Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2011

Mathematik

Grundkurs mit CAS

Aufgabenvorschlag

Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache Formelsammlung, die von der zuständigen Senatsverwaltung bzw. dem zuständigen Ministerium für die Verwendung im Abitur zugelassen und an der Schule eingeführt ist Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder dem automatisierten Lösen von Gleichungen verfügen.
Gesamtbearbeitungszeit:	210 Minuten inkl. Lese- und Auswahlzeit

Aufgabenstellung 1

Thema/Inhalt: Analysis

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 1.1 oder 1.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 2

Thema/Inhalt: Analytische Geometrie

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 3

Thema/Inhalt: Stochastik

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 3.1 oder 3.2 zur Bearbeitung aus.

Nennen Sie Ihre Ansätze, Lösungswege und Ergebnisse in der in der Mathematik üblichen Form und nicht in der CAS-Eingabeform.

Aufgabe 1.1 CAS: See

Gegeben sind die Funktionen *f* und *g* durch die Gleichung $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x$ und den Graphen von g in der Anlage.
Die Graphen von f und *g* begrenzen für $1 \leq x \leq 3$ einen See. Der Graph von f bildet modellhaft die nördliche und die zu *g* gehörende quadratische Parabel die südliche Uferbegrenzungslinie.

Die *x*-Achse verläuft in West-Ost-Richtung. Die Längeneinheit ist 1 km.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von *g*.
[Zur Kontrolle: $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$.]

b) Zeigen Sie, dass der Punkt $S_x(1\,|\,0)$ ein gemeinsamer Punkt der Graphen von *f* und *g* ist.
Der Graph der Funktion *f* schneidet die *x*-Achse in zwei weiteren Punkten. Ermitteln Sie deren Koordinaten.

c) Bestimmen Sie für den Graphen von f die Koordinaten der lokalen Extrempunkte und deren Art. Für die Koordinaten der Extrempunkte genügen Näherungswerte.
Zeichnen Sie auf der Grundlage Ihrer bisherigen Ergebnisse den Graphen von *f* in der Anlage ein.

d) Berechnen Sie die Länge des Sees zwischen seinem nördlichsten und seinem südlichsten Punkt in Metern.
Berechnen Sie die Größe der Seefläche.

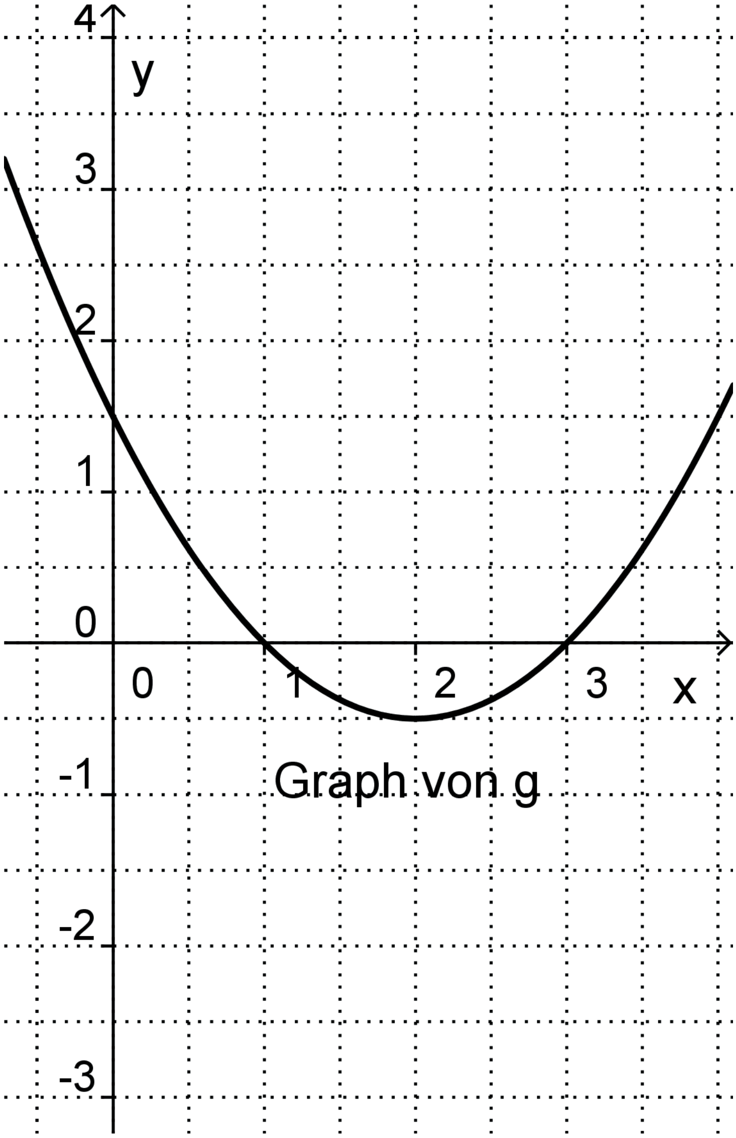
e) Westlich des Sees verläuft eine geradlinige Straße durch den Punkt $P(1\,|\,1)$ parallel zur Wendetangente des Graphen von *f*.
Der Graph von f besitzt genau einen Wendepunkt. Ermitteln Sie dessen Koordinaten und bestimmen Sie eine Gleichung für den Straßenverlauf. Zeichnen Sie diesen in der Anlage ein.
[Kontrollergebnis: $W\left(\frac{4}{3}\,\middle|\,\frac{20}{27}\right)$]
Berechnen Sie die Entfernung des Wendepunktes von der Straße auf einen Meter genau.

