Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2011

Mathematik

Leistungskurs mit CAS

Aufgabenvorschlag

Hilfsmittel:

Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache

Formelsammlung, die von der zuständigen Senatsverwaltung bzw. dem zuständigen Ministerium für die Verwendung im Abitur zugelassen und an der Schule eingeführt ist

Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder dem automatisierten Lösen von Gleichungen verfügen.

Gesamtbearbeitungszeit: 270 Minuten inkl. Lese- und Auswahlzeit

Aufgabenstellung 1

Thema/Inhalt: Analysis

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 1.1 oder 1.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 2

Thema/Inhalt: Analytische Geometrie

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 3

Thema/Inhalt: Stochastik

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 3.1 oder 3.2 zur Bearbeitung aus.

Nennen Sie Ihre Ansätze, Lösungswege und Ergebnisse in der in der Mathematik üblichen Form und nicht in der CAS-Eingabeform.

Aufgabe 1.1 CAS: Testfahrt

Eine Funktion f ist für $x \in I\!R$ definiert durch: $f(x) = -(4x+80)\cdot e^{-\frac{1}{20}x} + 80$.

a) Berechnen Sie die Nullstelle von f und untersuchen Sie den Graphen von f auf relative Extrempunkte und deren Art.
Der Graph von f besitzt genau einen Wendepunkt. Ermitteln Sie diesen nur mithilfe des notwendigen Kriteriums. Geben Sie $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ an und zeichnen Sie den Graphen von f für $-10 < x < 150$ einschließlich seiner waagerechten Asymptote in das vorgegebene Koordinatensystem 1 ein.

b) Ein Rechteck mit achsenparallelen Seiten besitzt die beiden Eckpunkte $D(0\,|\,80)$ und $B(x\,|\,f(x))$. Es existiert ein Punkt B mit $x > 0$, so dass der Flächeninhalt des Rechtecks maximal wird. Bestimmen Sie die Koordinaten für diesen Punkt B.

Ein Schienenfahrzeug fährt aus dem Stand an. Die zunehmende Geschwindigkeit des Schienenfahrzeugs wird für $x \geq 0$ durch $f(x) = -(4x+80)\cdot e^{-\frac{1}{20}x} + 80$ dargestellt.
Dabei wird die Zeit x in Sekunden und die Geschwindigkeit $v = f(x)$ in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ gemessen.

c) Die erste Ableitung von $v = f(x)$ ist die Beschleunigung a des Fahrzeugs: $a = f'(x)$.
Geben Sie nur mithilfe des notwendigen Kriteriums den Zeitpunkt x_{max} an, für den die Beschleunigung maximal wird und zeichnen Sie den Graphen von f' für $0 \leq x \leq 40$ in das Koordinatensystem 2 ein.
Bei einer anderen Testfahrt wird die Beschleunigung zum Zeitpunkt $x = 40$ so geändert, dass sie nunmehr linear abnimmt und sich der Graph der linearen Funktion g tangential an den Graphen von f' anschließt.
Bestimmen Sie den Funktionsterm $g(x)$ dieser linearen Funktion und berechnen Sie den Zeitpunkt x_0, zu dem die Beschleunigung $g(x)$ auf null abgenommen hat.
Ergänzen Sie Ihre graphische Darstellung der Beschleunigung um den linearen Anteil.
[Kontrollergebnis: $g(x) = -0{,}2e^{-2}\cdot x + 16e^{-2}$]

d) Der Inhalt der Fläche über dem Intervall $[\,0\,;80\,]$ zwischen der x-Achse und den bei $x = 40$ zusammen gefügten beiden Graphen von f' und g entspricht der zum Zeitpunkt $x_0 = 80$ erreichten Endgeschwindigkeit.
Berechnen Sie diesen Flächeninhalt und geben Sie die bei der Testfahrt nach 80 Sekunden erreichte Endgeschwindigkeit in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ an.

