Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2012

Mathematik

Leistungskurs mit CAS

Aufgabenvorschlag

Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist bzw. für Berlin von der zuständigen Senatsverwaltung für die Verwendung im Abitur zugelassen ist. Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder dem automatisierten Lösen von Gleichungen verfügen CAS, das zugelassen und an der Schule eingeführt ist.
Gesamtbearbeitungszeit:	270 Minuten inkl. Lese- und Auswahlzeit

Aufgabenstellung 1

Thema/Inhalt: Analysis

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 1.1 oder 1.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 2

Thema/Inhalt: Analytische Geometrie

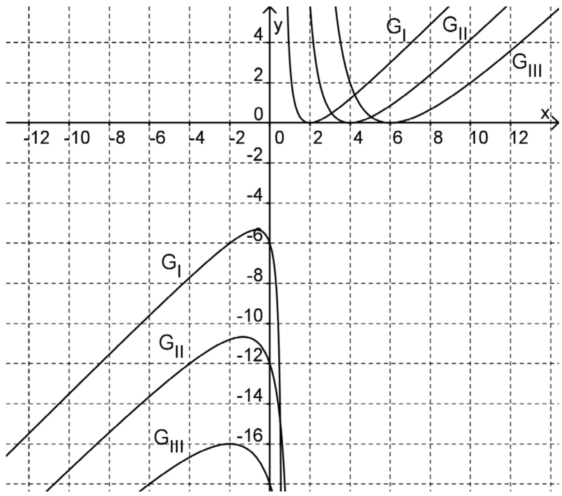
Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 3

Thema/Inhalt: Stochastik

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 3.1 oder 3.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabe 1.1 CAS: Eisenbahntrasse



Im nebenstehenden Bild sind drei Graphen der Funktionenschar mit der Gleichung

$f_a(x) = \dfrac{(x-3a)^2}{x-a}$ mit $a \in I\!R$ und $a > 0$ gegeben.

a) Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion f_a an.
Begründen Sie, dass $x = a$ eine Polstelle ist.
Bestimmen Sie die Gleichung für die schräge Asymptote.

b) Ermitteln Sie die Koordinaten und Art der lokalen Extrempunkte der Graphen von f_a.
[Kontrollergebnisse: $H_a(-a \mid -8a)$, $T_a(3a \mid 0)$]
Bestimmen Sie je eine Gleichung der Geraden, auf der die Hochpunkte bzw. die Tiefpunkte der Graphen von f_a liegen.
Begründen Sie, dass kein Graph einen Wendepunkt besitzt.

c) Geben Sie an, für welche Werte des Parameters *a* die Graphen gezeichnet worden sind und begründen Sie Ihre Entscheidung.

d) Betrachten Sie den Graphen von f_1. Untersuchen Sie, ob es für $x > 1$ einen Punkt $P(x \mid f_1(x))$ gibt, dessen Abstand zum Punkt $Q(1 \mid -4)$ minimal ist. Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten dieses Punktes und seinen Abstand zu Q.

e) Im 1. Quadranten gibt es zwischen der Geraden mit der Gleichung $y = x - 5$, dem Graphen von f_1 und der *x*-Achse für $x \geq 3$ eine Fläche, die ins Unendliche reicht.
Prüfen Sie, ob dieser Fläche ein endlicher Flächeninhalt zugeordnet werden kann.
Diese Fläche wird jetzt rechts durch $x = 9$ begrenzt und rotiert um die *x*-Achse. Dabei entsteht ein nach rechts offener Hohlkörper mit kegelförmigem Hohlraum ($1\,\text{LE} = 1\,\text{cm}$).
Berechnen Sie das Volumen der Wand des Hohlraumes.