f) Im Punkt $Q(3\,|\,0)$ befinden sich Start und Ziel einer Schwimmveranstaltung. Für die Schwimmveranstaltung soll durch zwei Bojen im See ein 5 km langer Kurs in Form eines gleichseitigen Dreiecks abgesteckt werden, wobei eine der drei Schwimmbahnen in West-Ost-Richtung verläuft.
Berechnen Sie für den beschriebenen Schwimmkurs die exakten Koordinaten der Bojen.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile							
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	3	4	9	6	14	4	40

Anlage

Anlage zu Aufgabe 1.1 CAS: See



Nennen Sie Ihre Ansätze, Lösungswege und Ergebnisse in der in der Mathematik üblichen Form und nicht in der CAS-Eingabeform.

Aufgabe 1.2 CAS: Lenkdrachen

Gegeben sind die Funktionen *f* und *g* mit den Gleichungen $f(x) = -\frac{1}{2}x \cdot e^{x+1}$; $x \in \mathbb{R}$

und $g(x) = -\frac{1}{2}x \cdot (e^{x+1} - x)$; $x \in \mathbb{R}$.

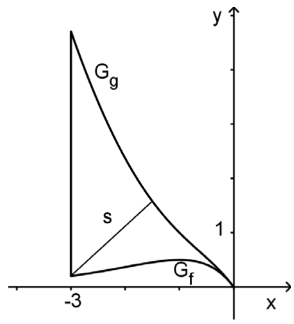
Der Graph der Funktion *f* sei G_f , der Graph der Funktion *g* sei G_g .

a) Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ an.
Untersuchen Sie den Graphen der Funktion g hinsichtlich Symmetrie zur *y*-Achse und zum Koordinatenursprung.

b) Ermitteln Sie die Koordinaten und die Art des lokalen Extrempunktes von G_f .
Der Graph G_f besitzt genau einen Wendepunkt W . Zeigen Sie, dass die Tangente in W parallel zur Geraden h mit der Gleichung $y = \frac{1}{2e}x$ verläuft.

c) Weisen Sie nach, dass der Koordinatenursprung *O* einziger gemeinsamer Punkt der Graphen G_f und G_g ist. Untersuchen Sie rechnerisch, ob sich G_g und G_f in diesem Punkt berühren oder schneiden.

d) Ein Spielzeughersteller möchte die Fläche, die die Graphen G_g und G_f mit der Geraden $x = -3$ einschließen, als Vorlage für den Bau von Lenkdrachen nutzen. Der Drachen ist symmetrisch, seine Symmetrieachse liegt auf der Geraden $x = -3$.
Berechnen Sie den Flächeninhalt eines solchen Drachens unter der Bedingung, dass ein Meter in der Realität drei Längeneinheiten in der rechts stehenden Skizze entspricht.



