Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2014

Mathematik

Kurs auf erhöhtem Anforderungsniveau

Aufgabenvorschlag

Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder dem automatisierten Lösen von Gleichungen verfügen.
Gesamtbearbeitungszeit:	270 Minuten inkl. Lese- und Auswahlzeit

Aufgabenstellung 1

Thema/Inhalt: Analysis

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 1.1 oder 1.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 2

Thema/Inhalt: Analytische Geometrie

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 3

Thema/Inhalt: Stochastik

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 3.1 oder 3.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabe 1.1: Hosentasche

Gegeben ist die Funktionsschar f_a mit $f_a(x) = (ax+1)\cdot e^{-ax}$; $x \in IR$; $a \in IR$.
Die Graphen dieser Funktionsschar f_a sind G_a.

a) Ermitteln Sie die Nullstellen von f_a in Abhängigkeit von *a*.
Bestimmen Sie den Wert des Parameters *a*, für den die Scharfunktion keine Nullstelle hat, und geben Sie die zugehörige Funktionsgleichung an.

b) Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f_a für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ in Abhängigkeit von *a* ($a \neq 0$) an.

c) Weisen Sie nach, dass alle Graphen G_a ($a \neq 0$) den lokalen Extrempunkt $E(0\,|\,1)$ haben. Ohne Herleitung dürfen Sie verwenden: $f_a''(x) = e^{-ax}(a^3x - a^2)$.
Alle Wendepunkte der Graphen G_a ($a \neq 0$) liegen auf einem parallel zur *x*-Achse verlaufenden Graphen einer Funktion *g*. Geben Sie die Funktionsgleichung von *g* an.
Auf die Untersuchung der hinreichenden Bedingung kann verzichtet werden.

d) Zeigen Sie, dass $F_a(x) = \left(-x - \frac{2}{a}\right)\cdot e^{-ax}$; $x \in IR$; $a \in IR$; $a \neq 0$ eine Stammfunktion von f_a ist.

e) In der Anlage sind zwei Graphen der Funktionsschar f_a dargestellt.

Begründen Sie, dass es sich dabei um die Graphen G_2 und G_{-2} handelt und beschriften Sie die Graphen in der Anlage.

Eine Bekleidungsfirma möchte Gesäßtaschen von Jeans wie rechts abgebildet besticken. Zur Modellierung des Motivs werden die Graphen G_2 und G_{-2} genutzt (vgl. Anlage).

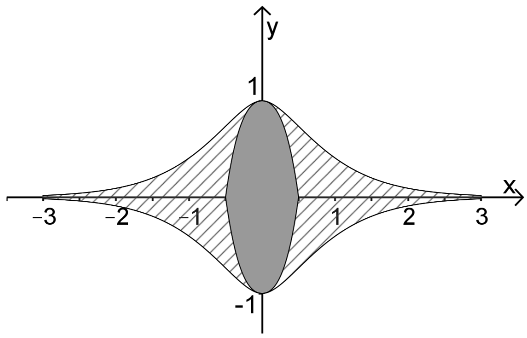


Abbildung zu e) und f)

Der untere Rand des Motivs soll ebenfalls durch 2 Graphen dargestellt werden, so dass die *x*- bzw. *y*-Achse Symmetrieachsen des Motivs sind.
Geben Sie jeweils eine Funktionsgleichung an und zeichnen Sie die Graphen möglichst vollständig in der Anlage.

Der in der Abbildung schraffiert dargestellte Teil des Motivs soll bestickt werden.
Berechnen Sie die Größe dieser Fläche im Intervall [–3; 3].

