# Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2015

# Mathematik

## Grundkurs mit CAS

## Aufgabenvorschlag

| | |
|---|---|
| **Hilfsmittel:** | Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache<br>Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist bzw. für Berlin von der zuständigen Senatsverwaltung für die Verwendung im Abitur zugelassen ist.<br>Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder des automatisierten Lösens von Gleichungen verfügen<br>CAS, das zugelassen und an der Schule eingeführt ist. |
| **Gesamtbearbeitungszeit:** | 210 Minuten inkl. Lese- und Auswahlzeit |

### Aufgabenstellung 1

**Thema/Inhalt:** Analysis

**Hinweis:** Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 1.1 oder 1.2 zur Bearbeitung aus.

### Aufgabenstellung 2

**Thema/Inhalt:** Analytische Geometrie

**Hinweis:** Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

### Aufgabenstellung 3

**Thema/Inhalt:** Stochastik

**Hinweis:** Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 3.1 oder 3.2 zur Bearbeitung aus.

## Aufgabe 1.1 CAS: Bienen

Die Funktion $b$ mit $b(t) = 60 - 54 \cdot e^{-0,25t}$ beschreibt für $0 \le t \le 12$ näherungsweise die Anzahl der Bienen in einem Bienenvolk im Zeitraum von April bis Juni. Dabei ist $t$ die Zeit seit Beobachtungsbeginn in Wochen und $b(t)$ die Anzahl der Bienen in Tausend.

a) Ermitteln Sie die Bienenanzahl zu Beobachtungsbeginn, nach 4 Wochen und nach 12 Wochen.

Begründen Sie, dass die Funktion $b$ für $t \to \infty$ einen Grenzwert hat. Geben Sie diesen Grenzwert an.

Skizzieren Sie den Graphen von $b$ für $0 \le t \le 12$ mit Hilfe der ermittelten Werte im Koordinatensystem in der Anlage.

b) Vom Imkerverband wird eine neue Bienensorte empfohlen, bei der der Bienenbestand $f(t)$ besonders schnell wächst ($t$ in Wochen und $f(t)$ in Tausend).

Die Wachstumsgeschwindigkeit (gemessen in 1000 Bienen pro Woche) wird durch die Funktion $v$ mit $v(t) = f'(t) = 3 \cdot e^{0,25t}$ angegeben.

Ermitteln Sie für beide Bienensorten die Wachstumsgeschwindigkeiten zu Beobachtungsbeginn und nach 6 Wochen und vergleichen Sie das Wachstum des Bienenbestands bei beiden Sorten.

Berechnen Sie den Zeitpunkt, bei dem die Wachstumsgeschwindigkeit bei beiden Bienensorten 12 000 Bienen pro Woche beträgt.

c) Ein Bienenvolk der neuen Sorte hat zu Beobachtungsbeginn 2000 Bienen.
Ermitteln Sie die Gleichung der Funktion $f$, die die Entwicklung des Bienenbestands beschreibt . [Zur Kontrolle: $f(t) = 12 \cdot e^{0,25t} - 10$]

Berechnen Sie, nach welcher Zeit sich der Anfangsbestand verfünffacht hat.

Zeichnen Sie den Graphen von $f$ für $0 \le t \le 8$ mit Hilfe von drei geeigneten Wertepaaren in das Koordinatensystem von Aufgabenteil a) ein.

d) Die Funktion $d$ mit $d(t) = b(t) - f(t)$ beschreibt den Unterschied des Bienenbestands zwischen der alten und der neuen Sorte.