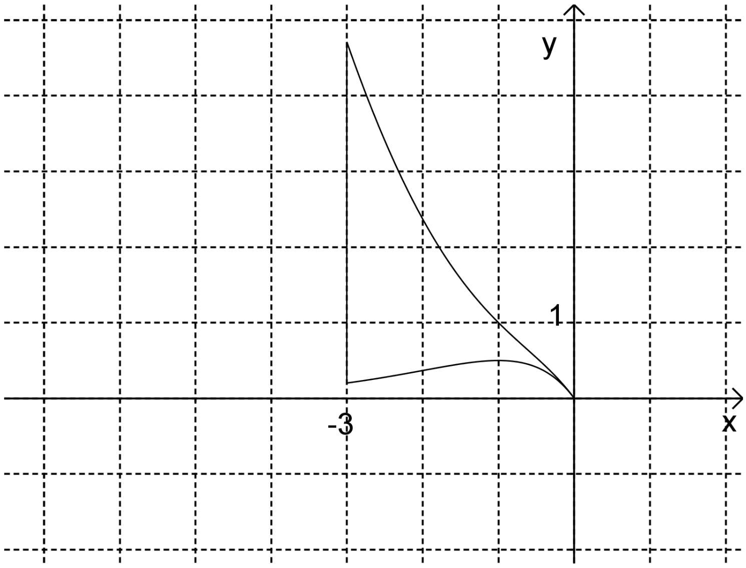
e) Zur Stabilisierung des Drachens wird zwischen den beiden Punkten $A(-1{,}5 \mid g(-1{,}5))$ und $B(-3 \mid f(-3))$ eine Kunststoffstrebe s eingearbeitet. Berechnen Sie die Länge dieser Strebe ($1\,\text{m} = 3\,\text{LE}$) und die Größe des Winkels, den diese mit der Symmetrieachse bildet.

f) Für eine in der Herstellung billigere Variante des Lenkdrachens soll ein Dreieck genutzt werden, das durch Spiegelung an der Geraden $x = -3$ die neue Drachenform ergibt. Eckpunkte dieses Dreiecks sind der Koordinatenursprung *O*, der Schnittpunkt des Graphen G_g mit der Geraden $x = -3$ sowie ein auf dieser Geraden liegender Punkt $Q(-3 \mid y_Q)$ mit $0 < y_Q < 2$.
Zeichnen Sie in der Anlage eine mögliche neue Drachenform ein.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes Q unter der Bedingung, dass der Flächeninhalt des neuen Lenkdrachens $1\,\text{m}^2$ beträgt $(1\,\text{m} = 3\,\text{LE})$.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile							
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	5	9	5	5	7	9	40

Anlage

Anlage zu Aufgabe 1.2 CAS: Lenkdrachen



Nennen Sie Ihre Ansätze, Lösungswege und Ergebnisse in der in der Mathematik üblichen Form und nicht in der CAS-Eingabeform.

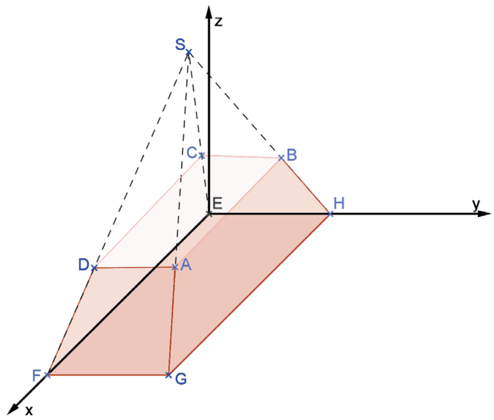
Aufgabe 2.1 CAS: Pavillon

Gegeben sind die Punkte $A(13{,}5|9|6)$, $B(4{,}5|9|6)$ und $S(9|6|12)$ und die Ebene E_1 durch $E_1: 4x + 3z = 72$.

a) Ermitteln Sie für die Ebene E_2, die durch die Punkte *A*, *B* und *S* festgelegt ist, eine Gleichung in Parameter- und eine in Koordinatenform und geben Sie einen Normalenvektor für E_2 an. [Zur Kontrolle: $E_2: 2y + z = 24$]

b) Weisen Sie durch Rechnung nach, dass die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 13{,}5 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4{,}5 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}$ die Schnittgerade von E_1 und E_2 ist. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes *G*, in dem die Gerade *g* die x-y-Ebene durchstößt.

Auf dem Ausstellungsgelände einer Gartenschau soll ein Informationspavillon in Form eines Pyramidenstumpfes gebaut werden (siehe Abbildung). Die rechteckige Grundfläche des Pavillons ist durch die Punkte $E(0|0|0)$, $F(18|0|0)$, $G(18|12|0)$ und $H(0|12|0)$ gegeben. In den Ebenen E_1 bzw. E_2 liegt je eine Seitenfläche des Pavillons (1 LE = 1 m).



c) Die Dachfläche mit den Eckpunkten $A(13{,}5|9|6)$, $B(4{,}5|9|6)$, $C(4{,}5|3|6)$ und $D(13{,}5|3|6)$ soll als Aussichtsplattform genutzt werden. Der Architekt plant eine Außentreppe auf der in E_1 liegenden Seitenfläche *FGAD*. Aus Sicherheitsgründen darf der Neigungswinkel der Treppe, der durch die Neigung der Ebene E_1 gegenüber der Grundfläche gegeben ist, nicht größer als 30° sein.
Untersuchen Sie, ob diese Treppe gebaut werden darf.

