Durch Rotation dieser Fläche um die *x*-Achse entsteht ein Körper, der modellhaft einer auf der Seite liegenden und nach links geöffneten Vase entspricht. Es gilt: $1\,\text{LE} = 1\,\text{dm}$.

g) Die Vase nimmt an zwei verschiedenen Stellen einen maximalen Radius von ca. 1,07 dm an. Ermitteln Sie diese beiden Stellen rechnerisch.

h) Berechnen Sie das Fassungsvermögen der Vase in Liter, wenn der Materialanteil am gesamten Volumen der Vase 10 % beträgt.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Aufgabe 1.1 CAS: Vase (Fortsetzung)

i) Interpretieren Sie im Sachzusammenhang die Funktion $b(t) = \pi \cdot \int\limits_{3-t}^{3} ((f_{0,65}(x))^2 \, dx$.

j) Die Vase soll stehend in einem Karton verpackt werden, der die Form eines regelmäßigen sechsseitigen Prismas besitzt. Stellen Sie den Zusammenhang zwischen dem maximalen Radius der Vase und der Grundfläche des Kartons mit Hilfe einer Skizze und einer Gleichung dar.
Ermitteln Sie, welches Volumen (in cm³) dieser Karton mindestens haben muss.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben											
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	j)	Summe
BE	8	3	3	5	7	5	5	5	2	7	50

Anlage zu 1.1: Vase

Abbildung 1

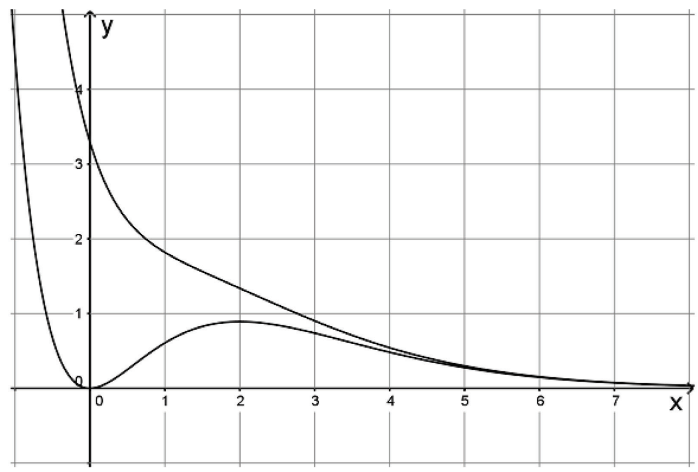
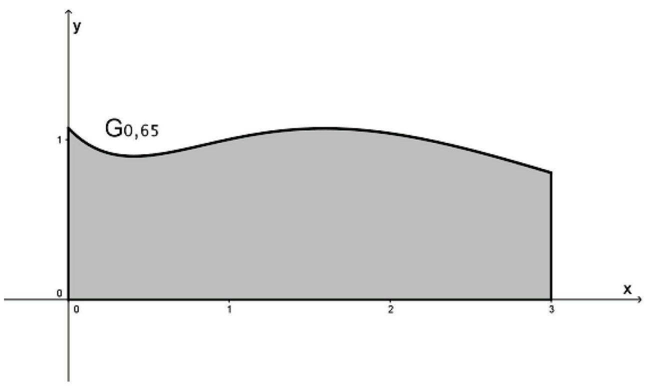


Abbildung 2



Aufgabe 1.2 CAS: Gartenteich

Gegeben sind die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = \frac{1}{a}x^3 + 3x^2 + 5x + 2a$; $x \in I\!R$, $a \in I\!R$, $a \neq 0$ und die Funktion h mit $h(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^{-3}$; $x \in I\!R$, $x \neq 0$.
Die zugehörigen Graphen sind G_a und K.

a) Geben Sie die für den Graphen K vorliegende Symmetrie an und begründen Sie diese.
Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte von h für $x \to +\infty$.
Begründen Sie, dass es keine reelle Zahl a gibt, so dass gilt: $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x)$.

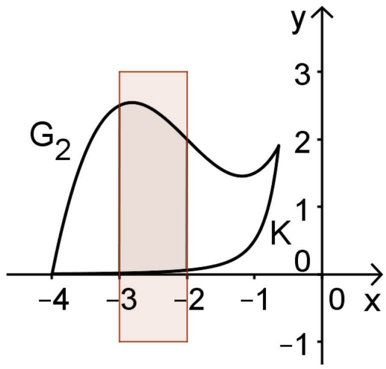
b) Die Tangente an K im Punkt $P(-1 \mid h(-1))$ und die beiden Koordinatenachsen begrenzen ein Dreieck.
Ermitteln Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

c) Begründen Sie, dass der Graph K keine lokalen Extrempunkte besitzt.

d) Ermitteln Sie die Koordinaten von zwei Punkten des Graphen G_2, in denen die Tangenten an den Graphen G_2 den Anstieg $m = 1{,}5$ haben.

e) Es gibt einen Wert des Parameters a, für den der Graph G_a genau einen Punkt mit waagerechter Tangente besitzt. Bestimmen Sie diesen Parameterwert.
Erläutern Sie, wie Sie nachweisen könnten, dass der Graph G_a für diesen Parameterwert einen Sattelpunkt besitzt.