f) Die beiden Graphenteile von f_1 sind Bestandteile eines Eisenbahnnetzes. Zwischen den beiden Extrempunkten des Graphen soll eine neue Gleisverbindung gebaut werden.
Der Übergang an den beiden Punkten soll jeweils „ohne Knick“ erfolgen, das heißt, in diesen beiden Punkten muss es jeweils einen gleichen Anstieg geben.
Modellieren Sie die neue Gleisverbindung durch eine ganzrationale Funktion von möglichst geringem Grad.
Als Alternative wird die Sinusfunktion mit $s(x) = 4 \cdot \sin\left(\dfrac{\pi}{4} \cdot (x-1)\right) - 4$ in Erwägung gezogen. Prüfen Sie, ob auch damit die geforderten Bedingungen erfüllt werden.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile							
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	5	9	3	8	10	5	40

Aufgabe 1.2 CAS: Anhänger einer Halskette

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = (a - x) \cdot e^{\frac{x}{a}}$; $x \in IR$; $a \in IR, a \neq 0$.
Ihre Graphen heißen G_a.

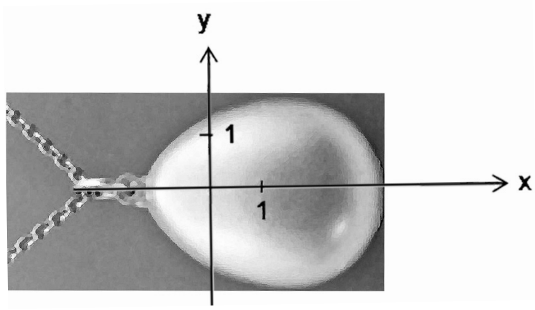
a) Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f_a für $x \to \pm\infty$.
Berechnen Sie die Länge der Strecke in Abhängigkeit von *a*, die durch die jeweiligen beiden Achsenschnittpunkte von G_a festgelegt ist.

b) Zeigen Sie, dass für jeden Graphen G_a der lokale Extrempunkt auf der *y*-Achse liegt und bestimmen Sie dessen Art in Abhängigkeit von a.
Stellen Sie G_2 mindestens im Intervall $[-7\,;3]$ in einem Koordinatensystem graphisch dar.

c) Ein Graph der Schar G_a hat an der Stelle $x = 1$ den Anstieg $m = -e$. Ermitteln Sie den zugehörigen Parameterwert *a*.
Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den die Tangente an diesen Graphen an der Stelle $x = 1$ mit der positiven Richtung der *x*-Achse einschließt.

d) Ermitteln Sie eine Gleichung der Kurve, auf der alle Wendepunkte von G_a liegen.
Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente an den Graphen der Funktion f_2.

e) Jeweils ein Graph G_a für $a > 0$ und der zugehörige an der *x*-Achse gespiegelte Graph sowie eine Gerade $x = k$ sollen die Form eines Kettenanhängers begrenzen.
Bestimmen Sie für alle $k < 0$ den Inhalt der Querschnittsfläche des Kettenanhängers.
Bestimmen Sie den Wert von a für $k = -6$ und $A(a) = 10\ \text{cm}^2$ auf drei Nachkommastellen genau $(1\,\text{LE} = 1\,\text{cm})$.



f) G_a und G_{-a} schließen eine Fläche ein, die als Querschnittsfläche für eine neue Form des Kettenanhängers genutzt werden soll. Bestimmen Sie *a* mit $1{,}70 < a < 1{,}73$ experimentell auf drei Nachkommastellen genau, damit der Flächeninhalt des Querschnitts des Kettenanhängers auf Tausendstel gerundet $10{,}001\text{cm}^2$ beträgt $(1\,\text{LE} = 1\,\text{cm})$.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	7	8	5	10	5	5	40

Aufgabe 2.1 CAS: Raubvogel

Ein Raubvogel gleitet geradlinig gleichförmig in der Morgensonne über den Frühnebel.
Er befindet sich in einer Höhe von $830\ m$ im Punkt $P_0(3260\,|\,-1860\,|\,830)$ und eine Sekunde später in $P_1(3248\,|\,-1848\,|\,829)$. Im selben Zeitraum fliegt ein Singvogel geradlinig gleichförmig im morgendlichen Frühnebel von $Q_0(800\,|\,-600\,|\,200)$ nach $Q_1(796\,|\,-592\,|\,201)$, $1\,LE = 1\,m$.