d) Abends soll der Pavillon von außen mit Scheinwerfern beleuchtet werden. Für eine möglichst gute Ausleuchtung der in E_2 liegenden Seitenfläche *GHBA* soll das Licht auf den Schnittpunkt *M* der Diagonalen gerichtet sein. Berechnen Sie die Koordinaten von *M*.
Im Punkt $P(9|25|0)$ wird ein senkrechter Mast errichtet, an dem der Scheinwerfer angebracht werden soll. Berechnen Sie, in welcher Höhe h der Scheinwerfer am Mast befestigt werden muss, damit das Licht (der als punktförmig angenommenen Lichtquelle) senkrecht im Punkt *M* auftrifft. [Zur Kontrolle: $M(9|10|4)$ und $h = 11{,}5$]

e) Für die Ausstellung wird zwischen Mast und Pavillon im Punkt $Q(9|18|0)$ ein 2,3 m hoher Baum gepflanzt, der in jedem Jahr um 60 cm wächst. Geben Sie die Koordinaten der Baumspitze *T* in Abhängigkeit von der Zeit *t* (in Jahren) an.
Berechnen Sie, nach wie vielen Jahren der Baum spätestens gekürzt werden muss, damit der zu *GHBA* senkrechte Lichtstrahl ungehindert auf den Punkt *M* treffen kann.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile						
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	4	5	5	10	6	30

Nennen Sie Ihre Ansätze, Lösungswege und Ergebnisse in der in der Mathematik üblichen Form und nicht in der CAS-Eingabeform.

Aufgabe 2.2 CAS: Flugbahnen

a) Steht der Tower eines Flugplatzes im Koordinatenursprung, so kann die Anflugbahn eines Airbus annähernd durch die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$ beschrieben werden. Die Landebahn liegt in der *x*-*y*-Ebene.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes, in dem der Airbus auf der Landebahn aufsetzt und berechnen Sie dessen Abstand zum Tower zu diesem Zeitpunkt.
Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem der Airbus auf der Landebahn auftrifft.

b) Eine stehende Gewitterfront befindet sich in der Ebene
$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ k, l \in \mathbb{R}.$$
Beschreiben Sie die Lage der Gewitterfront im Koordinatensystem und geben Sie eine Gleichung der Ebene *E* in Koordinatenform an.
Die Flugbahn einer Boeing kann mit der Gleichung der Geraden
$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3{,}5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R} \text{ beschrieben werden.}$$
Untersuchen Sie, ob die Boeing die Gewitterfront durchfliegt.
Bestimmen Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Punktes, in dem sie in die Ebene der Gewitterfront eintritt.
Forschungsflugzeuge sollten möglichst parallel zu Gewitterfronten fliegen, damit sie exakte Daten liefern. Entscheiden Sie, auf welcher der beiden Flugrouten r_1, r_2 das Forschungsflugzeug fliegen sollte. Begründen Sie Ihre Entscheidung.
$$r_1: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1{,}75 \\ 3 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix};\quad n \in \mathbb{R} \quad ; \quad r_2: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 16 \\ 9 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 6{,}5 \\ 16{,}25 \\ 2 \end{pmatrix};\ m \in \mathbb{R}$$

c) Im Tower eines Flugplatzes wird ständig kontrolliert, ob es zu Kollisionen von Flugzeugen kommen kann. Entscheiden Sie, ob der Airbus und die Boeing kollidieren könnten.

d) Bei der Flugsicherung auf Flughäfen wird ständig dafür gesorgt, dass die Flugzeuge jederzeit einen Mindestabstand zueinander einhalten.
Berechnen Sie den Abstand des Airbusses von der Boeing für $r = -2$ und $s = 3$.
Nun befindet sich der Airbus im Punkt $P(-4\,|\,3\,|\,2)$.
Bestimmen Sie seinen Abstand zur Flugbahn *h* der Boeing.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile					
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	Summe
BE	8	12	4	6	30

Nennen Sie Ihre Ansätze, Lösungswege und Ergebnisse in der in der Mathematik üblichen Form und nicht in der CAS-Eingabeform.

Aufgabe 3.1 CAS: Umfrage über Discobesuche

Bei einer repräsentativen Umfrage unter 1200 Discobesuchern wird nach den beiden Merkmalen

- männlich (M) / weiblich (W) und
- intensiver Discobesucher (I) / gelegentlicher Discobesucher (G)

unterschieden.