Ein Gartenbesitzer hat sich in einer Ecke seines Gartens einen Teich angelegt. Der Rand dieses Teiches an der Wasseroberfläche wird durch die Graphen G_2 und K modelliert. Im Intervall $-3 \leq x \leq -2$ verläuft eine Brücke über den Teich, $1\ \text{LE} = 1\ \text{m}$.
In der nebenstehenden Darstellung sind die Teichoberfläche und die Brücke senkrecht von oben betrachtet dargestellt.



f) Ermitteln Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen G_2 und K. Runden Sie die Werte auf zwei Nachkommastellen.
Der Gartenteich wird kurzzeitig durch eine rechteckige Plane abgedeckt. Die Seiten dieser Plane liegen parallel zu den Koordinatenachsen.
Berechnen Sie die Seitenlängen, die diese Plane mindestens haben muss.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Aufgabe 1.2 CAS: Gartenteich (Fortsetzung)

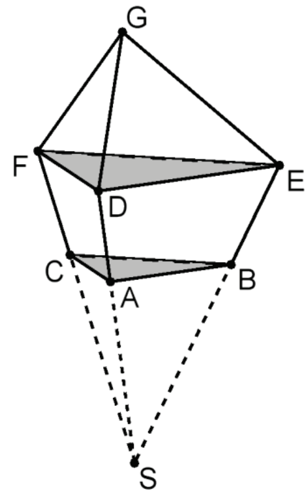
g) Wenn genau senkrecht zur Teichoberfläche Licht auf den Gartenteich fällt, entsteht durch die Brücke ein Schatten, der zum Teil auf der Wasseroberfläche liegt. Berechnen Sie die Größe der Wasseroberfläche, die in diesem Fall im Schatten liegt.

h) Die über den Teich führende Brücke soll in einem neuen x-y-Koordinatensystem modelliert werden durch eine ganzrationale Funktion 4. Grades, die symmetrisch zur y-Achse verläuft.
Die Brücke hat eine Spannweite von 4 Metern und ist in der Mitte 0,5 Meter hoch (über der x-Achse). An den beiden Enden hat die Brücke einen Steigungswinkel von 45° (bzw. – 45°).
Ermitteln Sie die Gleichung der Parabel.

i) Für einen Grillplatz hat der Gartenbesitzer eine Fläche in seinem Garten betoniert. Der Koordinatenursprung ist im Modell der Punkt der betonierten Fläche, der den geringsten Abstand zum Teichrand hat.
Ermitteln Sie diesen Abstand.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile										
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	Summe
BE	6	5	2	6	8	9	3	6	5	50

Aufgabe 2.1 CAS: Museum



Das Gebäude eines Museums kann modellhaft durch den abgebildeten Körper *ABCDEFG* dargestellt werden. Die obere Etage des Museums entspricht dabei der Pyramide *DEFG*, die untere Etage dem Körper *ABCDEF*, der Teil der Pyramide *DEFS* ist. Das Dreieck *ABC* liegt in der *x*-*y*-Ebene. Das Dreieck *DEF* liegt parallel zu dieser Ebene.
In einem kartesischen Koordinatensystem gilt für die Lage einiger der genannten Punkte: $A(-5\,|\,5\,|\,0)$, $B(-5\,|\,25\,|\,0)$, $D(0\,|\,0\,|\,15)$, $E(0\,|\,30\,|\,15)$, $F(-25\,|\,5\,|\,15)$ und $G(-10\,|\,10\,|\,35)$. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Realität.

a) Die folgenden Rechnungen zeigen ein mögliches Vorgehen zur Ermittlung der Koordinaten von S:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\15\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-5\\5\\-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\30\\15\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-5\\-5\\-15\end{pmatrix}\Leftrightarrow r=s=3$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\15\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-5\\5\\-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15\\15\\-30\end{pmatrix}\text{, d.h. } S(-15|15|-30)$$

Erläutern Sie das dargestellte Vorgehen.

b) Weisen Sie nach, dass die Bodenfläche der oberen Etage nicht rechtwinklig ist.

c) Berechnen Sie für das Dreieck *DEF* die Größe des Innenwinkels bei *E* sowie die Länge der Höhe auf der Seite $\overline{EF}$. [Zur Kontrolle: $h_{EF} \approx 21{,}21\text{m}$]

d) Für die obere Etage wird eine Anlage zur Entfeuchtung der Luft installiert, die für 100 m^3 Rauminhalt eine elektrische Leistung von 0,8 Kilowatt benötigt.
Weisen Sie nach, dass für den Betrieb der Anlage eine Leistung von 25 Kilowatt ausreichend ist.

e) Weisen Sie nach, dass sich die Gerade durch die Punkte *A* und *G* und die Ebene, in der das Dreieck *DEF* liegt, im Punkt $R\left(-\frac{50}{7}\,|\,\frac{50}{7}\,|\,15\right)$ schneiden.