a) Geben Sie für die Flugbahnen der Vögel je eine Geradengleichung an.
Bestätigen Sie, dass die Vögel mit den Geschwindigkeiten von $61{,}2\,\frac{km}{h}$ bzw. $32{,}4\,\frac{km}{h}$ fliegen.
Zeigen Sie, dass die Geraden windschief zueinander verlaufen, indem Sie die lineare Unabhängigkeit der Richtungsvektoren nachweisen und den Abstand der beiden Geraden berechnen.

b) Die obere Grenze des Frühnebels verläuft in einer Ebene E. Die Ebene E ist orthogonal zu $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$ und verläuft durch den Punkt $A(0\,|\,0\,|\,280)$.
Berechnen Sie, wo, nach welcher Zeit und unter welchem Winkel der Singvogel den Frühnebel verlässt, wenn sein Flug ungestört verläuft.
[Kontrollergebnis: Der Singvogel würde den Nebel in $S(-400\,|\,1800\,|\,500)$ verlassen.]

c) Im Punkt $V(-340\,|\,1740\,|\,200)$ befindet sich eine Vogelwarte, die für Vögel über ein Ortungssystem mit einer Reichweite von 1750 m verfügt.
Bestimmen Sie den Punkt auf der Flugbahn P_0P_1 des Raubvogels, in dem der Raubvogel genau diesen Abstand besitzt und damit erstmalig geortet werden kann.

d) Berechnen Sie den Abstand des Raubvogels vom Singvogel in dem Moment, in dem der Singvogel den Frühnebel verlassen möchte.
Der Raubvogel erspäht den Singvogel beim Erscheinen in der Ebene E und schlägt sofort einen Haken in Richtung auf den Singvogel.
Berechnen Sie die Größe des Winkels, den die ursprüngliche und die neue Flugstrecke des Raubvogels einschließen.

e) In diesem Moment flieht der Singvogel (vom Punkt S aus) zurück in den Frühnebel auf derselben Geraden, auf der sich der Raubvogel nähert.
Berechnen Sie die im Frühnebel mindestens erforderliche Sichtweite, damit der Raubvogel den Singvogel nicht aus den Augen verliert, wenn jetzt Singvogel und Raubvogel jeweils dreimal so schnell fliegen wie zuvor.
Hinweis: Es wird darauf verwiesen, dass es sich bei diesem Modell um einen nicht realistischen Beschleunigungsvorgang handelt, weil ein realer Vogel die dreifache Geschwindigkeit nicht in Nullzeit erreicht.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile						
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	11	7	4	4	4	30

Aufgabe 2.2 CAS: Turm

Ein Turm, der auf ebenem Gelände steht, hat die Form eines Quaders mit quadratischer Grundfläche. Ihm ist als Dach eine gerade quadratische Pyramide aufgesetzt.
Die Eckpunkte der Grundfläche des Turmes sind mit $A(0\,|\,0\,|\,0)$, $B(6\,|\,0\,|\,0)$, $C(6\,|\,6\,|\,0)$ und $D(0\,|\,6\,|\,0)$ gegeben (1 LE = 1 m).

a) Die Turmspitze *S* befindet sich in 16 m Höhe über der Grundfläche. Der Eckpunkt *E* des Dachbodens liegt auf der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 16 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 4{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}; s \in IR$ genau über dem Punkt *A*.
Bestimmen Sie die Koordinaten von *S* und *E*. Geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte *F*, *G* und *H* des Dachbodens an, wobei *F* über *B, G* über *C* und *H* über *D* liegt.
Zeichnen Sie den Turm in das vorgegebene Koordinatensystem ein (Anlage).
[Kontrollergebnis: $E(0\,|\,0\,|\,10)$]