weiter auf Seite 2

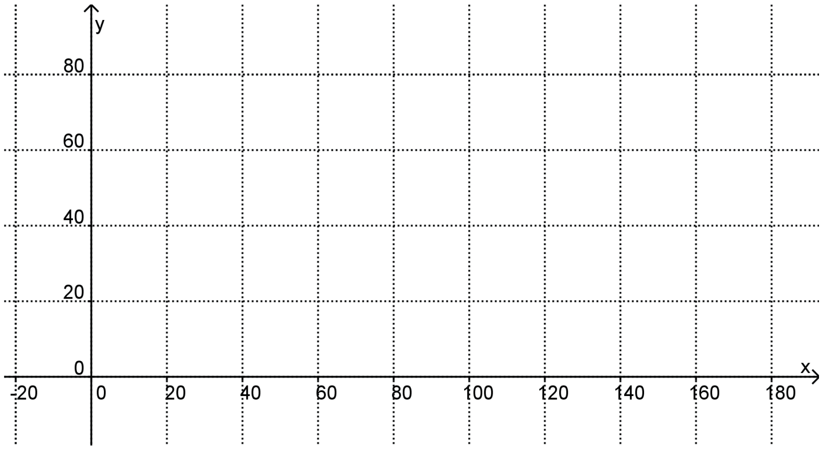
e) Die Geschwindigkeit $f(x)$ des Fahrzeugs ist gleich der ersten Ableitung der Funktion s, die den zurückgelegten Weg in Abhängigkeit von der Zeit x angibt: $f(x) = s'(x)$.
Zum Zeitpunkt $x = 0$ beginnt das Fahrzeug seine Fahrt an der Wegmarkierung $0\ \text{m}$.
Bestimmen Sie die Stammfunktion s von f so, dass $s(0) = 0$ erfüllt wird.
Berechnen Sie die Länge der zurückgelegten Strecke bis zum Zeitpunkt $x = 40$.
Berechnen Sie die Geschwindigkeit, die bis dahin erreicht wird.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile						
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	14	6	10	4	6	40

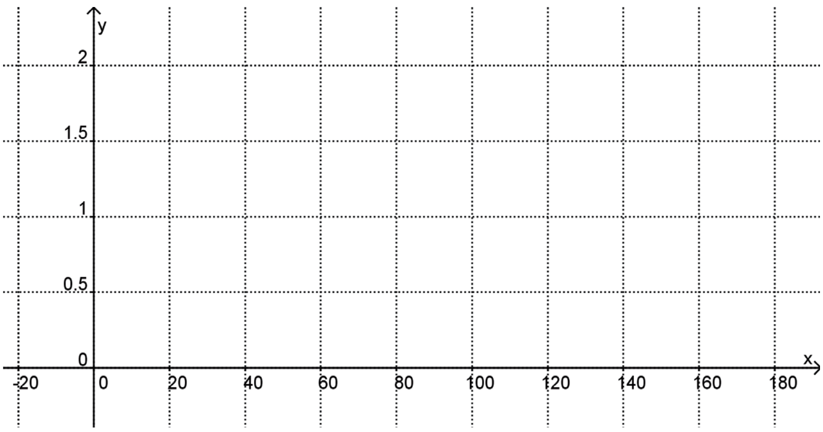
Anlage

Anlage zu Aufgabe 1.1 CAS: Testfahrt

Koordinatensystem 1



Koordinatensystem 2



Nennen Sie Ihre Ansätze, Lösungswege und Ergebnisse in der in der Mathematik üblichen Form und nicht in der CAS-Eingabeform.

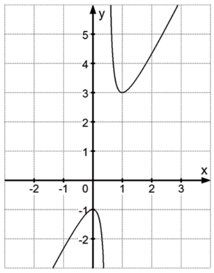
Aufgabe 1.2 CAS: Kassenhäuschen

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit der Gleichung $f_a(x) = ax + \frac{1}{ax-1}$; $a \in I\!R, a \neq 0$.
Die Graphen dieser Funktionen sind G_a.

a) Geben Sie den Definitionsbereich von f_a , die Gleichungen aller Asymptoten einschließlich der Polgeraden von G_a und das Verhalten der Funktionswerte von f_a für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ in Abhängigkeit von a an.

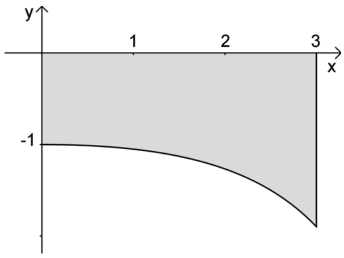
b) Zeigen Sie, dass alle Graphen G_a einen gemeinsamen lokalen Extrempunkt E_1 besitzen und ermitteln Sie dessen Koordinaten und seine Art.
Neben E_1 hat jeder Graph G_a einen weiteren lokalen Extrempunkt E_2.
Weisen Sie nach, dass dieser vom Parameter a abhängig ist und berechnen Sie diejenigen Werte a, für die die Punkte E_1 und E_2 einen Abstand von $\sqrt{17}$ LE haben.