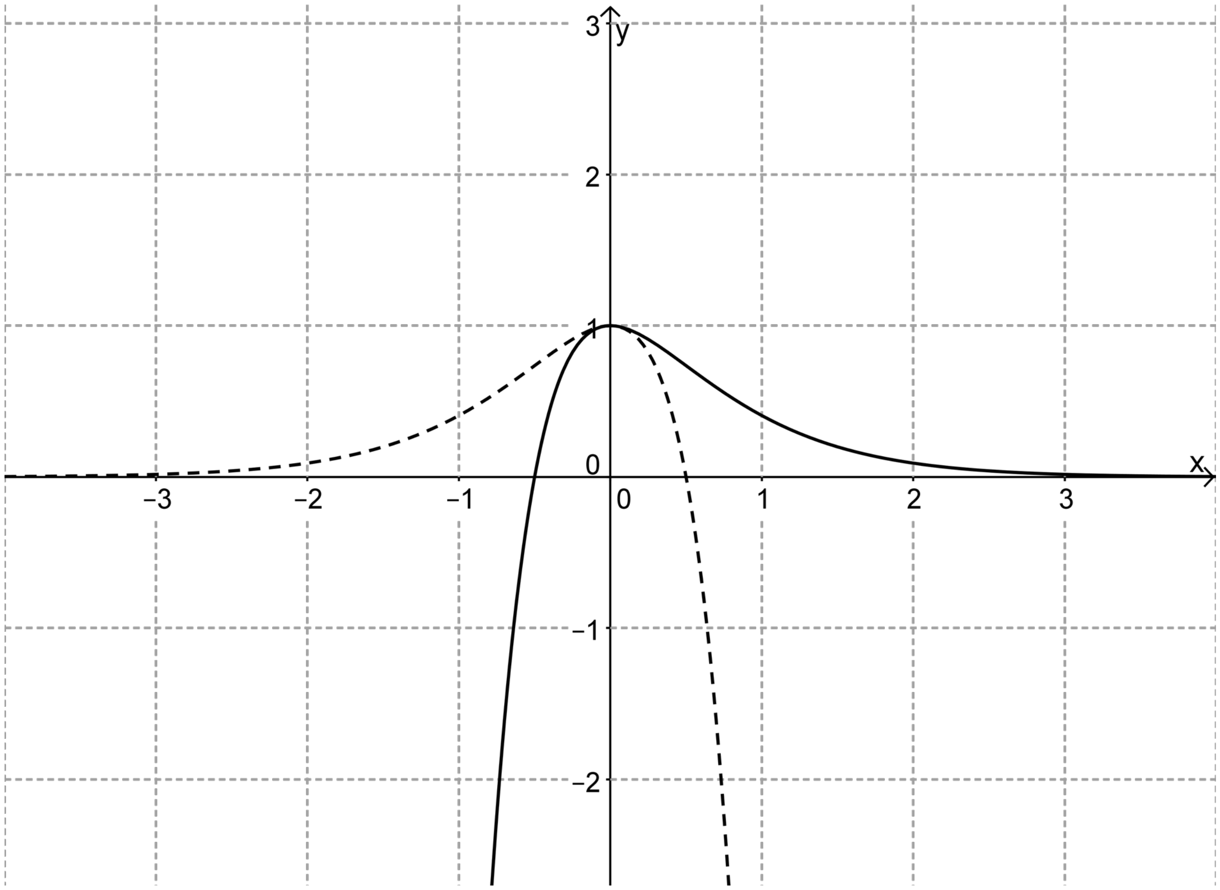
f) Der Teil der in der Abbildung grau gefärbten Fläche, der oberhalb der *x*-Achse liegt, soll nun durch den Graphen einer quadratischen Funktion *p* mit der Gleichung $p(x) = -bx^2 + c$ ($b, c \in IR$) so dargestellt werden, dass die Größe dieser Teilfläche unverändert (e – 2) FE beträgt. Der lokale Extrempunkt bleibt der Punkt $E(0\,|\,1)$.

Ermitteln Sie den Wert für *c* und stellen Sie eine Gleichung auf, aus der *b* berechnet werden kann.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben							
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	3	4	10	3	15	5	40

Anlage

Anlage zu Aufgabe 1.1: Hosentasche



Aufgabe 1.2: Optikerlogo

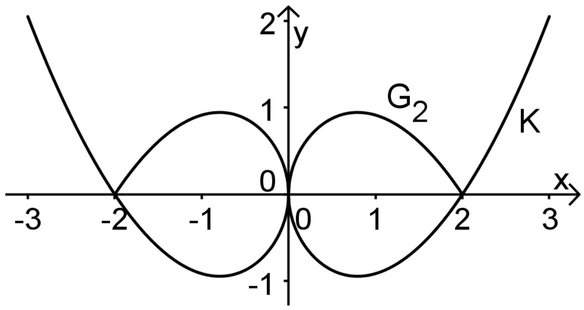
Gegeben sind die Funktionen f_a mit der Gleichung $f_a(x) = \sqrt{ax} - \frac{1}{2}x^2$; $a \in IR$, $a > 0$.
Die Graphen dieser Funktionen sind G_a .

a) Geben Sie den Definitionsbereich sowie das Verhalten der Funktionswerte von f_a für $x \to +\infty$ an. Jede Funktion f_a besitzt genau zwei Nullstellen. Berechnen Sie diese.