b) Stellen Sie eine Gleichung der Ebene *E**, in der die Dachfläche *GHS* liegt, in Koordinatenform auf.
Die Gerade *g* durchstößt die Ebene *E** im Punkt *P*.
Bestimmen Sie die Koordinaten von *P*. [Kontrollergebnis: $P(3\,|\,4{,}5\,|\,13)$]
An der Dachfläche *GHS* befindet sich außen eine Hebevorrichtung. Dazu wurde ein Balken im Punkt *P* senkrecht durch die Dachfläche *GHS* hindurchgeführt, der $2\sqrt{5}$ m aus der Dachfläche herausragt. An der Spitze des Balkens ist außen eine Rolle befestigt, über die ein Seil läuft.
Berechnen Sie den Abstand, den das heruntergelassene Seil von der Turmwand *CDHG* hat.
Hinweis: Die Ausmaße der Rolle werden vernachlässigt.

c) Der Balken, an dessen Spitze sich die $2\sqrt{5}$ m lange Hebevorrichtung befindet, geht durch das Dach hindurch und wird an einen Träger angeschraubt, der an der Dachfläche *EFS* befestigt ist.
Berechnen Sie die Größe des Winkels, den diese Dachfläche mit dem Balken einschließt.

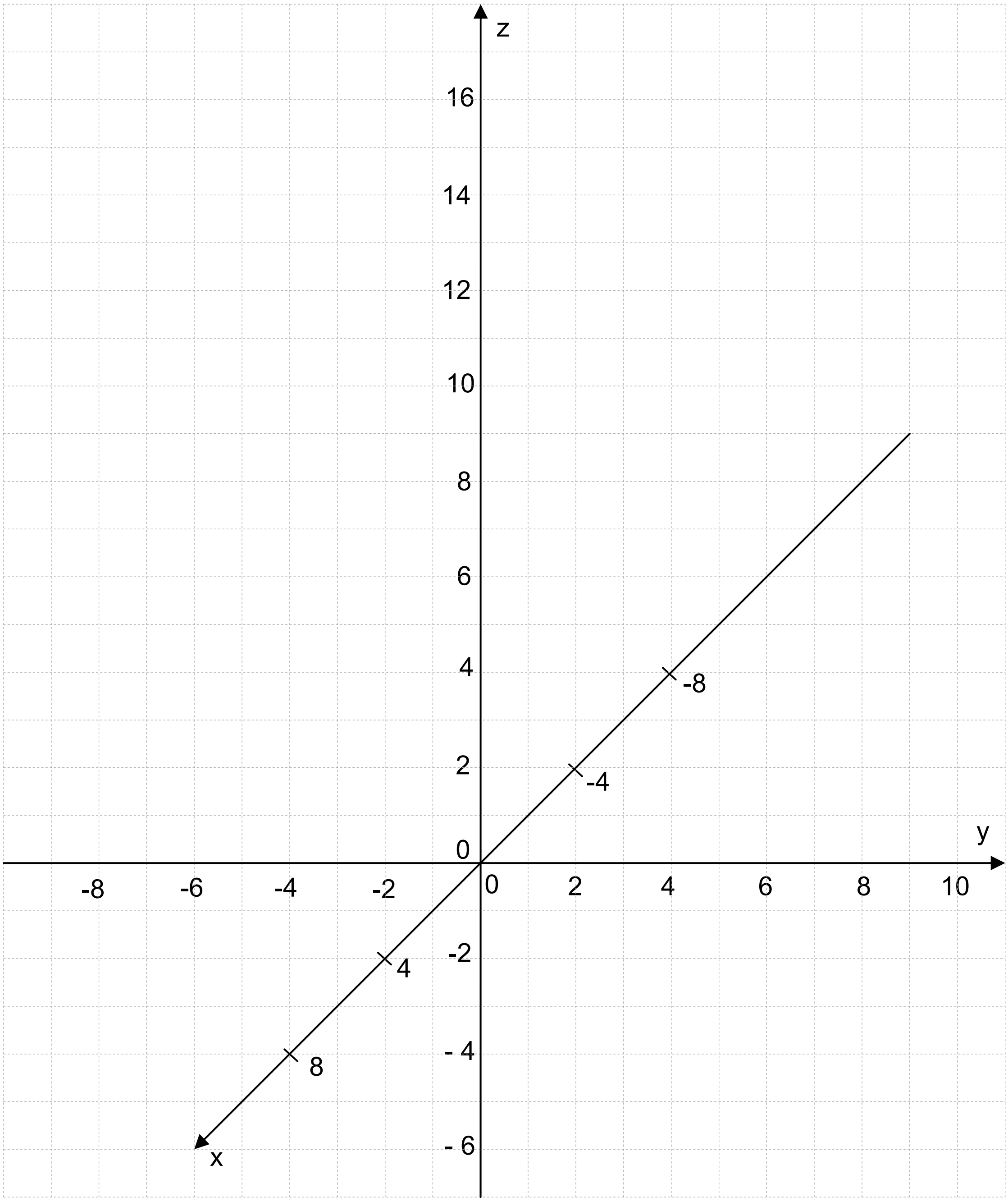
d) An der Seite *BCGF* des Turmes befindet sich eine Zugbrücke. Sie ist drehbar um die Kante *BC*.
Zeigen Sie, dass die Kante *BC* in jeder Ebene der Schar $E_a: ax - z = 6a;\ (a \geq 0)$ liegt.
Untersuchen Sie, ob die Zugbrücke in einer Ebene E_a liegt, wenn sie vollständig geschlossen ist.
Bestimmen Sie den Parameter *a* der Ebene E_a, in welcher die Zugbrücke liegt, wenn sie mit der Turmwand einen Winkel von 30° bildet.