c) Die Tangente t an G_2 im Tiefpunkt $T(1\,|\,3)$ und eine Ursprungsgerade g schließen einen Winkel von $45°$ ein. Bestimmen Sie eine mögliche Gleichung für g.
Es gibt Parameterwerte $a \neq 1$ derart, dass die zugehörige Tangente an G_a im Punkt $P(1\,|\,f_a(1))$ orthogonal zur Geraden $y = a\,x$ verläuft.
Bestimmen Sie alle Werte für a.



d) Bestimmen Sie, welcher Punkt des Graphen G_2 (siehe Abbildung) den geringsten Abstand zum Punkt $M(2\,|\,0)$ hat und berechnen Sie diesen Abstand.

e) Der Graph $G_{\frac{1}{5}}$ schließt mit der Geraden mit der Gleichung $x = 3$ und den beiden Koordinatenachsen eine Fläche ein (siehe nebenstehende Darstellung).
Der Körper, der durch Rotation dieser Fläche um die x-Achse entsteht, entspricht modellhaft der Form eines Kassenhäuschens mit kreisförmiger Grund- und Deckfläche.
Der größere der beiden Kreise beschreibe die Grundfläche.
Berechnen Sie den umbauten Raum für dieses Kassenhäuschen ($1\,\text{LE} = 1\,\text{m}$).



f) Ein Architekturbüro plant für das aus Teilaufgabe e) um 90° im Uhrzeigersinn gedrehte und somit aufrecht gestellte Kassenhäuschen ein Dach, welches einen parabelförmigen Querschnitt besitzt. Das passgenau aufgesetzte Dach soll eine Querschnittsfläche von $\frac{1}{3}\,\text{m}^2$ besitzen. Ermitteln Sie die Gleichung eines möglichen Graphen, der die obere Begrenzung des Dachquerschnittes beschreibt.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile							
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	7	10	8	7	3	5	40

Nennen Sie Ihre Ansätze, Lösungswege und Ergebnisse in der in der Mathematik üblichen Form und nicht in der CAS-Eingabeform.

Aufgabe 2.1 CAS: Meteoriteneinschlag

Zwei Hobby-Astronomen entdecken zeitgleich einen Meteoriten.

Der erste Astronom sieht den Meteoriten von Punkt $A(5\,|\,6\,|\,0)$ in Richtung $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$,

der zweite Astronom von Punkt $B(8\,|\,21\,|\,0)$ in Richtung $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Eine Minute später beobachtet der erste Astronom den Meteoriten in Richtung $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$ und der zweite Astronom in Richtung $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Die Erdoberfläche liegt angenähert in der *x*-*y*-Ebene. (Eine Längeneinheit entspricht 1 km.)

a) Im Moment der Entdeckung des Meteoriten blicken beide Astronomen entlang je einer Geraden zu dem Meteoriten. Geben Sie je eine Geradengleichung für diese beiden Geraden an.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P_1, in dem sich der Meteorit im Moment der Entdeckung befindet.
[Zur Kontrolle Ihrer Rechnung: $P_1(17\,|\,12\,|\,18)$]

b) Weisen Sie nach, dass sich der Meteorit zum Zeitpunkt der zweiten Beobachtung im Punkt $P_2(35\,|\,30\,|\,15)$ befindet.

c) Der Meteorit bewegt sich gleichförmig auf einer geradlinigen Bahn.
Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Meteoriten in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Berechnen Sie die Koordinaten des Aufschlagpunktes und den Aufschlagwinkel des Meteoriten auf der Erdoberfläche.

d) Die Spitze eines Berges befindet sich im Punkt $S(85\,|\,63\,|\,2)$.
Bestimmen Sie die minimale Entfernung, in der der Meteorit an der Bergspitze vorbeifliegt.

e) Ein Flugzeug hat die Flugbahn $f: \vec{x} = \begin{pmatrix} 102 \\ 203 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 0{,}5 \end{pmatrix},\ s \in I\!R$.
Bestimmen Sie den Abstand zwischen Meteoritenbahn und Flugbahn.

f) Eine Radarstation im Punkt $T(107\,|\,102\,|\,3)$ erfasst alle Flugbewegungen innerhalb eines kugelförmigen Raumes mit einem Radius von 50 km. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes R, in dem der Meteorit auf dem Radarschirm der Station erstmalig auftaucht.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile							
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	6	3	8	5	4	4	30

Nennen Sie Ihre Ansätze, Lösungswege und Ergebnisse in der in der Mathematik üblichen Form und nicht in der CAS-Eingabeform.