b) Zeigen Sie, dass die Ableitungsfunktionen f_a' die Gleichung $f_a'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax}} - x$ haben.
Begründen Sie, dass ein möglicher lokaler Extrempunkt von G_a immer ein Hochpunkt des Graphen ist.
Bestimmen Sie für $a = 4$ die Koordinaten des zugehörigen Hochpunktes.

c) Es existiert genau ein Graph G_a , dessen Tangente im Punkt $\left(1 \mid f_a(1)\right)$ mit den beiden Koordinatenachsen ein gleichschenkliges Dreieck einschließt.
Ermitteln Sie den zugehörigen Parameterwert *a*.

d) Ein Optiker hat eine Werbefirma damit beauftragt, ein Logo für sein Geschäft anzufertigen. Die Werbefirma hat ein brillenähnliches Logo entworfen, für das sie unter anderem im Intervall $[0;2]$ den Graphen G_2 und im Intervall $[0;3]$ den durch Spiegelung von G_2 an der *x*-Achse entstehenden Graphen *K* verwendet hat (siehe Abbildung).



Geben Sie eine Gleichung für die zu *K* gehörende Funktion *k* an.
Berechnen Sie die von G_2 und *K* im I. und IV. Quadranten eingeschlossene Fläche, die einem Brillenglas entspricht, und geben Sie diese in Quadratmetern an ($1\,\text{LE} = 0{,}5\,\text{m}$).

e) Bestimmen Sie die Gleichungen der beiden Funktionen, deren Graphen im Intervall $[-3;0]$ bzw. $[-2;0]$ das Logo zu einer symmetrischen „Brille“ vervollständigen.
Begründen Sie am Beispiel von G_2 und *K*, dass die modellhaften „Brillengläser“ im Koordinatenursprung keinen „Knick“ haben, das heißt, dass die Graphen im Übergangspunkt eine gemeinsame Tangente besitzen.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	8	14	5	8	5	40

Aufgabe 2.1: Installation

Ein Künstler bereitet für eine Ausstellung im Freien eine Installation vor. Dafür hat er fünf verschieden große, dreieckige Segeltücher hergestellt. In den Punkten $A(5\mid 3\mid 1)$ und $B(-3\mid 7\mid 9)$ des Geländes sollen jeweils zwei Ecken aller fünf Segeltücher befestigt werden. Die jeweils dritte Ecke der fünf Segeltücher soll in verschiedenen Punkten der Schar $C_k(2+k\mid -3+4k\mid 10-k)$ mit $k \in \mathbb{R}$ so angebracht werden, dass die Tücher straff gespannt sind und fünf ebene Dreiecke bilden.
Um die dritte Ecke der Tücher jeweils im Punkt C_k zu befestigen, wird ein Seil gespannt. Dieses Seil wird durch die Gerade *g* beschrieben (s. Abb.).
Es gilt: $1\ \text{LE} = 1\ \text{m}$.

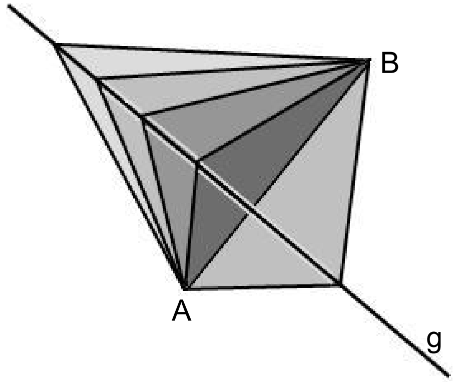


Abb.: Ansicht der Installation von oben (nicht maßstabsgetreu)

a) Geben Sie eine Gleichung für *g*, auf der alle Punkte C_k liegen, an.
Zeigen Sie, dass die Gerade durch *A* und *B* und die Gerade *g* windschief sind.

b) Ein Segeltuch wird in *A*, *B* und im Punkt C_0 befestigt.
Zeigen Sie, dass dieses Segeltuch die Form eines gleichschenkligen Dreiecks hat.
Bestimmen Sie die Größe der Basiswinkel.
Berechnen Sie die Fläche des Segeltuchs in m^2.

c) In der Ebene, zu der *A* und *B* symmetrisch liegen, sollen Stahlschnüre zwischen den Segeltüchern gespannt werden. An den Stahlschnüren sind farbige Strahler befestigt, um die Segeltücher abends anzuleuchten.
Geben Sie eine Gleichung der Ebene *E*, in der die Stahlschnüre liegen, in Koordinatenform an.
Zeigen Sie, dass alle Stahlschnüre am Seil aus Aufgabe a) befestigt werden können.