e) An der Turmspitze *S* ist ein Windrichtungsmesser angebracht, dessen Spitze *W* sich genau 0,7 m über *S* befindet. Eine Person (Augenhöhe 1,50 m) steht am Boden vor der Seitenfläche *BCGF* des Turmes und kann die Spitze *W* gerade noch sehen.
Berechnen Sie den Abstand, in dem die Person vor der Seitenfläche steht.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile						
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	7	7	4	8	4	30

Anlage

Anlage zu Aufgabe 2.2 a) Turm



Aufgabe 3.1 CAS: Sport in 3D

Die Fernsehsendung „Sport in 3D“ informiert über das aktuelle Sportgeschehen im neuen 3D-Format. Dabei treten Bildstörungen in 3D mit 4 % Wahrscheinlichkeit auf. Ist das Bild gestört, dann treten mit 60 % Wahrscheinlichkeit auch noch Tonstörungen auf. Ist das Bild einwandfrei, dann ist auch der Ton mit 90 % Wahrscheinlichkeit einwandfrei.

B und T seien die folgenden Ereignisse:

B: „In der 3D-Übertragung treten Bildstörungen auf“;

T: „In der 3D-Übertragung treten Tonstörungen auf“.

a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm und untersuchen Sie, ob die Ereignisse B und T stochastisch unabhängig sind.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für ein einwandfreies Bild, falls der Ton gestört ist.

c) Man betrachtet das Ereignis Z: “Ein Zuschauer wechselt den Sender“.

Falls keine Bildstörung auftritt, tritt Z höchstens mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ ein.

Im Falle einer Bildstörung wechselt der Zuschauer mit Sicherheit den Sender. Berechnen Sie den maximalen Wert *P(Z)*.

d) Im Studio ist ein Fußballtor aufgebaut, auf das Sportler und Studiogäste schießen dürfen. Ein Gast trifft mit der Wahrscheinlichkeit p $(0 < p < 1)$ in das Tor. Berechnen Sie die Mindestgröße von p, damit der Studiogast bei 6 Versuchen mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 95 % mindestens einmal trifft.

e) Die Funktion f beschreibt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Gast bei 6 Versuchen das Fußballtor aus Teilaufgabe d) höchstens einmal trifft. Bestimmen Sie $f(p)$ und zeigen Sie, dass die Funktion f streng monoton fallend ist.