Aufgabe 2.2 CAS: Schüttungskegel

Gegeben ist die Ebene E durch $E: -2x+3y+6z=14$ als eine Ebene der Schar $E_a: -2x+3y+az=14\,; a\in\mathbb{Z}$.

a) Die Ebene E schneidet die *x*-*y*-Ebene. Berechnen Sie den Schnittwinkel und ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgeraden g.
Zeigen Sie, dass $A(-13|-4|0)$ und $B(-\frac{19}{4}|\frac{3}{2}|0)$ Punkte der Schnittgeraden g sind.
Ermitteln Sie den Abstand des Koordinatenursprungs von der Ebene E.
Der Koordinatenursprung bildet mit zwei Punkten der Geraden g_{AB} ein gleichseitiges Dreieck. Berechnen Sie die Seitenlängen von diesem Dreieck.
[Zur Kontrolle: $g: \vec{x}=\begin{pmatrix}-7\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix},\ t\in\mathbb{R}$]

b) Für einen Punkt $P(x\,|\,y\,|\,z)$, der in der Ebene E liegt, gilt $x=y=z$. Bestimmen Sie die Koordinaten von P.
Untersuchen Sie, ob alle Ebenen E_a einen Punkt mit drei gleichen Koordinaten besitzen.
Überprüfen Sie, ob auch die Gerade g_{AB} einen Punkt mit drei gleichen Koordinaten besitzt.

Fällt Schüttgut von einem Transportband, dann entsteht ein Schüttungskegel, dessen Grundfläche im Folgenden stets in der *x*-*y*-Ebene liegen soll.

c) Der Punkt $S(-2|-1|\frac{13}{6})$ ist die Spitze eines Schüttungskegels. Eine Mantellinie s dieses Schüttungskegels verläuft von der Spitze S genau senkrecht zur Geraden g und schneidet diese. Stellen Sie eine Gleichung für die Strecke s auf.

d) Ein Transportband, welches den Kegel K aufschüttet, verläuft im Abstand von 7 LE parallel zur Ebene E, in der auch s liegt. Es sei F die Ebene, in der das Transportband verläuft. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F in Koordinatenform.

e) Der Böschungswinkel eines Schüttungskegels bei lockerer Schüttung liegt im Intervall von $25° \le \alpha \le 45°$.
Ermitteln Sie die Anzahl der Ebenen der Schar E_a mit $a\in\mathbb{Z}$, die eine Mantellinie solcher Schüttungskegel enthalten können.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile						
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	11	6	5	4	4	30

Nennen Sie Ihre Ansätze, Lösungswege und Ergebnisse in der in der Mathematik üblichen Form und nicht in der CAS-Eingabeform.

Aufgabe 3.1 CAS: Hemden mit Mängeln

Ein Hemdenfabrikant hat seinen Großabnehmern vertraglich zugesichert, dass nur 2 % seiner Hemden Mängel aufweisen. Fabrikinterne Kontrollen zeigen, dass dieser Standard normalerweise eingehalten wird.

a) Für eine Stichprobe in der Qualitätskontrolle wurde festgelegt: Falls mehr als 2 von 100 Hemden Mängel aufweisen, soll die Auslieferung der Ware gestoppt werden.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Auslieferung einer Bestellung gestoppt wird.

b) Berechnen Sie, ab welcher Anzahl von Hemden in einer Stichprobe die Wahrscheinlichkeit, dass kein Hemd Mängel aufweist, unter 1 % fällt.

c) Durch einen Maschinenfehler ist der Anteil von Hemden mit Mängeln vorübergehend auf 5 % gestiegen. Nun zeigt eine Qualitätskontrolle, dass bei den Freizeithemden , die einen Anteil von 20 % an der Produktion haben, sogar 10 % einen Mangel haben.
Ermitteln Sie zum Beispiel mithilfe eines Baumdiagramms, wie groß der Anteil der Hemden mit Mängeln unter den Nicht-Freizeithemden ist.
Ein Hemd wird zufällig der Produktion entnommen. Es weist einen Mangel auf.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Freizeithemd gewählt wurde.

d) Ein Bekleidungsgeschäft hat noch einen Posten von 25 Freizeithemden des betrachteten Herstellers, von denen 3 Mängel aufweisen. Ein Kunde wählt zufällig 4 Hemden aus.
Bestimmen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit er höchstens ein Hemd mit Mängeln gewählt hat.