d) Begründen Sie, dass alle fünf Segeltücher die Form eines gleichschenkligen Dreiecks haben.

e) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes C_k, an dem das Segeltuch mit der kleinstmöglichen Fläche befestigt werden müsste.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile						
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	6	10	6	3	5	30

Aufgabe 2.2: Skigebiet

Im Bild ist ein Ausschnitt aus einem Skigebiet zu sehen. Vereinfacht werden die Pisten und Wege in den betrachteten Abschnitten als geradlinig verlaufend sowie Objekte als Punkte angenommen. Es gilt $1\ \text{LE} = 100\ \text{m}$.

Zwei Skipisten werden durch Teile der Geraden *g* und *h* modelliert.

Die Gerade *g* hat die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ 15 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix};\ r \in IR$.

Die Gerade *h* verläuft durch die Punkte $P_1(-2\,|\,8\,|\,13{,}5)$ und $P_2(-4\,|\,12\,|\,15{,}5)$.
Zwischen der Bezeichnung von Gerade und entsprechender Piste wird nicht unterschieden.
Im Punkt $K(0\,|\,7\,|\,15{,}75)$ ist eine Kamera installiert, die Bilder vom Skigebiet sendet.

a) Geben Sie eine Gleichung für die Gerade *h* an. Beide Geraden treffen in einem Punkt *Q* aufeinander. Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes *Q*.

b) Ein Skifahrer startet im Punkt P_2 und fährt die Piste *h* hinunter. Nach 20 Sekunden passiert er den Punkt $P_3(-3{,}5\,|\,11\,|\,15)$. Zeigen Sie, dass P_3 auf der Piste *h* liegt.
Berechnen Sie die durchschnittliche Geschwindigkeit, mit der er in den letzten 20 Sekunden unterwegs war.
Bestimmen Sie die Größe des Neigungswinkels der Piste *h* gegenüber einer horizontalen Ebene.

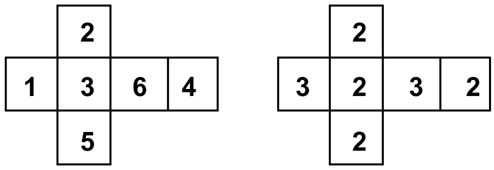
c) Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene *E*, in der die Pisten *g* und *h* liegen.
[Zur Kontrolle: $E:\ -y + 2z = 19$]
Weisen Sie nach, dass die geradlinige Bahn $b:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -3{,}75 \\ 12 \\ 15{,}75 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};\ m \in IR$
eines Skilifts parallel zu *E* verläuft. Berechnen Sie den Abstand des Skilifts zur Ebene *E*.

d) Die Kamera im Punkt *K* hat bei einem Schwenk über das Skigebiet zu zwei verschiedenen Zeitpunkten die Punkte P_1 und P_2 erfasst.
Berechnen Sie die Größe des Winkels P_1KP_2.

e) Zur Beschneiung der Pisten *g* und *h* soll in einem Punkt *S* eine Schneekanone aufgestellt werden. *S* soll neben den Pisten in der Ebene *E* aus Teilaufgabe c) liegen und zu beiden Pisten den gleichen Abstand haben.
Beschreiben Sie einen Lösungsweg zur Ermittlung der Koordinaten eines möglichen Punktes *S*.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	5	8	9	4	4	30

Aufgabe 3.1: Abstandsspiel



W1 W2

Nebenstehend sind die Netze zweier Würfel W1 und W2 abgebildet. W1 ist ein üblicher Laplace-Würfel, W2 ist durch Neubeschriftung aus einem solchen entstanden. Das Abstandsspiel hat folgende Regeln:

- Einer der beiden Würfel wird zweimal geworfen.
- Es wird die Differenz der beiden Würfelergebnisse so gebildet, dass sie nicht negativ ist.
- Diese Zahl – also der Abstand der Würfelergebnisse – ist das Ergebnis des Spiels.

Beispiele: „2“ und „6“ gewürfelt, Ergebnis: 6 – 2 = 4 (der Abstand von 2 und 6);
„2“ und „2“ gewürfelt, Ergebnis: 2 – 2 = 0 (der Abstand von 2 und 2).

a) Bestimmen Sie sowohl für den Würfel W1 als auch für den Würfel W2 die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse bei diesem Abstandsspiel:

A: Das Ergebnis beträgt 0.