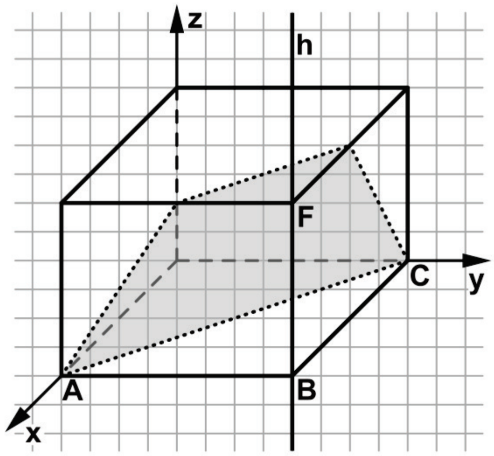
f) An einer Metallstange, die durch die Strecke $\overline{RG}$ dargestellt wird, ist ein Scheinwerfer befestigt, der sich entlang der Stange verschieben lässt. Die Größe des Scheinwerfers soll vernachlässigt werden. Der Scheinwerfer soll aus einer Entfernung von 5 m diejenige Wand beleuchten, die im Modell durch das Dreieck *EFG* dargestellt wird.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes, der die Position des Scheinwerfers im Modell beschreibt.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile							
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	4	3	5	4	3	6	25

Aufgabe 2.2 CAS: Quader

Die Punkte $A(4\,|\,0\,|\,0), B(4\,|\,4\,|\,0), C(0\,|\,4\,|\,0)$ und $F(4\,|\,4\,|\,3)$ sind Eckpunkte des abgebildeten Quaders. Die Gerade *h* verläuft durch *B* und *F*.



a) Begründen Sie, dass das Dreieck *ABC* rechtwinklig und gleichschenklig ist. Geben Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks an.

b) Geben Sie eine Gleichung der Gerade *g* an, die durch *A* und *C* verläuft. Begründen Sie, dass diese Gerade windschief zur Gerade *h* ist.

Die Punkte der Geraden *h* lassen sich durch $P_t(4\,|\,4\,|\,t)$ mit $t \in \mathbb{R}$ darstellen. Für jeden Wert von *t* liegen *A*, *C* und P_t in der Ebene $E_t: tx + ty - 4z = 4t$.

c) Ermitteln Sie diejenigen Werte von *t*, für die die zugehörige Ebene E_t mit der *x*-*y*-Ebene einen Winkel der Größe 60° einschließt.

Der abgebildete Quader wird durch eine der Ebenen E_t in zwei Teilkörper zerlegt. Die Kanten der Schnittfigur dieser Ebene und des Quaders sind in der Abbildung gepunktet dargestellt.

d) Beschreiben Sie, wie man mithilfe der Abbildung ermitteln kann, dass für diese Abbildung $t = 6$ ist.

e) Berechnen Sie das Volumen desjenigen der beiden Teilkörper, zu dem der Punkt *B* gehört, und erläutern Sie Ihr Vorgehen.

f) Es gibt Werte von *t*, für die die Schnittfigur des Quaders und der Ebene E_t die Form eines Dreiecks hat. Geben Sie alle diese Werte von *t* an und beschreiben Sie die Lage der Eckpunkte des Dreiecks.

g) Die folgende Aussage stellt die Lösung einer Aufgabe im Zusammenhang mit den bisher betrachteten geometrischen Objekten dar:

$$\left|\frac{t \cdot 4 + t \cdot 4 - 4 \cdot 0 - 4t}{\sqrt{t^2 + t^2 + 16}}\right| = 2$$

Formulieren Sie eine dazu passende Aufgabenstellung.
Geben Sie alle Lösungen der Gleichung an.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile								
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	Summe
BE	3	3	3	3	5	4	4	25

Aufgabe 3.1 CAS: Smartphone

In den Ländern V und W wurde im Jahr 2017 durch eine repräsentative Befragung ermittelt, welcher Anteil der Gesamtbevölkerung (mindestens) ein Smartphone besitzt. Solche Personen werden als „Smartphone-Besitzer“ bezeichnet. Folgende Anteile wurden ermittelt:

	Smartphone-Besitzer **unter 25 Jahren**	Smartphone-Besitzer **25 Jahre oder älter**	Smartphone-Besitzer **insgesamt**
Land **V**	8,1 %	5,0 %	5,4 %
Land **W**	56,5 %	24,0 %	29,8 %

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer zufällig ausgewählten Gruppe von 20 Einwohnern des Landes V, die 25 Jahre oder älter sind,
A_1: genau zwei zu den Smartphone-Besitzern gehören,
A_2: mindestens einer, aber weniger als fünf zu den Smartphone-Besitzern gehören,
A_3: genau einer oder genau drei Smartphone-Besitzer gehören.

b) Statt der 20 werden jetzt 40 Einwohner des Landes V, die 25 Jahre oder älter sind, befragt. Betrachtet wird das Ereignis
B: Genau vier der Befragten sind Smartphone-Besitzer.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses *B*.

Interpretieren Sie folgenden Term im Sachzusammenhang:
$1-0{,}76^{40}-\binom{40}{1}\cdot 0{,}24\cdot 0{,}76^{39}$.

c) Ein Einwohner des Landes W wird zufällig ausgewählt.
Ermitteln Sie, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass der ausgewählte Einwohner unter 25 Jahre alt ist.
Begründen Sie dabei Ihren Ansatz z. B. mithilfe eines Baumdiagramms.

d) In einem anderen Land T beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Einwohner Smartphone-Besitzer ist, *p* mit $0<p<1$.
Berechnen Sie wie groß *p* mindestens sein muss, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter fünf zufällig ausgewählten Einwohnern dieses Landes mindestens ein Smartphone-Besitzer befindet, mindestens 99 % beträgt.

e) Eine Gruppe von 22 Fußballspielern trifft sich zu einem Fußballspiel. Insgesamt befinden sich vier Smartphone-Besitzer unter den 22 Spielern.
Die beiden Mannschaften mit jeweils 11 Spielern werden ausgelost.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in der einen oder in der anderen Mannschaft genau drei Smartphone-Besitzer befinden.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	6	5	5	4	5	25

Aufgabe 3.2 CAS: Brillenträger

In einer großen Gemeinde tragen 62,5 % der Bevölkerung eine Brille. Bei den Frauen beträgt der Anteil 64,8 %. Es ist bekannt, dass 52,1 % der Bevölkerung Frauen sind.

a) Stellen Sie diesen Sachverhalt in einer Vierfeldertafel dar.
Eine aus der Bevölkerung zufällig ausgewählte Person ist ein Mann.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er eine Brille trägt.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
A: Von acht zufällig ausgewählten Personen sind alle Brillenträger.
B: Von 20 zufällig ausgewählten Personen sind genau drei keine Brillenträger.

c) Betrachtet werden die Ereignisse
C: Von 20 zufällig ausgewählten Personen sind genau neun Brillenträger.
D: Von 20 zufällig ausgewählten Personen sind genau zwölf Brillenträger.
Berechnen Sie Wahrscheinlichkeit des Ereignisses C.
Begründen Sie mit Hilfe des Erwartungswertes für die Anzahl der Brillenträger, ob die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis D größer oder kleiner ist als die für das Ereignis C.

d) Für $0 \le k \le 17$ betrachtet man das Ereignis
E_k: Von 20 zufällig ausgewählten Personen sind mindesten k, aber höchstens k+3 Personen Brillenträger.
Geben Sie an, für welchen Wert von *k* die Wahrscheinlichkeit von E_k maximal wird.
Begründen Sie Ihre Angabe.

e) Ein Optiker hatte eine Werbeagentur mit einer Werbekampagne für sein Brillengeschäft beauftragt. Die Werbeagentur verspricht nun, dass mehr als 30 % der Brillenträger der Gemeinde Kunden in seinem Geschäft sind.
Der Optiker vermutet jedoch, dass höchstens 30 % der Brillenträger der Gemeinde bei ihm Kunden sind. Durch eine Stichprobe möchte er seine Vermutung untersuchen. Dazu lässt er 100 zufällig ausgewählte Brillenträger befragen, ob sie Kunden bei ihm sind.
Geben Sie die kleinstmögliche untere Grenze des Intervalls $A = [k;100]$ an, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis der Stichprobe im Intervall A liegt, höchstens 5 % beträgt (unter der Annahme, dass die Vermutung des Optikers zutrifft).

f) Auf einer Brillenmesse befindet sich in einer Gruppe von 20 Brillenträgern genau eine Person, die eine Designerbrille trägt.
Berechnen Sie, wie viele Personen dieser Gruppe zufällig und nacheinander „ohne Zurücklegen“ mindestens auszuwählen sind, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich der Träger der Designerbrille unter den ausgewählten Personen befindet, mindestens 75 % beträgt. Begründen Sie Ihren Lösungsansatz.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile							
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	4	5	5	2	3	6	25