e) Ein Großkunde erhält eine Lieferung von 800 Hemden, die glücklicherweise noch produziert wurden, als die Fehlerquote bei 2 % lag.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in dieser Lieferung höchstens 20 Hemden mangelhaft sind.
Ermitteln Sie, von welcher Anzahl K an die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens K von den 800 Hemden Mängel haben, mindestens 90 % beträgt.

f) Der Großabnehmer bietet die 800 Hemden zum regulären Preis von 39,90 € an.
Einen Monat vor der Umstellung auf die neue Kollektion sind 650 Hemden verkauft. Erfahrungsgemäß verkauft er bis zur Umstellung auf die neue Kollektion noch 40 % der restlichen Ware zum regulären Preis. Wird die Restware als Sonderangebot für 24,90 € angeboten, können erfahrungsgemäß 70 % der Restware verkauft werden. Prüfen Sie, welches Verfahren günstiger ist.
Der Großabnehmer entscheidet sich dafür, die restlichen 150 Hemden als Sonderangebot anzubieten. Er verkauft daraufhin 110 der restlichen 150 Hemden.
Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit er mit dem regulären Preis einen höheren Ertrag erzielt hätte, wenn jedes der restlichen 150 Hemden mit einer Wahrscheinlichkeit von 40 % verkauft worden wäre.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile							
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	2	3	7	3	8	7	30

Nennen Sie Ihre Ansätze, Lösungswege und Ergebnisse in der in der Mathematik üblichen Form und nicht in der CAS-Eingabeform.

Aufgabe 3.2 CAS: „Sportmuffel"

Menschen in Deutschland sind einer EU-Umfrage (2010) zufolge zwar sportlicher als der europäische Durchschnitt, aber dennoch treiben 31 % der Bundesbürger keinen Sport („Sportmuffel"). EU-weit liegt die „Muffel"-Quote bei 39 %. Nur 9 % der Bundesbürger trainieren fünfmal die Woche und 49 % treiben mindestens einmal pro Woche Sport.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse.
   A: Unter 50 zufällig ausgewählten EU-Bürgern befinden sich genau 19 „Sportmuffel".
   B: Von 15 zufällig ausgewählten Bundesbürgern gehören höchstens zwei zu den „Sportmuffeln".

b) Nun werden 100 zufällig ausgewählte Bundesbürger befragt. Berechnen Sie, wie viele „Sportmuffel" dabei zu erwarten sind.
   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:
   C: Es werden genau so viele „Sportmuffel" gezählt, wie zu erwarten sind.
   D: Die Anzahl der gezählten „Sportmuffel" weicht um höchstens 20 % vom Erwartungswert ab.

Unter allen Bürgern einer Region der Bundesrepublik liegt der Männeranteil bei 48,4 %, von denen 21 % Sport in einem Verein treiben. Insgesamt treiben nur 13 % aller Bürger Sport in Vereinen.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine aus der Gruppe der Vereinsmitglieder zufällig ausgewählte Person ein Mann ist.
   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine aus der Gruppe der Frauen zufällig ausgewählte Person ein Vereinsmitglied ist.

d) Zwei Fans beobachten das Training der Frauenmannschaft des Fußballvereins, bei dem eine Stürmerin 150 Elfmeter schießen muss. Der Trainer geht davon aus, dass sie dabei 85 % der Strafstöße verwandelt. Fan F möchte mit Fan G wetten, wie viele Strafstöße die Frau höchstens verwandelt. Wenn die Zahl der verwandelten Strafstöße kleiner oder gleich seiner genannten Zahl m ist, dann hat er gewonnen. Ansonsten hat Fan G gewonnen.
   Ermitteln Sie, die kleinste mögliche Zahl m, die Fan F wählen kann, damit er mit mindestens 70%iger Wahrscheinlichkeit die Wette gewinnt.

e) Bei einem Punktspiel der Männermannschaft des Fußballvereins befinden sich in einer Gruppe von n (n gerade) Fans genau zwei „Sportmuffel".
   Berechnen Sie, wie viele Fans (in Abhängigkeit von n) man aus dieser Gruppe zufällig und nacheinander „ohne Zurücklegen" mindestens auswählen müsste, damit die Wahrscheinlichkeit, dass sich genau ein „Sportmuffel" unter den ausgewählten Fans befindet, maximal ist.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile						
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	6	6	9	5	4	30