B: Das Ergebnis ist ungerade. (Hinweis: null ist eine gerade Zahl.)

[Zur Kontrolle: Für den Würfel W1 gilt $P(A)=\frac{1}{6}$, für W2 gilt $P(A)=\frac{5}{9}$.]

b) René spielt mit dem Würfel W2. Er würfelt einen Pasch (d. h. beide Würfel zeigen die gleiche Augenzahl), erzielt also das Ergebnis 0.
Marie spielt mit W1. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie bei diesem Abstandsspiel ein größeres Ergebnis als René erzielt.

c) Mit dem Würfel W1 wird zehnmal das Abstandsspiel gespielt.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden beiden Ereignisse:

C: Das Ergebnis 0 ergibt sich genau fünfmal.

D: Das Ergebnis 0 ergibt sich mindestens dreimal.

d) Bestimmen Sie die Mindestanzahl der Spiele, die mit W1 durchgeführt werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von über 99 % das Ergebnis 0 mindestens einmal erzielt wird.

e) René ergreift zufällig einen der beiden Würfel und spielt einmal das Abstandsspiel.
Das Ergebnis ist 0.
Bestimmen Sie unter dieser Bedingung die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er den Würfel W1 gegriffen hat.

f) Auf einer bestimmten Anzahl der Seiten des Würfels W1, auf denen nicht „6“ steht, wird die Aufschrift mit „0“ überschrieben. Mit diesem neuen Würfel W1 wird fünfmal das Abstandsspiel gespielt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dann für die Differenz der gewürfelten Augenzahlen nicht ein einziges Mal das Ergebnis 6 erreicht wird, beträgt ungefähr 40 %.

Bestimmen Sie die Anzahl der überschriebenen Seiten.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben							
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	10	2	6	4	4	4	30

Anlage

Anlage zu Aufgabe 3.1: Abstandsspiel

Summierte Binomialverteilungen

Gerundet auf vier Nachkommastellen, weggelassen ist „0,“, alle freien Plätze enthalten 1,0000.
Wird die Tabelle „von unten“ gelesen (p > 0,5), ist der richtige Wert 1 – (abgelesener Wert)

n	k	p										k	n
		0,05	0,10	$\frac{1}{6}$	0,20	0,25	0,30	$\frac{1}{3}$	0,40	0,45	0,50		
5	0	7738	5905	4019	3277	2373	1681	1317	0778	0503	0313	4	5
	1	9774	9185	8038	7373	6328	5282	4609	3370	2562	1875	3	
	2	9988	9914	9645	9421	8965	8369	7901	6826	5931	5000	2	
	3		9995	9967	9933	9844	9692	9547	9130	8688	8125	1	
	4			9999	9997	9990	9976	9959	9898	9815	9688	0	
10	0	5987	3487	1615	1074	0563	0282	0173	0060	0025	0010	9	10
	1	9139	7361	4845	3758	2440	1493	1040	0464	0233	0107	8	
	2	9885	9298	7752	6778	5256	3828	2991	1673	0996	0547	7	
	3	9990	9872	9303	8791	7759	6496	5593	3823	2660	1719	6	
	4	9999	9984	9845	9672	9219	8497	7869	6331	5044	3770	5	
	5		9999	9976	9936	9803	9527	9234	8338	7384	6230	4	
	6			9997	9991	9965	9894	9803	9452	8980	8281	3	
	7				9999	9996	9984	9966	9877	9726	9453	2	
	8						9999	9996	9983	9955	9893	1	
	9								9999	9997	9990	0	
15	0	4633	2059	0649	0352	0134	0047	0023	0005	0001	0000	14	15
	1	8290	5490	2596	1671	0802	0353	0194	0052	0017	0005	13	
	2	9638	8159	5322	3980	2361	1268	0794	0271	0107	0037	12	
	3	9945	9444	7685	6482	4613	2969	2092	0905	0424	0176	11	
	4	9994	9873	9102	8358	6865	5155	4041	2173	1204	0592	10	
	5	9999	9978	9726	9389	8516	7216	6184	4032	2608	1509	9	
	6		9997	9934	9819	9434	8689	7970	6098	4522	3036	8	
	7			9987	9958	9827	9500	9118	7869	6535	5000	7	
	8			9998	9992	9958	9848	9692	9050	8182	6964	6	
	9				9999	9992	9963	9915	9662	9231	8491	5	
	10					9999	9993	9982	9907	9745	9408	4	
	11						9999	9997	9981	9937	9824	3	
	12								9997	9989	9963	2	
	13									9999	9995	1	
20	0	3585	1216	0261	0115	0032	0008	0003	0000	0000	0000	19	20
	1	7358	3917	1304	0692	0243	0076	0033	0005	0001	0000	18	
	2	9245	6769	3287	2061	0913	0355	0176	0036	0009	0002	17	
	3	9841	8670	5665	4114	2252	1071	0604	0160	0049	0013	16	
	4	9974	9568	7687	6296	4148	2375	1515	0510	0189	0059	15	
	5	9997	9887	8982	8042	6172	4164	2972	1256	0553	0207	14	
	6		9976	9629	9133	7858	6080	4793	2500	1299	0577	13	
	7		9996	9887	9679	8982	7723	6615	4159	2520	1316	12	
	8		9999	9972	9887	9591	8867	8095	5956	4143	2517	11	
	9			9994	9972	9861	9520	9081	7553	5914	4119	10	
	10			9999	9994	9961	9829	9624	8725	7507	5881	9	
	11				9999	9991	9949	9870	9435	8692	7483	8	
	12					9998	9987	9963	9790	9420	8684	7	
	13						9997	9991	9935	9786	9423	6	
	14							9998	9984	9936	9793	5	
	15								9997	9985	9941	4	
	16									9997	9987	3	
	17										9998	2	
n	k	0,95	0,90	$\frac{5}{6}$	0,80	0,75	0,70	$\frac{2}{3}$	0,60	0,55	0,50	k	n
		p											