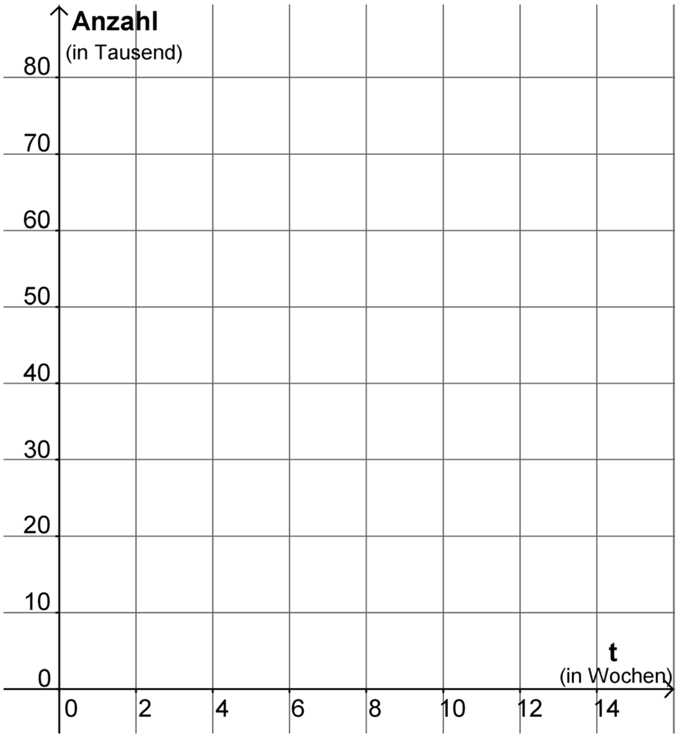
Ermitteln Sie den Zeitpunkt $t$, bei dem der Unterschied in den ersten 6 Wochen am größten ist. Begründen Sie, dass der Unterschied zum berechneten Zeitpunkt maximal ist.

e) Weisen Sie nach, dass zum Zeitpunkt $t$, bei dem der Unterschied bei der alten und der neuen Bienensorte am größten ist, die momentanen Wachstumsgeschwindigkeiten bei beiden Sorten gleich sind. Für diesen Nachweis sollen die Wachstumsgeschwindigkeiten nicht konkret berechnet werden.

| Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Teilaufgabe | a) | b) | c) | d) | e) | Summe |
| BE | 9 | 9 | 11 | 7 | 4 | 40 |

**Anlage**

## Anlage zu Aufgabe 1.1 CAS: Bienen



**Aufgabe 1.2 CAS: Fischmobile**

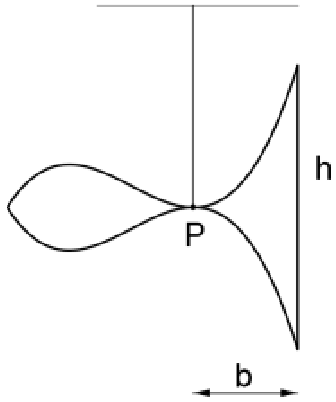
Gegeben ist die Funktion $f$ mit der Gleichung $f(x)=\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{8}x^2+\frac{25}{16}x;\ x\in I\!R$.

Der Graph dieser Funktion ist $G_f$.

a) Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von $f$ für $x\to+\infty$ und $x\to-\infty$ an.
Berechnen Sie die Nullstellen von $f$. Begründen Sie, dass der Graph der Funktion $f$ nicht achsensymmetrisch zur $y$-Achse verlaufen kann.

b) Bestimmen Sie die Art und die Koordinaten lokaler Extrempunkte von $G_f$.
Der Graph der Funktion $f$ besitzt genau einen Wendepunkt.
Bestimmen Sie seine Koordinaten.
Ermitteln Sie die Größe des Steigungswinkels der Tangente an den Graphen der Funktion $f$ in diesem Wendepunkt.
Zeichnen Sie $G_f$ im Intervall $[0;8]$ in das in der Anlage gegebene Koordinatensystem.

Für ein Mobile soll eine Figur in der Form eines Fisches aus Pappe hergestellt werden. Das Profil des Fisches wird durch den Graphen $G_f$ und den durch Spiegelung von $G_f$ an der $x$-Achse entstandenen Graphen $G_g$ begrenzt.
Im Aufhängepunkt $P$ berühren sich die beiden Graphen, siehe nebenstehende Abbildung.




c) Der gespiegelte Graph $G_g$ ist der Graph einer Funktion $g$.
Geben Sie eine Funktionsgleichung von $g$ an.
Zeichnen Sie $G_g$ in das Koordinatensystem in der Anlage ein.

d) Im Folgenden gilt: $1\,\text{LE}=1\,\text{cm}$.
Der Fisch soll so hergestellt werden, dass die Schwanzflosse (rechts von $P$) denselben Flächeninhalt wie der vordere Teil des Fischkörpers (links von $P$) hat.
Bestimmen Sie für diesen Fall die Breite $b$ und die Höhe $h$ der Schwanzflosse.