f) Der Sender benötigt zur richtigen Ausleuchtung des Studios, in dem die 3D-Aufnahmen erfolgen, 400 neue, einwandfreie Halogenlampen. Die Erfahrung lehrt, dass 2 % der gelieferten Lampen schadhaft sind. Bestimmen Sie die Anzahl der Lampen, die mindestens bestellt werden müssen, damit mit mindestens 99 % Wahrscheinlichkeit wenigstens 400 einwandfreie Lampen darunter sind.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile							
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	7	3	5	4	6	5	30

Aufgabe 3.2 CAS: Blutgruppen

Jeder Mensch hat eine der Blutgruppen A, B, AB oder 0 (null). Neben der Blutgruppenzugehörigkeit wird nach dem Vorhandensein eines Rhesusfaktors (Rh positiv: Rh^+ bzw. Rh negativ: Rh^-) unterschieden. Für Deutschland gilt folgende Häufigkeitsverteilung für Blutgruppen und zugehörige Rhesusfaktoren in % (Wikipedia 2010). Dabei bedeutet z.B. die Angabe A Rh^- die Blutgruppe A mit negativem Rhesusfaktor, diese hat die Wahrscheinlichkeit $P(A\,Rh^-) = 0{,}06$.

Blutgruppe	A		B		AB		0	
Häufigkeit in %	43		11		5		41	
Rhesusfaktor	A Rh^+	A Rh^-	B Rh^+	B Rh^-	AB Rh^+	AB Rh^-	0 Rh^+	0 Rh^-
Häufigkeit in %	37	6	9	2	4	1	35	6

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

D: Unter 19 zufällig ausgewählten Bundesbürgern befindet sich mehr als eine Person, die die Blutgruppe B mit positivem Rhesusfaktor besitzt.

E: Unter 100 zufällig ausgewählten Bundesbürgern befinden sich mindestens sechs und weniger als zwölf Personen mit Blutgruppe AB.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses D, wenn die Anzahl *n* der zufällig ausgewählten Bundesbürger nun 24 beträgt. Begründen Sie, warum die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses D bei wachsendem *n* größer wird.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Blutspendetermin unter sechs zufällig ausgewählten Spendern

F: der erste Spender die Blutgruppe B, der dritte, vierte und sechste Spender die Blutgruppe A und die übrigen Spender die Blutgruppe AB oder 0 besitzen.

G: einer mit der Blutgruppe B, drei mit der Blutgruppe A und der Rest mit der Blutgruppe AB oder 0 sind.

c) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Bürger eines deutschen Bundeslandes Rh negativ (Rh^-) ist, sei p mit $0 < p < 1$. Berechnen Sie, wie groß p mindestens sein müsste, damit sich mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 80 % unter zehn zufällig ausgewählten Bürgern dieses Bundeslandes mindestens eine Person mit negativem Rhesusfaktor befindet.

d) Auf der Grundlage langjähriger Erfahrungen vermuten die Mitarbeiter eines Blutspendezentrums, dass 3,9 % der Bundesbürger mit Blutgruppe 0 und 2,4 % der Bundesbürger mit anderen Blutgruppen Blutspender sind.

Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein zufällig ausgewählter Bundesbürger Blutspender ist.

Ein Bundesbürger hat gerade Blut gespendet. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er die Blutgruppe 0 besitzt.

e) Nur 3 % der Bundesbürger im Alter von 18 bis 68 Jahren sind Blutspender.
In einer repräsentativ ausgewählten Gruppe von 1500 Bundesbürgern wurde die Anzahl der Blutspender ermittelt. Ermitteln Sie, in welchem kleinstmöglichen zum Erwartungswert symmetrischen Intervall $I = [\mu - a; \mu + a]$ mit $a \in \mathbb{R}, a < \mu$, die Anzahl der Blutspender in dieser Gruppe mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % liegt.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile						
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	9	7	3	7	4	30