Aufgabe 3.2: Förderverein

Der Förderverein einer Schule besteht zu 80 % aus Eltern, zu 15 % aus Lehrkräften und zu 5 % aus Vertretern von Betrieben der Stadt.

a) Die langjährige Erfahrung zeigt, dass 15 % der Eltern, 10 % der Lehrkräfte und 90 % der Betriebe dem Förderverein einmal im Jahr eine Spende zukommen lassen.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
A: Ein zufällig ausgewähltes Mitglied des Fördervereins hat eine Spende geleistet.
B: Ein zufällig ausgewähltes Mitglied ist Lehrkraft und hat keine Spende geleistet.

Von einem zufällig ausgewählten Mitglied ist bekannt, dass es zu den Spendern gehört. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es ein Elternteil ist.

b) Eine weitere Einnahmequelle des Fördervereins ist das an zwei Abenden stattfindende Sommerkonzert. An der Pausenversorgung sind insgesamt 20 Personen beteiligt, davon 15 Schüler/innen und 5 Eltern. Die Helfer teilen sich auf die beiden Abende zu je einer Gruppe von 10 Personen auf. Diese Aufteilung erfolgt zufällig.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass am ersten Abend 8 Schüler und 2 Eltern zusammen arbeiten.

Während der Pause werden Getränke und Speisen angeboten. Die Preise werden mithilfe eines Spiels festgelegt. Dazu wird ein Tetraeder, dessen Aufschriften sich aus dem abgebildeten Netz ergeben, zweimal geworfen. Die Zahl auf der Tetraederseite, die unten liegt und die man nicht sieht, gilt als die geworfene. Der Preis ergibt sich aus dem Produkt der beiden geworfenen Augenzahlen in Euro.

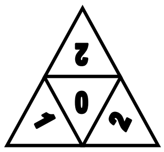


Abb.: Netz des Tetraeders

c) Die Zufallsgröße X gibt die Höhe der mit dem Tetraeder festgelegten Preise an. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X ist z. T. in der Tabelle vorgegeben:

x_i in Euro	0	1	
$P(X = x_i)$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{16}$	

Weisen Sie die Richtigkeit der vorgegebenen Werte in der Tabelle nach und vervollständigen Sie die Tabelle.

Untersuchen Sie, ob die zu erwartenden Einnahmen pro Spiel im Mittel höher als zwei Euro sind.

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
D: Unter zehn zufällig ausgewählten Mitspielern befindet sich genau einer, der nichts bezahlen muss.
E: Unter zehn zufällig ausgewählten Mitspielern befindet sich höchstens einer, der einen Euro bezahlen muss.

e) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses:
F: Unter 10 zufällig ausgewählten Mitspielern befinden sich genau drei, die nichts bezahlen müssen, und genau zwei, die genau einen Euro bezahlen müssen.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	8	4	8	6	4	30