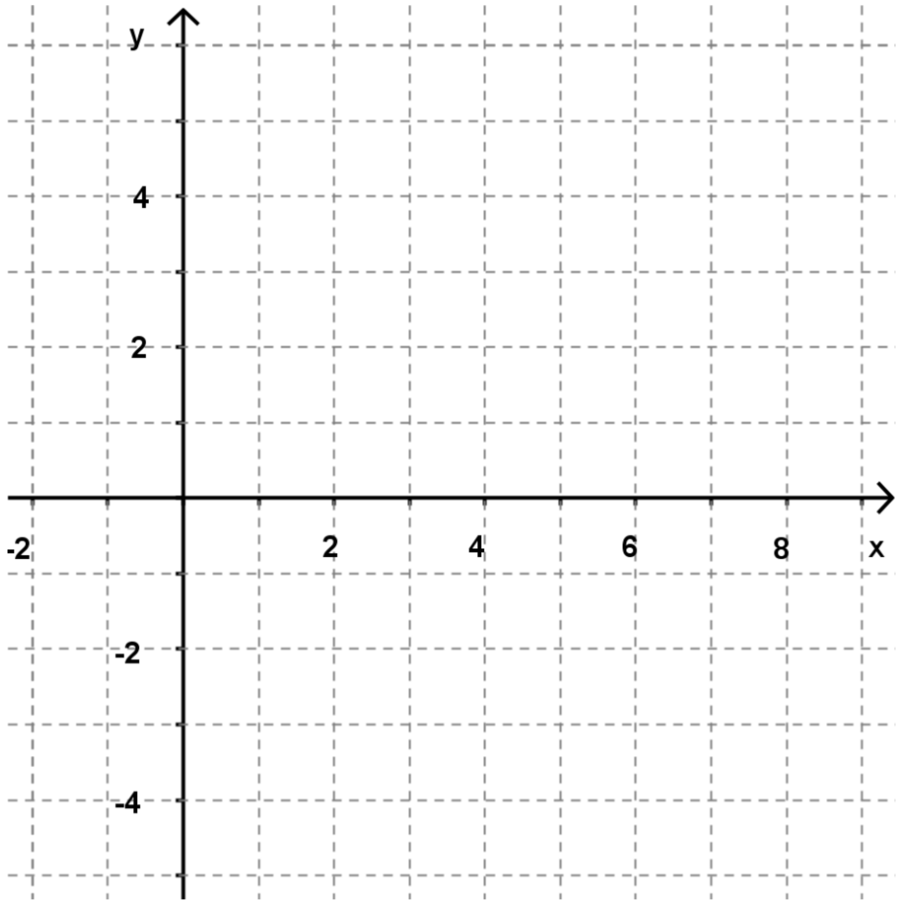
e) Die Position eines Auges des Fisches wird durch den Mittelpunkt einer $\frac{81}{64}\,\text{cm}$ langen Strecke im Intervall $[0;3]$ beschrieben, die parallel zur $y$-Achse verläuft und deren Anfangs- und Endpunkt auf den Graphen $G_f$ und $G_g$ liegen.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes für die Position des beschriebenen Auges.

f) Ein Mobile besteht aus mehreren solcher Fische. Der Verkauf der Fische erfolgt in einer Schachtel, die die Form eines dreiseitigen Prismas hat. Die Grundfläche der Schachtel wird durch die Tangenten an die Graphen $G_f$ und $G_g$ in den Punkten $T_1(1\,|\,1)$ und $T_2(1\,|\,-1)$ sowie die Gerade, auf der das Ende der Schwanzflosse liegt, begrenzt.
Ermitteln Sie den Flächeninhalt der Grundfläche für eine solche Schachtel.

| Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Teilaufgabe | a) | b) | c) | d) | e) | f) | Summe |
| BE | 6 | 14 | 3 | 8 | 3 | 6 | 40 |

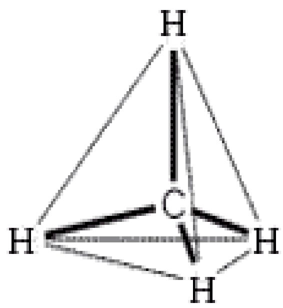
**Anlage**

## Anlage zu Aufgabe 1.2 CAS: Fischmobile



## Aufgabe 2.1 CAS: Methanmolekül

Ein Tetraeder ist gegeben durch seine Eckpunkte $H_1(8\,|\,0\,|\,0)$, $H_2(0\,|\,8\,|\,0)$, $H_3(0\,|\,0\,|\,8)$ und $H_4(8\,|\,8\,|\,8)$.




a) Der Tetraeder wird als Modell eines Methanmoleküls verwendet. Dabei stellen die vier Eckpunkte die vier Wasserstoffatome und der Punkt $C(4\,|\,4\,|\,4)$ das Kohlenstoffatom dar.