Das Ergebnis der Umfrage ist (unvollständig) in der nebenstehenden Vierfeldertafel angegeben.

	I	G	Σ
M	60		
W		520	
Summe	200		

a) Übertragen Sie die Vierfeldertafel auf Ihr Arbeitspapier und ergänzen Sie alle fehlenden Werte.
Bestimmen Sie den Anteil der intensiven Discobesucher unter den weiblichen Discobesuchern.
Ermitteln Sie den Anteil der männlichen gelegentlichen Discobesucher unter allen Discobesuchern.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass man unter 100 befragten Discobesuchern mehr als 10 intensive Discobesucher findet.
Ermitteln Sie, wie viele Discobesucher mindestens befragt werden müssen, um mit mindestens 99 % Wahrscheinlichkeit mindestens einen intensiven Discobesucher zu finden.

c) 12 Schüler eines Mathematik-Grundkurses nehmen am schriftlichen Mathematikabitur teil. Drei dieser 12 Schüler sind intensive Discobesucher, die anderen sind gelegentliche Discobesucher.
Drei der 12 Schüler des Kurses im Mathematikabitur werden nacheinander beliebig ausgewählt. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse.
Unter den drei ausgewählten Schülern sind
A: „nur der erste und der dritte Schüler gelegentliche Discobesucher“,
B: „genau zwei intensive Discobesucher“
C: „mindestens 2 gelegentliche Discobesucher“.

d) In der Region, in der die Umfrage stattfand, soll durch die Verpflichtung eines bekannten Discjockeys erreicht werden, dass der Anteil p der intensiven Discobesucher steigt. Die Wahrscheinlichkeit, dass unter 6 Discobesuchern mindestens 2 intensive Discobesucher zu finden sind, soll mindestens 60 % betragen.
Ermitteln Sie, auf welchen Wert p der Anteil der intensiven Discobesucher mindestens steigen muss, um die Vorgabe zu erfüllen.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile					
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	Summe
BE	9	9	8	4	30

Nennen Sie Ihre Ansätze, Lösungswege und Ergebnisse in der in der Mathematik üblichen Form und nicht in der CAS-Eingabeform.

Aufgabe 3.2 CAS: Geschwindigkeitskontrolle

Auf dem Berliner Ring werden Geschwindigkeitskontrollen durchgeführt. Dabei wurde durch statistische Erhebungen festgestellt, dass 4 % der PKW-Fahrer und 3 % der LKW-Fahrer die zulässige Höchstgeschwindigkeit überschreiten. Diese werden im Weiteren Raser genannt. Beide Verkehrsmittel werden mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,05 kontrolliert.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse
   A: Unter 65 kontrollierten LKW-Fahrern befindet sich kein Raser.
   B: Unter 50 kontrollierten PKW-Fahrern befinden sich mehr als ein Raser.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse gegebenenfalls mit Hilfe geeigneter Baumdiagramme:
   C: Von vier aufeinander folgenden Fahrzeugen wird nur das vierte kontrolliert.
   D: Von fünf aufeinander folgenden Fahrzeugen werden genau zwei kontrolliert, die direkt hintereinander fahren.

c) Berechnen Sie, wie viele PKW mindestens kontrolliert werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens einen Raser zu „erwischen“.

d) Nach einer Protestwelle von betroffenen Fahrern ließ die Polizei ihre Messeinrichtungen überprüfen. Dabei stellte ein unabhängiges Institut fest, dass bei den PKW-Messungen nur 80 % korrekt sind. Bei den LKW-Messungen sind 92 % korrekt. Insgesamt sind 75 % der kontrollierten Kraftfahrzeuge PKW und 25 % LKW.
   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Messung eines zufällig ausgewählten Fahrzeugs nicht korrekt ist.

e) Bei der Auswertung von Raserfotos wird festgestellt, dass 32,2 % der Fahrer allein unterwegs waren.
   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das folgende Ereignis.
   E: Unter drei zufällig ausgewählten Fotos befindet sich höchstens eines, auf dem ein Fahrzeug abgelichtet wurde, welches mit genau einer Person besetzt ist.

f) Der Anteil der PKW-Fahrer, die angeschnallt fahren, sei p mit $0 < p < 1$.
   Berechnen Sie p für den Fall, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, unter 10 zufällig ausgewählten PKW-Fahrern genau 8 angeschnallte Fahrer zu finden, maximal ist.
   Auf den Nachweis des Maximums wird verzichtet.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile							
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	4	9	6	3	4	4	30