Zeichnen Sie das Methanmodell als Tetraeder in das beigefügte Koordinatensystem ein.

b) Zeigen Sie, dass der Punkt $C$ der Mittelpunkt des Tetraeders ist.

c) Weisen Sie nach, dass der Vektor $\overrightarrow{H_1H_2}$ ein Normalenvektor der Ebene $E$ ist, in der die Punkte $H_3$, $H_4$ und $C$ liegen.

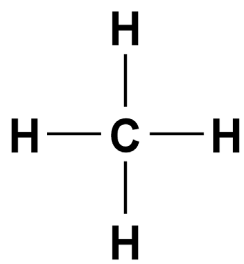
Stellen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene $E$ auf.
[Zur Kontrolle: $E: -x + y = 0$]

d) Zeigen Sie, dass der Mittelpunkt der Strecke $\overline{H_1H_2}$ in der Ebene $E$ (aus Teil c) liegt. Begründen Sie, dass die Ebene $E$ Symmetrieebene des Tetraeders ist.

e) Der Winkel $\alpha$ zwischen den Strecken $\overline{CH_1}$ und $\overline{CH_2}$ wird Bindungswinkel genannt. Berechnen Sie den Bindungswinkel im Methanmolekül.

f) Methan hat die nebenstehende Strukturformel.

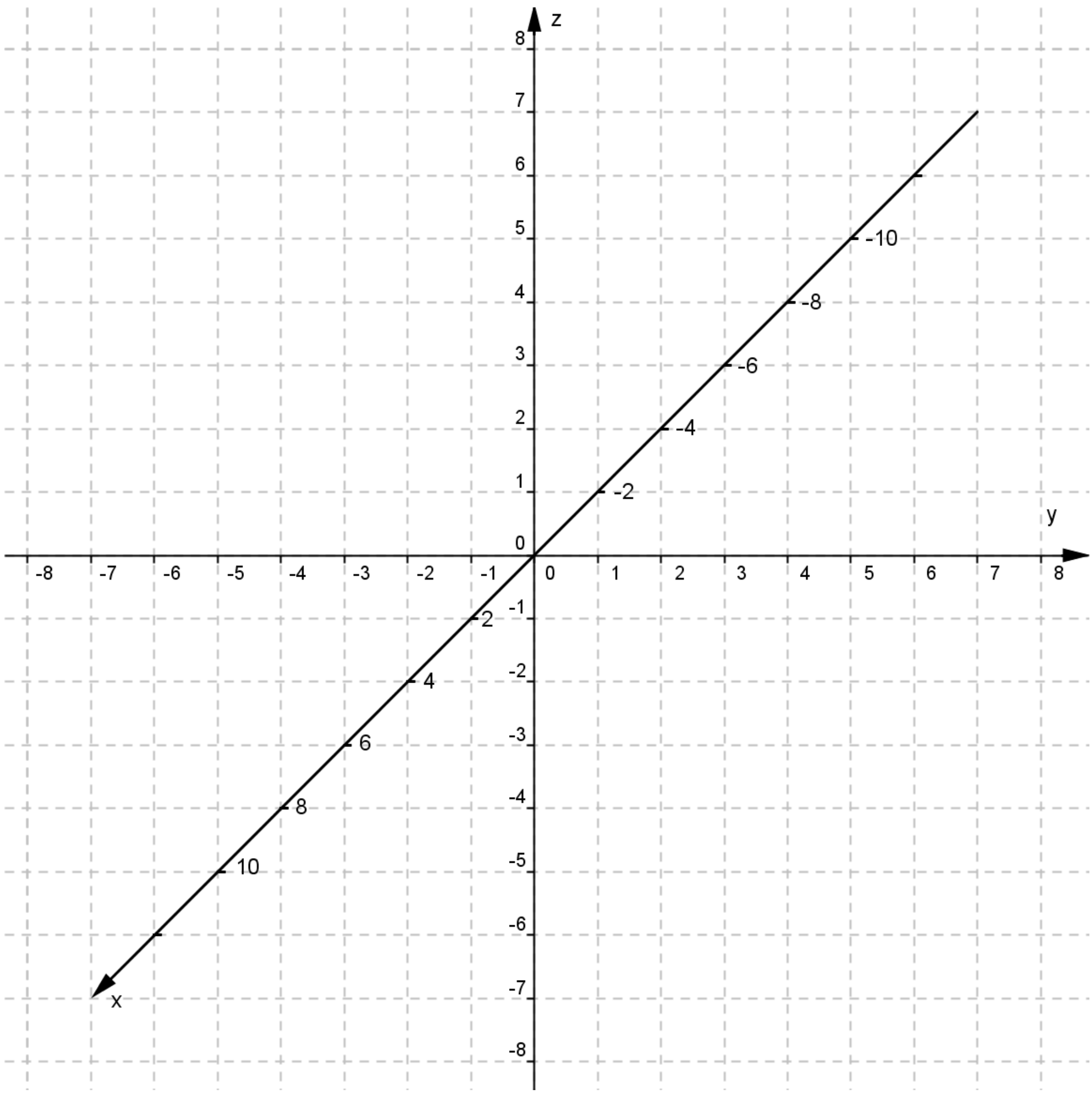
Erklären Sie, dass diese auch aus geometrischer Sicht gerechtfertigt ist, wenn man das Methanmolekül in eine geeignete Ebene projiziert.




| Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Teilaufgabe | a) | b) | c) | d) | e) | f) | Summe |
| BE | 4 | 5 | 9 | 4 | 4 | 4 | 30 |

**Anlage**

## Anlage zu Aufgabe CAS 2.1: Methanmolekül



**Aufgabe 2.2 CAS: Gebirgsflüge**

Ein Flugzeug fliegt geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit auf einer Geraden, die durch die Punkte $A(4\,|\,2\,|\,2{,}3)$ und $B(15\,|\,8\,|\,2{,}5)$ verläuft.

Um 12:13 Uhr durchfliegt das Flugzeug *A* und eine Minute später *B*.
Die Erdoberfläche liegt in der *x*-*y*-Ebene. Die Einheit für die Zeit *t* ist 1 min, 1 LE = 1 km.


a) Geben Sie eine Parametergleichung für den Kurs des Flugzeugs an.

Voraus befindet sich ein Berg mit der Bergspitze $T(59\,|\,32\,|\,3)$.
Weisen Sie nach, dass die Bergspitze nicht auf der Flugbahn liegt.

Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Flugzeugs, geben Sie das Ergebnis in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ an.

b) Bestimmen Sie den Punkt *P*, in dem das Flugzeug seine Reiseflughöhe von 3,5 km erreicht und ermitteln Sie die Flugzeit bis zum Erreichen von *P*.
[Kontrollergebnis: $P(70\,|\,38\,|\,3{,}5)$]

Im Punkt *P* ändert der Flugkapitän seinen Kurs und fliegt in Richtung $Q(81\,|\,44\,|\,3{,}5)$ weiter. Das Flugzeug erreicht $Q$ nach einer Minute.
Bestimmen Sie eine Geradengleichung für den neuen Kurs.
Berechnen Sie den Winkel, den die alte und die neue Flugstrecke miteinander bilden.

c) Ein Rettungshubschrauber startet von einem Berghang vom Punkt $R(139\,|\,89\,|\,2{,}1)$ und fliegt entlang der Geraden $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 139 \\ 89 \\ 2{,}1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$.

Der Berghang liegt in einer Ebene *E* mit der Gleichung $15x - 18y + 50z = 588$.

Bestimmen Sie die Größe des Winkels, unter dem der Hubschrauber vom Berghang abhebt.

d) Die Gerade *h* schneidet die Gerade durch *P* und *Q* in einem Punkt *S*.

Der Hubschrauber startet um 12:17 Uhr. Er legt in einer Minute genau die Strecke zurück, die dem Betrag des Richtungsvektors von *h* entspricht.
Das Flugzeug fliegt nach der Kursänderung um 12:19 Uhr (vergleiche Teil b) auf konstanter Reiseflughöhe.
Entscheiden Sie begründet, ob eine Kurskorrektur erforderlich wird, damit es zwischen dem Hubschrauber und dem Flugzeug nicht zu einer Kollision kommt.

| Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Teilaufgabe | a) | b) | c) | d) | Summe |
| BE | 11 | 12 | 3 | 4 | 30 |

## Aufgabe 3.1 CAS: Onlineshopping

Die Tabelle gibt repräsentativ die Kaufgewohnheiten der Verbraucher in Deutschland beim Onlineshopping wieder. So wurde beispielsweise ermittelt, dass 32 % der befragten Verbraucher gelegentlich Computer im Internet kaufen. Jeder Verbraucher kann dabei unabhängig von den anderen für die Artikel verschiedene Kaufgewohnheiten besitzen.

| | regelmäßig | gelegentlich | nie |
|---|---|---|---|
| Bücher | 50 % | 30 % | 20 % |
| Sportartikel | 13 % | 33 % | 54 % |
| Computer | 33 % | 32 % | 35 % |

(Quelle: Statista-Datenbank 2012)

In einem Statistikprojekt befragt Tom zufällig ausgewählte Personen nach ihren Kaufgewohnheiten. Die Gültigkeit der Tabellenangaben wird dabei vorausgesetzt.

a) Zwei Personen werden ausgewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

$A$: Beide Personen kaufen nie Computer im Internet.

$B$: Die erste Person kauft regelmäßig Bücher und die zweite regelmäßig Computer im Internet.

$C$: Genau einer von zwei Ausgewählten kauft regelmäßig Sportartikel im Internet.

b) Tom wählt nun 20 Personen für die nächste Fragerunde aus.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

$D$: Höchstens die Hälfte der 20 Ausgewählten kaufen nie Sportartikel im Internet.

$E$: Unter den 20 ausgewählten Personen sind mindestens drei, die gelegentlich Sportartikel im Internet kaufen.

$F$: Der Erste der Ausgewählten kauft gelegentlich Sportartikel im Internet, von den anderen 19 tun dies genau fünf.

c) Berechnen Sie, wie viele Personen mindestens befragt werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % wenigstens eine Person zu finden, die regelmäßig Computer im Internet kauft.

d) In einem Internetcafé sitzen 20 Personen. 15 von ihnen kaufen Waren im Internet.
Tom befragt vier von den 20 Personen nach ihren Kaufgewohnheiten.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens drei der vier Befragten Waren im Internet kaufen.

e) Von den 20 Personen verlassen $n$ Personen unabhängig voneinander das Internetcafé.
Betrachtet wird das Ereignis $S$: „Unter den $n$ Personen befindet sich keiner, der Waren im Internet kauft.“
Untersuchen Sie, für welche $n$ die Wahrscheinlichkeit $P(S)$ unter ein Prozent sinkt.

| Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Teilaufgabe | a) | b) | c) | d) | e) | Summe |
| BE | 7 | 10 | 4 | 5 | 4 | 30 |

## Aufgabe 3.2 CAS: Oktaeder


Neben dem klassischen Würfel hat ein Spielzeughersteller auch ein Oktaeder als Spielgerät in seinem Angebot (siehe Abbildung.
Bei diesem sind die acht gleich großen Seiten mit den Ziffern 1 bis 8 beschriftet.

Die Wahrscheinlichkeit beträgt beim Würfeln für jede der Ziffern $p = \frac{1}{8}$.

a) Mit dem Oktaeder werden zunächst 5 Würfe durchgeführt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

$A_1$: In jedem der 5 Würfe fällt eine gerade Zahl.

$A_2$: In keinem der 5 Würfe fällt eine 7.

$A_3$: Im ersten Wurf fällt eine 2, danach nicht mehr.

b) Nun werden 20 Würfe durchgeführt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

$B_1$: Eine ungerade Zahl fällt höchstens 10-mal.

$B_2$: Die 7 fällt genau zweimal, aber nicht im letzten Wurf.

c) Nina und Tim haben beide ein solches Oktaeder als Werbegeschenk erhalten und führen damit Würfelversuche durch.

Beide würfeln einmal.

Betrachtet wird das Ereignis $C_1$: Nina würfelt höchstens eine 6, Tim eine Zahl größer 6.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $C_1$.

In einer neuen Runde wirft jeder genau 5-mal.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis
$C_2$: Jeder von beiden hat genau einmal eine Zahl größer 6.

d) Tims Freund besitzt ein Oktaeder, das nicht mit Ziffern beschriftet ist, sondern jede seiner Seiten ist entweder rot, grün oder gelb eingefärbt.

Der Freund hat ermittelt, wie häufig bei 10 Würfen die Farbe gelb mehr als 5-mal fällt.
Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt nur zwei Prozent.

Untersuchen Sie, wie viele Seiten des Oktaeders gelb gefärbt sein könnten.

| Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Teilaufgabe | a) | b) | c) | d) | Summe |
| BE | 10 | 7 | 9 | 4 | 30 |